第 20 卷 第 11 期　　物 理 学 报　　Vol. 20, No. 11
1964 年 11 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　November, 1964

有限鉄磁-反鉄磁綫鏈中的自旋波譜及其激发*

王鼎盛　蒲富恪

提　　要

本文研究了由交換作用耦合起来的有限长鉄磁和反鉄磁鏈組成的自旋系統. 計算了系統的自旋波的波譜及其在微波場中的激发强度. 在所得結果的基础上, 討論了具有反鉄磁氧化层的鉄磁薄膜的自旋波共振. 闡明了等效地使用唯象普遍边界条件的可能性. 根据理論, 对等效的表面各向异性能作了估計, 得到的数值与实驗值很好地符合.

一、引　　言

Kittel[1] 指出, 由于鉄磁体的表面自旋受到某种表面各向异性 (surface anisotropy) 的作用, 所以利用均匀微波場可以在鉄磁薄膜中激发自旋波駐波. 这种自旋波共振現象首先由 Seavey 和 Tannenwald[2] 用实驗观察到. 使表面自旋“定着”(pinning) 的表面各向异性可能是由于晶格对称性在表面遭到破坏而产生 (Neel[3]). 但是, Kooi 等[4] 用 80% Ni 的坡莫合金 (Permalloy) 薄膜, 在氧化和还原后的状态下分别进行了自旋波共振測量. 結果表明: 表面氧化层对鉄磁薄膜的自旋波共振有很強的影响, 并且 Kooi 等[4] 在利用唯象普遍边界条件的方法 (見后) 定性地解释了观察到的現象后, 还由实驗数据估計了等效的表面各向异性能的数值. 为了从理論上分析表面反鉄磁层的作用, 我們研究了有限的鉄磁和反鉄磁綫鏈通过末端自旋的交換作用耦合而形成的鉄磁-反鉄磁綫鏈. 对这种有限长并存在界面的系統, 严格地求解了自旋波譜和激发強度, 所得的結果比 Pincus[5] 的初步分析更加完全和精确. 并利用理論結果討論了鉄磁薄膜的自旋波共振; 在实驗的条件下, 本文的結果与用 Rado, Weertman[6] 和 Каганов[7] 唯象的普遍边界条件一致. 用本文公式估計了反鉄磁层作用的等效表面各向异性能, 結果与实驗很好地符合.

二、哈密頓算符和格林函数方法

自旋量子数为 S 的 $N+M+1$ 个自旋 $S_h(h=N, N-1, \cdots, 1, 0, -1, \cdots, -M)$ 排列成沿 z 方向的綫鏈. 自旋 $S_N \cdots S_1$ 的近邻間有鉄磁交換作用; $S_{-1} \cdots S_{-M}$ 的近邻間有反鉄磁交換作用; 界面自旋 S_0 和 S_1 間是鉄磁交換作用, 而 S_0 和 S_{-1} 間是反鉄磁交換作用. 此外, 在哈密頓算符中还包含了各向异性能和 Zeeman 能, 取

---

* 1963 年 8 月 31 日收到.

$$\mathscr{H} = -J\sum_{f}\hat{S}_f\cdot\hat{S}_{f-1} + J'\sum_{f'}\hat{S}_{f'}\cdot\hat{S}_{f'+1} -$$
$$-K\sum_{f}(\hat{S}_f^z)^2 - K'(S_0^z)^2 - K'\sum_{f'}(S_{f'}^z)^2 -$$
$$-g\beta(\mathrm{H}_0 - 4\pi M)\sum_{f}\hat{S}_f^z - g\beta\mathrm{H}_0\hat{S}_0^z - g\beta\mathrm{H}_0\sum_{f'}\hat{S}_{f'}^z,$$
$$f = N, N-1, \cdots, 1, f' = -1, -2, \cdots, -M. \tag{1}$$

其中,前两項分别表示鉄磁和反鉄磁交換作用 (J, $J' > 0$); 其次的三項是各向异性能;最后三項是 Zeeman 能, 外場 H_0 沿 z 方向, 而且对鉄磁部分还加入了退磁場 (沿 z 方向磁化, $N_z = 4\pi$, $N_x = N_y = 0$), 这一影响是考慮鉄磁薄膜的自旋波共振时应当加入的.

应該説明的是在选取哈密頓算符时,对各向异性能沒有采取耦合形式的表达式($\hat{S}_{\mathrm{h}}^z\cdot\hat{S}_{\mathrm{h}'}^z$), 而用了 $(\hat{S}_{\mathrm{h}}^z)^2$ 近似. 这两种方法在近似的 Holstein-Primakoff 变換下对內部自旋是等效的,但是用耦合形式时,对表面和界面自旋会出現因对称性破坏而引起的表面各向异性. 为了簡单,在 (1) 式中取 $(\hat{S}_{\mathrm{h}}^z)^2$ 近似, 这相当于摒弃了 Neel 所指出的那种可能使自旋定着的原因. 因此在現在的模型中,表面自旋 S_N 和 S_{-M} 是完全自由的,自旋 S_0 如果受到定着的作用,也只是由于交換作用的变化而引起的. 此外,沒有严格地考慮磁偶极相互作用項,只是在鉄磁部分自旋的 Zeeman 能中加入了退磁場,实际上这种方法在討論沿 z 方向传播的自旋波时是近似等效的. 最后还必須指出,对于 (1) 式在写出 S_0 的各向异性能和 Zeeman 能时,取了与反鉄磁自旋相同的値. 无疑这种取法是具有任意性的,但是在第三节中将指出,这对結果并沒有重要影响.

下面的討論限于 $K' > 0$, 卽反鉄磁层的易磁化軸平行于 z 方向, 并且在 z 方向加了足以克服鉄磁层的退磁場和各向异性能影响的外場 H_0. 这时可以近似地取系統的基态为

$$S_{\mathrm{h}}^z = \begin{cases} S & \mathrm{h} = N, N-1, \cdots, 1, 0, -2, -4, \cdots, -2N'+2, \\ -S & \mathrm{h} = -1, -3, \cdots, -2N'+1. \end{cases} \tag{2}$$

(以下均令 $M = 2N' - 1$, 关于 $M = 2N'$ 的情况只在第三节中給出相应的結果.) 研究基态附近的弱自旋波激发时,作 Holstein-Primakoff 变換,卽

$$\left.\begin{aligned} &\begin{cases} \hat{S}_{\mathrm{h}}^+ = (2S)^{1/2}a_{\mathrm{h}} \\ \hat{S}_{\mathrm{h}}^- = (2S)^{1/2}a_{\mathrm{h}}^+ \quad \mathrm{h} = N, N-1, \cdots, 1, 0, -2, \cdots, -2N'+2, \\ \hat{S}_{\mathrm{h}}^z = S - a_{\mathrm{h}}^+a_{\mathrm{h}} \end{cases} \\ &\begin{cases} \hat{S}_{\mathrm{h}}^+ = (2S)^{1/2}a_{\mathrm{h}}^+ \\ \hat{S}_{\mathrm{h}}^- = (2S)^{1/2}a_{\mathrm{h}} \quad \mathrm{h} = -1, -3, \cdots, -2N'+1. \\ \hat{S}_{\mathrm{h}}^z = -S + a_{\mathrm{h}}^+a_{\mathrm{h}} \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中 a_{h} 和 a_{h}^+ 是 h 格点上自旋偏离的消灭和产生算符,满足玻色算符的对易关系. 通过变換(3),去掉无关的常数項后,哈密頓量变成

$$\mathscr{H} = \hbar\left\{\left[-\frac{\omega_e}{2}a_N^+a_N + (\omega_e + \omega_H)\sum_{f}a_f^+a_f + \left(\frac{\omega_e}{2} + \frac{\omega_e'}{2} + \omega_a + \omega_H'\right)a_0^+a_0 +\right.\right.$$
$$+ (\omega_e' + \omega_a + \omega_H')\sum_{f_1}a_{f_1}^+a_{f_1} + (\omega_e' + \omega_a - \omega_H')\sum_{f_2}a_{f_2}^+a_{f_2} -$$

$$
\left.-\frac{\omega_e'}{2}a^{+}_{-2N'+1}a_{-2N'+1}\right]+
$$

$$
+\left[\frac{\omega_e}{2}\sum_{f}\left(a_f a^{+}_{f-1}+a^{+}_f a_{f-1}\right)+\frac{\omega_e'}{2}\sum_{f'}\left(a_{f'}a_{f'+1}+a^{+}_{f'}a^{+}_{f'+1}\right)\right]\Bigg\}
$$

$$
f=N,\ N-1,\ \cdots,\ 1;\ f'=\begin{cases} f_1 & =-2,\ -4,\ \cdots,\ -2N'+2; \\ f_2 & =-1,\ -3,\ \cdots,\ -2N'+1. \end{cases} \tag{4}
$$

其中

$$
\omega_e=2JS/\hbar,\ \omega_e'=2J'S/\hbar,\ \omega_a=2K'S/\hbar,
$$
$$
\omega_H=2KS/\hbar+\gamma(\mathrm{H}_0-4\pi M),\ \omega_H'=\gamma\mathrm{H}_0,\ \gamma=g\beta/\hbar.
$$

用格林函数方法可以从哈密頓量(4)中求得系統的頻譜和共振峯強度，为此定义

$$
\left.\begin{aligned}
G_{\mathrm{hh}'}(t-t')&=\langle\langle a_{\mathrm{h}}(t)|a^{+}_{\mathrm{h}'}(t')\rangle\rangle^{\mathrm{ret.}}=\theta(t-t')\langle[a_{\mathrm{h}}(t)\ \ a^{+}_{\mathrm{h}'}(t')]\rangle,\\
\Gamma_{\mathrm{hh}'}(t-t')&=\langle\langle a^{+}_{\mathrm{h}}(t)|a^{+}_{\mathrm{h}'}(t')\rangle\rangle^{\mathrm{ret.}}=\theta(t-t')\langle[a^{+}_{\mathrm{h}}(t)\ \ a^{+}_{\mathrm{h}'}(t')]\rangle
\end{aligned}\right\} \tag{5}
$$

(符号的意义見文献[8])；并利用 $G(t-t')$ 和 $\Gamma(t-t')$ 的傅里叶分量 $G(\omega)$ 和 $\Gamma(\omega)$，它們的定义是

$$
\left.\begin{aligned}
G(t-t')&=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{-i\omega(t-t')}\,d\omega,\\
\Gamma(t-t')&=\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\omega)e^{-i\omega(t-t')}\,d\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{6}
$$

很容易从哈密頓量(4)得到关于 $G(\omega)$ 和 $\Gamma(\omega)$ 的綫性方程組

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{h}''}\left[(-\omega\delta_{\mathrm{hh}''}+P_{\mathrm{hh}''})G_{\mathrm{h}''\mathrm{h}'}+Q_{\mathrm{hh}''}\Gamma_{\mathrm{h}''\mathrm{h}'}\right]=\left(-\frac{i}{2\pi}\right)\delta_{\mathrm{hh}'},\\
&\sum_{\mathrm{h}''}\left[Q^{*}_{\mathrm{hh}''}G_{\mathrm{h}''\mathrm{h}'}+(\omega\delta_{\mathrm{hh}''}+P_{\mathrm{hh}''})\Gamma_{\mathrm{h}''\mathrm{h}'}\right]=0,
\end{aligned}\right\} \tag{7}
$$

其中 G 和 Γ 都是指 $G(\omega)$ 和 $\Gamma(\omega)$. 方程(7)中的系数矩陣为

$$
P_{\mathrm{hh}''}=\left|\begin{array}{cccccccccc}
\frac{\omega_e}{2}+\omega_H & -\frac{\omega_e}{2} & & & & & & & & \\
-\frac{\omega_e}{2} & \omega_e+\omega_H & -\frac{\omega_e}{2} & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 & & & \\
 & & -\frac{\omega_e}{2} & \omega_e+\omega_H & -\frac{\omega_e}{2} & & & & & \\
 & & & -\frac{\omega_e}{2} & \frac{\omega_e}{2}+\frac{\omega_e'}{2}+\omega_a+\omega'_H & & & & & \\
 & & & & & \omega_e'+\omega_a-\omega'_H & & & & \\
 & & & & & & \omega_e'+\omega_a+\omega'_H & & & \\
 & & 0 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & \omega_e'+\omega_a-\omega'_H & \\
 & & & & & & & & & \omega_e'+\omega_a+\omega'_H \\
 & & & & & & & & & & \frac{\omega_e'}{2}+\omega_a-\omega'_H
\end{array}\right|
\begin{array}{c}
N\\ N-1\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ -1\\ -2\\ \vdots\\ -2N'+3\\ -2N'+2\\ -2N'+1
\end{array}
$$

$$
Q_{\mathrm{hh}''}=\left|\begin{array}{cccccccccccc|l}
0 & & & & & & & & & & & & N\\
 & 0 & & & & & & & & & & & N-1\\
 & & \ddots & & & & & & 0 & & & & \vdots\\
 & & & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & \frac{\omega_e'}{2} & & & & & & & 0\\
 & & & & \frac{\omega_e'}{2} & 0 & \frac{\omega_e'}{2} & & & & & & -1\\
 & & & & & \frac{\omega_e'}{2} & 0 & \frac{\omega_e'}{2} & & & & & -2\\
 & & 0 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\
 & & & & & & & & \frac{\omega_e'}{2} & 0 & \frac{\omega_e'}{2} & & -2N'+3\\
 & & & & & & & & & \frac{\omega_e'}{2} & 0 & \frac{\omega_e'}{2} & -2N'+2\\
 & & & & & & & & & & \frac{\omega_e'}{2} & 0 & -2N'+1
\end{array}\right.
$$

显然满足条件

$$P_{\mathrm{hh}''}=P^{*}_{\mathrm{h}''\mathrm{h}},\quad Q_{\mathrm{hh}''}=Q_{\mathrm{h}''\mathrm{h}}.$$

方程組(7)的解可以写作[1)]

$$
\left.\begin{aligned}
G_{\mathrm{hh}''}(\omega)&=\sum_{k}\left(-\frac{i}{2\pi}\right)\left[\frac{u_{\mathrm{h}k}\cdot u^{*}_{\mathrm{h}''k}}{\omega_k-\omega}+\frac{v^{*}_{\mathrm{h}k}\cdot v_{\mathrm{h}''k}}{\omega_k+\omega}\right],\\
\Gamma_{\mathrm{hh}''}(\omega)&=\sum_{k}\left(-\frac{i}{2\pi}\right)\left[\frac{v_{\mathrm{h}k}\cdot u^{*}_{\mathrm{h}''k}}{\omega_k-\omega}+\frac{u^{*}_{\mathrm{h}k}\cdot v_{\mathrm{h}''k}}{\omega_k+\omega}\right],
\end{aligned}\right\}\tag{8}
$$

其中 ω_k 是齐次方程組

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{h}''}\left[P_{\mathrm{hh}''}u_{\mathrm{h}''k}+Q_{\mathrm{hh}''}v_{\mathrm{h}''k}\right]=\omega_k u_{\mathrm{h}k},\\
&\sum_{\mathrm{h}''}\left[Q^{*}_{\mathrm{hh}''}u_{\mathrm{h}''k}+P^{*}_{\mathrm{hh}''}v_{\mathrm{h}''k}\right]=-\omega_k v_{\mathrm{h}k}
\end{aligned}\right\}\tag{9}
$$

的大于零的本征值[2)]，$(u_{\mathrm{h}k}\,v_{\mathrm{h}k})$ 是相应的本征解，且满足归一化条件

---

1) 見文献[9]的附录.

2) 关于 ω_k 只取大于零的本征值的理由如下：方程組(9)有相互对应的大于零和小于零的本征值 ω_k^{+}, ω_k^{-}，相互关系为

$$\omega_k^{+}=-\omega_k^{-},\quad u^{+}_{\mathrm{h}k}=v^{-*}_{\mathrm{h}k},\quad v^{+}_{\mathrm{h}k}=u^{-*}_{\mathrm{h}k}.$$

可以証明(9)的系数矩陣 $P_{\mathrm{hh}''}$ 和 $Q_{\mathrm{hh}''}$ 組成的二次型是恆正的，因而对应 ω_k^{+} 和 ω_k^{-} 的解满足的归一化条件分別为 （轉下頁）

$$\sum_{\mathrm{h}} (u_{\mathrm{h}k} \cdot u_{\mathrm{h}k}^{*} - v_{\mathrm{h}k} \cdot v_{\mathrm{h}k}^{*}) = 1. \tag{10}$$

按 Тябликов 的公式[8]，系統在沿 xy 面正圓或負圓偏振的高頻磁場中的磁化率 $\chi^{\pm}(\omega)$ 为

$$\chi^{\pm}(\omega) = i\pi\hbar\gamma^{2} \sum_{\mathrm{hh}''} \langle\langle S_{\mathrm{h}}^{\pm} | S_{\mathrm{h}''}^{\mp} \rangle\rangle_{\omega}^{\mathrm{ret.}}.$$

作 Holstein-Primakoff 变換后，可以得到

$$\begin{aligned} \chi^{+}(\omega) = \chi^{-*}(-\omega) = i2\pi\hbar\gamma^{2}S \Big[& \sum_{\mathrm{h}_1\mathrm{h}_1'} G_{\mathrm{h}_1\mathrm{h}_1'}(\omega) - \sum_{\mathrm{h}_2\mathrm{h}_2'} G_{\mathrm{h}_2\mathrm{h}_2'}^{*}(-\omega) + \\ & + \sum_{\mathrm{h}_1\mathrm{h}_2} (\Gamma_{\mathrm{h}_2\mathrm{h}_1}(\omega) - \Gamma_{\mathrm{h}_1\mathrm{h}_2}^{*}(-\omega)) \Big] \\ & \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_1' = N, N-1, \cdots, 1, 0, -2, -4, \cdots, -2N'+2; \\ & \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_2' = -1, -3, \cdots, -2N'+1. \end{aligned} \tag{11}$$

推导(11)式时利用了关系

$$\langle\langle A | B \rangle\rangle_{\omega}^{\mathrm{ret.}} = -(\langle\langle A^{+} | B^{+} \rangle\rangle_{-\omega}^{\mathrm{ret.}})^{*}.$$

由(8)式和(11)式可見，整个問題的解在于求出方程組(9)的本征値和本征解，由它們可以完全得到系統的能譜和共振激发的強度.

三、方程組的解法和結果

求解齐次方程組(9)时，我們所用的方法是求出滿足內部的鉄磁和反鉄磁自旋的方程的解(相应于无穷介質中的自旋波)，然后再作适当的綫性組合，找出滿足边界和界面自旋的方程的解.

在方程組 (9) 中，对于滿足內部的鉄磁自旋 ($\mathrm{h} = N-1, N-2, \cdots, 1$) 的方程有两支解：

$$\omega_k = \omega_k^{(1),(2)} = \pm [\omega_H + \omega_e(1 - \cos ka)], \tag{12a}$$

其中 a 为鉄磁层的格点距离．但是对无穷介質，k 为实数(不衰減的自旋波)，只有 $\omega_k^{(1)}$ 才是正的，因而經常只取 $\omega_k^{(1)}$ 支．在有限介質情况下，可能出現 k 为虛数的情况，因而 $\omega_k^{(2)}$ 也可能为正．虽然对同一个 k 値只有一支是应該取的(見第 1070 頁脚注 2)，但是在作一般討論时还是把两支都同时写出，到由(15)式决定了 k 的取値后，我們将除去那些使 ω_k 为負的解．对这两支解，$(u_{\mathrm{h}}\, v_{\mathrm{h}})$ 为

$$\begin{aligned} &\omega_k^{(1)}: \quad \begin{cases} u_{\mathrm{h}} = \mathrm{const}\; e^{ik\mathrm{h}a} \\ v_{\mathrm{h}} = 0 \end{cases} \\ &\omega_k^{(2)}: \quad \begin{cases} u_{\mathrm{h}} = 0 \\ v_{\mathrm{h}} = \mathrm{const}\; e^{ik\mathrm{h}a}. \end{cases} \qquad (\mathrm{h} = N-1, N-2, \cdots, 1). \end{aligned} \tag{12b}$$

(接上頁脚注)

$$\sum_{\mathrm{h}} (u_{\mathrm{h}k}^{\pm} \cdot u_{\mathrm{h}k}^{\pm *} - v_{\mathrm{h}k}^{\pm} \cdot v_{\mathrm{h}k}^{\pm *}) = \pm 1.$$

从文献[9]关于解(8)式的証明中可看出，在不同归一化条件下，方程組(7)的解分別为

$$G_{\mathrm{hh}''}(\omega) = \pm \sum_{k} \left(-\frac{i}{2\pi}\right) \left[\frac{u_{\mathrm{h}k}^{\pm} \cdot u_{\mathrm{h}''k}^{\pm *}}{\omega_k^{\pm} - \omega} + \frac{v_{\mathrm{h}k}^{\pm *} \cdot v_{\mathrm{h}''k}^{\pm}}{\omega_k^{\pm} + \omega}\right].$$

利用两种解的对应关系可看出，取 ω_k^{+} 和 ω_k^{-} 的結果是完全相同的[对 $\Gamma_{\mathrm{hh}''}(\omega)$ 也一样]．因此引进方程組(9)把自由度扩大一倍之后，在(8)式的求和中只需取正的(或負的)本征値就可以得到正确的結果.

同样,对满足內部的反鉄磁自旋的方程,可以得到四支解:

$$\omega_k = \begin{cases} \omega_{k'}^{(1),(3)} = \pm \{\omega_H' - [(\omega_e' + \omega_a)^2 - \omega_e'^2 \cos^2 k'a']^{1/2}\}, \\ \omega_{k'}^{(2),(4)} = \pm \{\omega_H' + [(\omega_e' + \omega_a)^2 - \omega_e'^2 \cos^2 k'a']^{1/2}\}, \end{cases} \tag{13a}$$

其中 a' 是反鉄磁层的格点距离. 对这四支解可以得到

$$\begin{cases} u_{h_1} = U_1^{(i)} e^{ik'h_1a'} \\ v_{h_1} = V_1^{(i)} e^{ik'h_1a'} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{h_2} = U_2^{(i)} e^{ik'h_2a'} \\ v_{h_2} = V_2^{(i)} e^{ik'h_2a'} \end{cases} \tag{13b}$$

$h_1 = -2, -4, \cdots, -2N' + 2$; $h_2 = -1, -3, \cdots, -2N' + 3$; $(i) = 1, 2, 3, 4$.

其中 $U_{1,2}^{(i)}$ 和 $V_{1,2}^{(i)}$ 分别为

$$\begin{cases} U_1^{(1),(2)} = \text{const} \\ V_1^{(1),(2)} = 0 \\ U_2^{(1),(2)} = 0 \\ V_2^{(1),(2)} = \alpha_k^{(1),(2)} U_1^{(1),(2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} U_1^{(3),(4)} = 0 \\ V_1^{(3),(4)} = \text{const} \\ U_2^{(3),(4)} = \alpha_k^{(3),(4)} V_1^{(3),(4)} \\ V_2^{(3),(4)} = 0 \end{cases} \tag{13c}$$

$$\alpha_k^{(1)} = \alpha_k^{(3)} = 1/\alpha_k^{(2)} = 1/\alpha_k^{(4)},\ \alpha_k^{(1)} = \frac{(\omega_e' + \omega_a) + [(\omega_e' + \omega_a)^2 - \omega_e'^2 \cos^2 k'a']^{1/2}}{-\omega_e' \cos k'a'}.$$

为求出方程組(9)的解, 我們必須用相同頻率的鉄磁和反鉄磁自旋波耦合起来, 作适当的綫性組合. 考虑到 $(u_h\, v_h)$ 在界面自旋上必須是連續的, 所以我們可以取下面两組解:

1)

$$u_{hk} = \begin{cases} A \cos hka + B \sin hka & h = N, N-1, \cdots, 1, 0; \\ A \cos hk'a' + C \sin hk'a' & h = 0, -2, -4, \cdots, -2N' + 2; \\ 0 & h = -1, -3, \cdots, -2N' + 1; \end{cases}$$

$$v_{hk} = \begin{cases} 0 & h\ \text{同上}; \\ 0 & \alpha_k = \alpha_k^{(1),(2)} \text{——相应于下面頻率} \\ \alpha_k(A \cos hk'a' + C \sin hk'a') & \text{条件的不同取法}. \end{cases} \tag{14a}$$

由頻率相等条件可給出 k 和 k' 的关系为

$$\omega_k^{(1)} = \omega_{k'}^{(1)}\ \text{或}\ \omega_{k'}^{(2)}.$$

2)

$$u_{hk} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \alpha_k(A \cos hk'a' + C \sin hk'a') & h\ \text{同上}, \end{cases}$$

$$v_{hk} = \begin{cases} A \cos hka + B \sin hka & \alpha_k = \alpha_k^{(3),(4)}, \\ A \cos hk'a' + C \sin hk'a' \\ 0 \end{cases} \tag{14b}$$

这时 k 和 k' 的关系为

$$\omega_k^{(2)} = \omega_k^{(3)}\ \text{或}\ \omega_k^{(4)}.$$

所設的解(14)是滿足內部鉄磁和反鉄磁自旋的方程的; 而对(9)中 $h = N, 0, -2N' + 1$ 的六个关于边界和界面自旋的方程, (14a) 和 (14b) 都已自然地分别滿足了三个. 把所設的解代入留下的三个方程, 可以得到关于系数 A, B, C 的綫性齐次方程組. 例如由 (14a) 得

$$A[\cos(N+1)ka - \cos Nka] + B[\sin(N+1)ka - \sin Nka] = 0,$$
$$A(\omega_a + \omega_H' - \omega_H) - B\omega_e \sin ka - C\omega_e' \alpha_k \sin k'a' = 0,$$
$$A[\alpha_k \cos(2N'-1)k'a' + \cos 2N'k'a'] - C[\alpha_k \sin(2N'-1)k'a' + \sin 2N'k'a'] = 0.$$

由此方程組的非零解条件,容易得到 k 和 k' 的取值应满足［对 (14a) 和 (14b) 相同］

$$\sin ka \operatorname{tg}\left(N+\frac{1}{2}\right)ka = \frac{\omega_H' - \omega_H + \omega_a}{\omega_e} - \frac{\omega_e'}{\omega_e}\alpha_k\lambda_k \sin k'a', \tag{15a}$$

其中

$$\lambda_k = \frac{\cos 2N'k'a' + \alpha_k \cos(2N'-1)k'a'}{\sin 2N'k'a' + \alpha_k \sin(2N'-1)k'a'},$$
$$\alpha_k = \alpha_k^{(1)} \quad 或 \quad \alpha_k^{(2)} \quad 或 \quad \alpha_k^{(3)} \quad 或 \quad \alpha_k^{(4)}.$$

由 (15a) 再加上 k 和 k' 满足的鉄磁和反鉄磁自旋波頻率相等的条件

$$\omega_k^{(1)} = \omega_{k'}^{(1)} \quad 或 \quad \omega_{k'}^{(2)},$$
或
$$\omega_k^{(2)} = \omega_{k'}^{(3)} \quad 或 \quad \omega_{k'}^{(4)}, \tag{15b}$$

我們就可以完全解出系統的頻譜. 由于 (12a) 和 (13a) 所表示的两支鉄磁自旋波頻譜中只有一支是有意义的;四支反鉄磁頻譜中只有两支是实际上有意义的，因而由方程 (15a) 和(15b)解出的相应 ω_k 为負的解可以略去(見第 1070 頁脚注 2),而只考慮 ω_k 为正的解. 这样的解共有 $N + 2N' = N + M + 1$ 个，与系統的自由度数目相符.

此外应該說明的是,方程(15a)右面的第一項是密切与自旋 S_0 的各向异性能和 Zeeman 能的取法有关的. 若取其与反鉄磁层的自旋相同，就得到 (15a) 的結果；相反，若取其与鉄磁层的自旋相同，即哈密頓量(1)中的 $-K'(\hat{S}_0^z)^2$ 和 $-g\beta H_0\hat{S}_0^z$ 两項換成 $-K(\hat{S}_0^z)^2$ 和 $-g\beta(H_0 - 4\pi M)\cdot\hat{S}_0^z$ 时,则方程 (15a) 右端第一項变成 $-\dfrac{\omega_H' - \omega_H + \omega_a}{\omega_e}$;若取其与鉄磁和反鉄磁自旋的平均値相同，即哈密頓量 (1) 中用 $-\dfrac{1}{2}(K+K')(\hat{S}_0^z)^2$ 和 $-g\beta(H_0 - 2\pi M)\hat{S}_0^z$ 时，则方程 (15a) 右端第一項变成零. 这表明結果在一定程度上与模型中考慮界面情况的細节有关，而且也很难判断在这种細节上哪种取法更为合理. 但是在后面討論实驗結果的时候,第一項比起第二項小得多，因而这种模型选取上的任意性，并不会給物理現象的闡释带来太大的困难.

在解出本征頻率后，可以确定 A, B, C，并进而求得本征解. 若耦合的鉄磁自旋波 ($\omega_k^{(1)}$) 和反鉄磁自旋波 ($\omega_{k'}^{(1)}$ 或 $\omega_{k'}^{(2)}$) 满足 $\omega_k = \omega_k^{(1)} = \omega_{k'}^{(1)}$ 或 $\omega_{k'}^{(2)}$，則本征解

$$u_{hk} = \begin{cases} K\cos\left[\left(N+\frac{1}{2}\right) - h\right]ka \\ K\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)ka(\cos k'ha' + \lambda_k \sin k'ha') \\ 0 & h \text{ 取値同(14)} \end{cases}$$
$$v_{hk} = \begin{cases} 0 & \alpha_k = \alpha_k^{(1)}\alpha_k^{(2)} \\ 0 \\ K\alpha_k \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)ka(\cos k'ha' + \lambda_k \sin k'ha'); \end{cases} \tag{16a}$$

若 $\omega_k=\omega_k^{(2)}=\omega_k^{(3)}$ 或 $\omega_k^{(4)}$，則

$$u_{\mathrm{h}k}=\begin{cases}0\\0\\K\alpha_k\cos\left(N+\dfrac{1}{2}\right)ka(\cos k'\mathrm{h}a'+\lambda_k\sin k'\mathrm{h}a') & \mathrm{h}\text{ 取值同(14)}\end{cases}$$

$$v_{\mathrm{h}k}=\begin{cases}K\cos\left[\left(N+\dfrac{1}{2}\right)-\mathrm{h}\right]ka & \alpha_k=\alpha_k^{(3)},\ \alpha_k^{(4)}\\K\cos\left(N+\dfrac{1}{2}\right)ka(\cos k'\mathrm{h}a+\lambda_k\sin k'\mathrm{h}a')\\0,\end{cases}\tag{16b}$$

其中 K 由归一化条件(10)决定.

由(16)式給出的本征解代入(8)和(11)，容易得到

$$\chi^{+}(\omega)=\chi^{-*}(-\omega)=\gamma^2S\hbar\sum_k\frac{1}{\omega_k-\omega}\left|\sum_{\mathrm{h}}(u_{\mathrm{h}k}+v_{\mathrm{h}k})\right|^2,\tag{17}$$

求和是对(15)式解得的本征值相应的本征态进行. 利用熟知的关系式

$$\frac{1}{\omega_k-\omega-i\varepsilon}=P\frac{1}{\omega_k-\omega}+i\pi\delta(\omega_k-\omega)$$

(其中 P 表示主値意义下取积分)，得到磁化率的虚部和实部:

$$\begin{aligned}\chi^{\pm\prime}(\omega)&=\gamma^2S\hbar\sum_k\frac{P}{\omega_k\mp\omega}I_k,\\\chi^{\pm\prime\prime}(\omega)&=\pi\gamma^2S\hbar\sum_k I_k\delta(\omega_k\mp\omega).\end{aligned}\tag{18a}$$

显然，对負圓偏振場并无共振激发現象，而对正圓偏振場当外場頻率 ω 与系統頻譜 ω_k 相等时，会出現共振激发現象，相应的共振峯的強度因子为

$$I_k=\left|\sum_{\mathrm{h}}(u_{\mathrm{h}k}+v_{\mathrm{h}k})\right|^2.\tag{18b}$$

虽然由于数学表达式的复杂，未能以簡洁的形式給出所要的結果，但是已經完全解决了这个問題. 因为从(15)式可以給出系統的能譜(自旋波譜)，然后利用(16)式的解代入(18)式可以决定自旋波在均匀高頻磁場中的激发.

最后附带指出，只須把(15a)中引入的系数 λ_k 写作

$$\lambda_k=\frac{\cos 2N'k'a'+\alpha_k\cos(2N'+1)k'a'}{\sin 2N'k'a'+\alpha_k\sin(2N'+1)k'a'},$$

上述各結果就可以同样适用于 $M=2N'$ 的情况.

四、鉄磁薄膜的自旋波共振

本节将利用上面关于鉄磁-反鉄磁綫鏈的自旋波譜和激发的普遍結果，来討論表面的反鉄磁层(氧化层)对鉄磁薄膜自旋波共振的影响. 由于在自旋波共振实驗中，激发的自旋波的传播方向都是沿着鉄磁薄膜膜面法綫的，因而在垂直法綫的平面內，自旋都是一致取向的，它們之間沒有交換作用，所以我們可以用綫鏈模型来描写鉄磁薄膜的自旋波共

振中的自旋波激发現象．又因为实驗中观察的都是接近鉄磁自旋波能譜底部的低能激发态，对这部分激发，可以从上面的一般結果，在作了某些近似后，得到下列結論：

(1) 反鉄磁层中的自旋波是表面波．在利用(15)式决定 k 与 k' 的解时，注意到实驗条件下各量的数值大約是

$$\begin{aligned}&\omega_H' - \omega_H \approx 10^4\gamma,\\ &\omega_c(1-\cos ka) < 3\times 10^3\gamma \qquad \text{(对用 9000 MC 微波所能测量的各共振峯均满足此条件)},\\ &\omega_c \approx 10^6\text{—}10^7\gamma,\end{aligned} \tag{19a}$$

对与反鉄磁层特性有关的各参量的数值可以近似地估計为

$$\begin{aligned}&\omega_e' \sim \omega_c \qquad \text{(同一数量級)},\\ &\omega_a/\omega_e' \approx 10^{-2}.\end{aligned} \tag{19b}$$

在这样的条件下，$-(\omega_H'-\omega_H)+\omega_c(1-\cos ka)<0$，因此与鉄磁自旋波耦合的反鉄磁自旋波属于第一支，而且由(15)式解得的 k' 近似地与 k 无关，即

$$k'a' = i\left(\frac{2\omega_a}{\omega_e'}\right)^{1/2} = i\eta. \tag{20}$$

k' 是虛数，表明在反鉄磁层中自旋波是衰減的．k' 与 k 无关，則大大簡化了討論的困难，把(20)式代入 α_k 和 λ_k 的定义中，容易得到

$$\begin{aligned}&\alpha_k = \alpha_k^{(1)} \approx -1,\\ &\lambda_k = -i\,\mathrm{th}\left(M+\frac{1}{2}\right)\eta \qquad \text{(同时适用于} M=2N'-1 \text{ 和 } M=2N'\text{)}.\end{aligned} \tag{21}$$

因此本征解为

$$u_{\mathrm{h}k} = \begin{cases} K\cos\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)-\mathrm{h}\right]ka \\ K\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)ka\,\dfrac{\mathrm{ch}\left[\left(M+\frac{1}{2}\right)+\mathrm{h}\right]\eta}{\mathrm{ch}\left(M+\frac{1}{2}\right)\eta} \\ 0 \end{cases} \qquad \mathrm{h}\ \text{取值同(14)} \tag{22}$$

$$v_{\mathrm{h}k} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -K\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)ka\,\dfrac{\mathrm{ch}\left[\left(M+\frac{1}{2}\right)+\mathrm{h}\right]\eta}{\mathrm{ch}\left(M+\frac{1}{2}\right)\eta}. \end{cases}$$

的确，在反鉄磁层中，$(u_{\mathrm{h}k}\ v_{\mathrm{h}k})$ 是随着离开界面的距离而指数衰減的．

(2) 共振峯位移．把(20)，(21)代入(15a)，从(19)式对各量数值的估計，容易看出，(15a)右面的第一项較第二项是小得多的．略去第一項，得到决定 k 的条件：

$$\sin ka\,\mathrm{tg}\left(N+\frac{1}{2}\right)ka = \frac{\omega_e'}{\omega_c}\,\mathrm{sh}\,\eta\,\mathrm{th}\left(M+\frac{1}{2}\right)\eta. \tag{23}$$

取 $\omega_e'/\omega_c = 1$，$\eta = 1\times 10^{-1}$，則当 $M=5$ 时，右端的数值为 0.5×10^{-1}．把由 (23) 式解

得的 k 用共振模編号 (p) 和 φ_p 表示，

$$ka = \frac{1}{N + \frac{1}{2}}(p\pi + \varphi_p), \tag{24}$$

对 $M = 5$ 和 $M \to \infty$ 的情况解出 p 和 φ_p，列于表 1. 与两端自由的解 $\varphi_p \equiv 0$ 和一端自由而另一端完全定着的解 $\varphi_p \equiv 90°$ 比較，可以看出，对不太薄的鉄磁薄膜 ($N \approx 1000$)，

表 1　反鉄磁层对鉄磁自旋波的波数 (k) 数值的影响.

$\omega_e'/\omega_e = 1$, $\eta = 1 \times 10^{-1}$, $N = 1000$

φ_p \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$M = 5$	88.0°	84.5°	81.0°	78.0°	74.5°	71.0°	68.0°	65.0°	62.0°	59.5°	57.0°	54.5°
$M \to \infty$	89.0°	87.5°	85.5°	84.0°	82.0°	80.5°	78.5°	77.0°	75.0°	73.5°	72.0°	70.5°

即使 $M = 5$ 时也有了相当強的定着效应，特别是对于低指标(长波)部分的共振激发. 一般說来，反鉄磁层起了使表面鉄磁自旋部分定着的作用.

(3) 激发強度. 由解(22)式代入(18)式，可以得到自旋波共振峯的強度因子

$$I_k = K^2 \left\{ \sum_{h=1}^{N} \cos\left[\left(N + \frac{1}{2}\right) - h\right] ka + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos\left(N + \frac{1}{2}\right)ka}{\operatorname{ch}\left(M + \frac{1}{2}\right)\eta} \sum_{h=0}^{-M} (-1)^h \operatorname{ch}\left[\left(M + \frac{1}{2}\right) + h\right]\eta \right\}^2,$$

其中 K 滿足归一化条件

$$K^2 \left\{ \sum_{h=1}^{N} \cos^2\left[\left(N + \frac{1}{2}\right) - h\right] ka + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos^2\left(N + \frac{1}{2}\right)ka}{\operatorname{ch}^2\left(M + \frac{1}{2}\right)\eta} \sum_{h=0}^{M} (-1)^h \operatorname{ch}^2\left[\left(M + \frac{1}{2}\right) + h\right]\eta \right\} = 1.$$

实际上，以上两式括弧中的第二項都是很小的，略去这一項后得到

$$I_k = \frac{N}{2} \cdot \frac{(1 - \cos 2Nka)^2}{\left(2N \sin \frac{1}{2} ka\right)^2 \left(1 + \frac{\sin 2Nka}{2N \sin ka}\right)}. \tag{25}$$

这一公式在长波近似 ($ka \gg 1$) 和 $N \gg 1$ 的条件下与用唯象边界条件方法考虑的結果一致(見后). 在求 I_k 的过程中已經看到，在 $\sum_h (u_{hk} + v_{hk})$ 和 $\sum_h (u_{hk} \cdot u_{hk}^* - v_{hk} \cdot v_{hk}^*)$

两項中，反鉄磁部分都只有很小的貢献，因而不难理解上面結果基本上与把反鉄磁部分的影响只归結为边界条件的作法是一致的.

（4）与用唯象边界条件方法的比較．　不少作者（如文献[4]和[10]）在解释他們的实驗結果时都用了文献[6]和[7]中的唯象普遍边界条件．这种方法是从表面自旋受到某种表面各向异性能作用的假設出发，导出表面磁矩（自旋）滿足的边界条件．对上端自由，下端部分定着的系統，边界条件为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z} M_{X,Y} = 0 \qquad z = Na, \\ &b \frac{\partial}{\partial z} M_{X,Y} = M_{X,Y} \qquad z = 0. \end{aligned} \tag{26a}$$

其中 b 由作用在表面自旋上的等效的表面各向异性能决定：

$$b = \frac{2A}{K_s}. \tag{26b}$$

由（26）式解得

$$M_{X,Y} \sim \cos(N - z/a)ka, \tag{27a}$$

k 的取値滿足

$$ka \operatorname{tg} Nka = \frac{a}{b}. \tag{27b}$$

激发強度因子 I_k 为

$$I_k = \frac{N}{2} \cdot \frac{(1 - \cos 2Nka)^2}{(Nka)^2 \left(1 + \frac{\sin 2Nka}{2Nka}\right)}. \tag{27c}$$

可見在长波近似（$\sin ka \approx ka \ll 1$）和 $N \gg 1$ 的条件下，（27）式表示的結果完全与本文的結果一致.

比較（23）和（27b），可以从本文的理論結果得到与反鉄磁层作用等效的表面各向异性能

$$K_s = \frac{2A}{a} \left[\left(\frac{\omega_e'}{\omega_c}\right) \operatorname{sh} \eta \operatorname{th}\left(M + \frac{1}{2}\right) \eta \right]. \tag{28}$$

取 $A = 1 \times 10^{-6}$ erg/cm，$a = 3 \times 10^{-8}$ cm，$\omega_e'/\omega_c = 1$，$\eta = 1 \times 10^{-1}$，估計 K_s 約为 1—10 erg/cm^2．　即使很薄的反鉄磁层（如 $M = 5$），其等效的表面各向异性能也达到 3 erg/cm^2，这一估計值与 Kooi 等[4] 和 Soohoo[10] 的实驗結果非常一致.

考虑到所用模型的簡化和实际情况的复杂性，很难将理論和实驗作准确的比較．目前所作的自旋波共振实驗几乎全都用多晶薄膜为样品，因而形成的氧化层会有不同的取向，不完全滿足模型中要求反鉄磁层的易磁化軸平行綫鏈方向的假設，可能使結果的性質完全改变．此外在只有很薄的氧化层时，其晶格会受到严重的畸变，因而引起各参数的变化．由于这些和其他还不大知道的原因，上面的結果，特别是等效表面各向异性能的数値与实驗能很好的一致，已經超过預期的希望．不过无論如何总可以得到下列定性的結論：鉄磁薄膜的自旋波激发中表面反鉄磁层的存在相当于給表面鉄磁自旋一种部分定着作用，在一定条件下可以用唯象普遍边界条件的方法来处理，而且很薄的反鉄磁层（仅有数

个原子层厚）就完全足以产生很強的定着效果。

在工作过程中，得到潘孝碩先生的关心和鼓励，謹表謝意。

参 考 文 献

[1] Kittel, C., *Phys. Rev.*, **110** (1958), 1295.
[2] Seavey, M. H. and Tannenwald, P. E., *J. Appl. Phys.*, **30** (1959), 227 S.
[3] Neel, L., *Compt. Rend. Acad. Sci.* (Paris), **237** (1953), 1468.
[4] Kooi, C. F. et al., *J. Phys. Soc.*, Japan, **17**, Suppl. B-I (1962), 599.
[5] Pincus, P., *Phys. Rev.*, **118** (1960), 658.
[6] Rado, G. T. and Weertman, J. R., *J. Phys. Chem. Solids*, **11** (1959), 315.
[7] Каганов, М. И., *ЖЭТФ*, **39** (1960), 158.
[8] Тябликов, С. В., *ФТТ*, **2** (1960), 361.
[9] 蒲富恪、郑庆祺，物理学报，**18** (1962), 81.
[10] Soohoo, R. F., *J. Appl. Phys.*, **32** (1961), 148 S.

THE SPIN-WAVE SPECTRUM AND ITS EXCITATION IN A FINITE FERROMAGNETIC-ANTIFERROMAGNETIC LINEAR CHAIN

WANG DING-SHENG PU FU-CHO

ABSTRACT

The system of spins in a finite ferromagnetic-antiferromagnetic chain, coupled by exchange interaction, is investigated. The spin-wave spectrum and the intensities of its excitation are calculated. On the basis of the results obtained, the spin-wave resonance of a ferromagnetic film with a surface of antiferromagnetic oxide is discussed. The validity of the general phenomenological boundary condition is elucidated. The value estimated for the equivalent surface anisotropy energy according to our theory is found to be in fairly good agreement with experimental data.