第20卷 第10期 物 理 学 报 Vol. 20, No. 10
1964 年 10 月 ACTA PHYSICA SINICA October, 1964.

在强磁場中金属薄膜的超导电理論(II)*

——超导薄膜的临界磁場——

雷嘯霖 吴杭生

提 要

在本文中，作者根据前文[1]的理論，計算了超导薄膜的二級相变临界磁場，求出 $(\Delta t)^{3/2}$級修正項$\left(\text{磁場平行于膜的表面，}\ \Delta t = 1 - \frac{T}{T_C}\right)$. 所得結果与 Douglass-Blumberg 以及 Toxen 实驗資料符合.

一、引 言

本文是文献[1]的継續. 本文中，我們将对超导薄膜的二級相变临界磁場作进一步的討論，并将理論結果与实驗进行比較.

超导薄膜在磁場中的相变問題早已有过很多的研究. London[2] 最早根据他的理論計算了超导膜的临界磁場. 对于很薄的膜 ($d \ll \delta_0(T)$), 其結果是1)

$$\frac{H_C}{H_{CM}(T)} = \sqrt{3}\,\frac{\delta_0(T)}{d}. \tag{1}$$

以后，Гинзбург-Ландау[3] (以下簡称 ГЛ) 在他們的強場超导电理論中更加仔細地討論了这个問題. ГЛ 的理論預言: 厚度 $d < d_C \left(d_C = \frac{\sqrt{5}}{2}\delta_0\right)$ 的薄膜在磁場中的相变是二級相变，二級相变的临界磁場是

$$\frac{H_C}{H_{CM}(T)} = \sqrt{6}\,\frac{\delta_0(T)}{d}. \tag{2}$$

但近年来不少实驗[4—6]发現，对于足够薄的超导膜，不仅 London 理論的公式(1)，而且 ГЛ 理論的公式(2)也是不正确的. 例如，Douglass-Blumberg[6] (以下簡称 DB) 不久前对厚度从 1.9×10^{-6} cm 到 4.3×10^{-5} cm 的一系列 Sn 膜样品的临界磁場作了很精細的測量，他們把測量結果写成下列經驗公式 (T_C 附近):

$$H_C(\text{gauss}) = 1510\,\frac{\delta(0, d)}{2d}\,(\Delta t)^{1/2}(1 + \epsilon\Delta t), \tag{3}$$

其中 $\delta(0, d)$ 和 ϵ 是与温度无关的参量; $\Delta t = 1 - \frac{T}{T_C}$. DB 給出的 $\delta(0, d)$ 是随 d 显著变化的，当 $d = \infty$ 时，$\delta(0, d) = 5.1 \times 10^{-6}$ cm (这是一般所接受的 $T = 0°$K 大样品 Sn 的穿透深度)，但随 d 的減少，$\delta(0, d)$ 迅速增加. 至于 ϵ, DB 只給出了其中几个样品的

---

* 1963 年 9 月 9 日收到.

1) 本文所用的符号与文献[1]相同.

結果,其数値介于 0—0.31 中間, 幷且也随 d 明显地变化.

这些結果是 ГЛ 理論所不能解释的. 因为在 ГЛ 理論中, δ_0 是大样品的穿透深度, 它不依賴于膜的厚度,因而薄膜的临界磁場只可能是 $H_C \sim d^{-1}$, 但 DB 的結果却表明 H_C 随 d 的变化要比 d^{-1} 更快. 从数字上来看, 对于薄膜, DB 测得的 $\delta(0, d)$ 的値比 ГЛ 理論中相应的量 $\delta_0(0)$ 的値要大得多. 例如, 对厚度約为 3×10^{-6} cm 的薄膜, ГЛ 理論値只有实驗値的四分之一. 至于 ϵ, 按照 ГЛ 理論 (ГЛ 理論中的参数用 Горьков 所得的公式代入),不难証明, $\epsilon = -0.75$, 这在定性上都是与实驗不符的.

由于理論和实驗的分歧, 促使很多作者[5—8]对这个問題进行了新的研究. 他們实际上意識到了理論与实驗不符的原因是由于当膜的厚度足够小 ($d < \xi_0$) 时, 卽使相当接近 T_C, $\mathbf{j}(r)$ 和 $\mathbf{A}(r)$ 的关系都是非局域的. 他們企图把 London 方程或 ГЛ 方程进行适当的修改, 希望把非局域效应引入到局域的 London 理論或者局域的 ГЛ 理論中去. 例如, Tinkham[7] 認为在薄膜的情形,方程(1)或方程(2)中的穿透深度 $\delta_0(T)$ 应当用"薄膜的有效穿透深度"

$$\delta(T, d) = \delta_0(T)\left(1 + \frac{\xi_0}{2d}\right) \tag{4}$$

来替代. DB[6] 指出, 如果方程 (2) 进行上述修改, H_C 和 d 的关系可以和实驗一致. Ittner[5] 也进行过类似的工作. 在文献[8]中, Toxen 利用 ГЛ 理論把 H_C 表示成磁矩的函数,而磁矩又用非局域的 Pippard-Schrieffer 理論[9]給出的公式計算,当把这两个完全不同的理論綜合起来以后,发現可以得到和实驗符合的結果. 但是,所有这些工作都有一个缺点,卽对 ГЛ 理論所作的修改缺乏理論根据.

在文献[1]中,我們給出了強磁場中薄膜的超导电理論, 計算了超导薄膜的二級相变临界磁場. 本文中,我們把文献[1]中的临界磁場計算作了改进, 求得包含 $(\Delta t)^{3/2}$ 修正項的临界磁場表达式(第二节). 把理論的結果和 DB[6] 以及 Toxen[7] 的实驗数据进行了比較,符合程度是令人滿意的(第三节).

二、临 界 磁 場

在文献 [1] 的第七节中,我們討論了超导薄膜在磁場中的相变問題,得到如下結論: $d < d_C$ 的超导膜在磁場中的相变是二級的1),二級相变的临界磁場由下列方程决定:

$$K - 2d = 0, \tag{5}$$

其中

$$K = |g| kT \sum_{\omega} \iint d\mathbf{l}\, dr_1 \tilde{G}^0_{\omega}(\mathbf{l}, \mathbf{r}) \tilde{G}^0_{-\omega}(\mathbf{l}, \mathbf{r}). \tag{6}$$

(6)式中的 $\tilde{G}^0_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 是磁場中的正常电子 Green 函数, 它的表示式是

$$\tilde{G}^0_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G^0_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{l} G^0_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) \frac{ie\hbar}{mc} A(l_1) \frac{\partial}{\partial l_2} G^0_{\omega}(\mathbf{l}, \mathbf{r}') +$$

$$+ \iint d\mathbf{l}\, d\mathbf{m} G^0_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) \frac{ie\hbar}{mc} A(l_1) \frac{\partial}{\partial l_2} G^0_{\omega}(\mathbf{l}, \mathbf{m}) \frac{ie\hbar}{mc} A(m_1) \frac{\partial}{\partial m_2} G^0_{\omega}(\mathbf{m}, \mathbf{r}') +$$

1) 实驗也証实了这个結論[10].

$$+\iiint d\mathbf{l}\,d\mathbf{m}\,d\mathbf{s}G^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{l})\frac{ie\hbar}{mc}A(l_1)\frac{\partial}{\partial l_2}G^0_\omega(\mathbf{l},\mathbf{m})\frac{ie\hbar}{mc}A(m_1)\frac{\partial}{\partial m_2}G^0_\omega(\mathbf{m},\mathbf{s})\times$$
$$\times\frac{ie\hbar}{mc}A(s_1)\frac{\partial}{\partial s_2}G^0_\omega(\mathbf{s},\mathbf{r}')+$$
$$+\iiiint d\mathbf{l}\,d\mathbf{m}\,d\mathbf{s}\,d\mathbf{z}G^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{l})\frac{ie\hbar}{mc}A(l_1)\frac{\partial}{\partial l_2}G^0_\omega(\mathbf{l},\mathbf{m})\frac{ie\hbar}{mc}A(m_1)\frac{\partial}{\partial m_2}G^0_\omega(\mathbf{m},\mathbf{s})\times$$
$$\times\frac{ie\hbar}{mc}A(s_1)\frac{\partial}{\partial s_2}G^0_\omega(\mathbf{s},\mathbf{z})\frac{ie\hbar}{mc}A(z_1)\frac{\partial}{\partial z_2}G^0_\omega(\mathbf{z},\mathbf{r}')+$$
$$+\cdots.$$

根据文献[1]的結果，$A(r_1)=H_0(r_1-d)+\widetilde{A}(r_1)$，而 $\widetilde{A}(r_1)$ 是和 Δ^2 成正比的．因此，对于計算二級相变临界磁場来說，可令 $\widetilde{A}(r_1)=0$，即

$$\widetilde{G}^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}')=G^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}')+\frac{ie\hbar H_C}{mc}\int d\mathbf{l}G^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{l})(l_1-d)\frac{\partial}{\partial l_2}G^0_\omega(\mathbf{l},\mathbf{r}')+$$
$$+\left(\frac{ie\hbar H_C}{mc}\right)^2\iint d\mathbf{l}\,d\mathbf{m}G^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{l})(l_1-d)\frac{\partial}{\partial l_2}G^0_\omega(\mathbf{l},\mathbf{m})(m_1-d)\frac{\partial}{\partial m_2}G^0_\omega(\mathbf{m},\mathbf{r}')+$$
$$+\left(\frac{ie\hbar H_C}{mc}\right)^3\iiint d\mathbf{l}\,d\mathbf{m}\,d\mathbf{s}G^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{l})(l_1-d)\frac{\partial}{\partial l_2}G^0_\omega(\mathbf{l},\mathbf{m})(m_1-d)\frac{\partial}{\partial m_2}G^0_\omega(\mathbf{m},\mathbf{s})\times$$
$$\times(s_1-d)\frac{\partial}{\partial s_2}G^0_\omega(\mathbf{s},\mathbf{r}')+$$
$$+\left(\frac{ie\hbar H_C}{mc}\right)^4\iiiint d\mathbf{l}\,d\mathbf{m}\,d\mathbf{s}\,d\mathbf{z}G^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{l})(l_1-d)\frac{\partial}{\partial l_2}G^0_\omega(\mathbf{l},\mathbf{m})(m_1-d)\frac{\partial}{\partial m_2}G^0_\omega(\mathbf{m},\mathbf{s})\times$$
$$\times(s_1-d)\frac{\partial}{\partial s_2}G^0_\omega(\mathbf{s},\mathbf{z})(z_1-d)\frac{\partial}{\partial z_2}G^0_\omega(\mathbf{z},\mathbf{r}')+$$
$$+\cdots. \tag{7}$$

在文献[1]中，我們把(7)代入(6)，忽略包含 H_C^4 及 H_C 更高方冪的項，求得二級相变临界磁場是

$$\frac{H_C^2}{H_{CM}^2}=3\frac{\delta_0^2(T)}{d^2}\frac{\xi_0}{d}\frac{1}{\Phi_1(\sigma)}, \tag{8}$$

$\Phi_1(\sigma)$ 是文献[1]中 (39a) 式給出的．在得到这个結果时，我們把公式中所出現的溫度因子 T 以及 $\ln\frac{T_C}{T}$ 分别用 T_C 以及 Δt 替代．由(8)給出的 H_C 是和 $(\Delta t)^{1/2}$ 成正比的．

为了解释 DB 实驗，我們需要求出准到 $(\Delta t)^{3/2}$ 項的临界磁場表达式．这时，不仅需要对所遇到的溫度因子 T 和 $\ln\frac{T_C}{T}$ 采用更准确的近似，而且需要保留 K 按 H_C 的展开式中的 H_C^4 項．准到 H_C^4 項，K 可表为

$$K=K_0+K_2+K_4, \tag{9}$$

其中

$$K_0=|g|kT\sum_\omega\iint d\mathbf{l}\,dr_1G^0_\omega(\mathbf{l},\mathbf{r})G^0_{-\omega}(\mathbf{l},\mathbf{r}),$$

$$K_2 = 2\left(\frac{ie\hbar H_C}{mc}\right)^2 |g|kT \sum_\omega \int\cdots\int d\mathbf{l}\, d\mathbf{s}\, d\mathbf{m}\, dr_1 G^0_\omega(\mathbf{l},\mathbf{r}) G^0_{-\omega}(\mathbf{l},\mathbf{s})(s_1-d)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial s_2} G^0_{-\omega}(\mathbf{s},\mathbf{m})(m_1-d)\frac{\partial}{\partial m_2} G^0_{-\omega}(\mathbf{m},\mathbf{r})+$$
$$+\left(\frac{ie\hbar H_C}{mc}\right)^2 |g|kT \sum_\omega \int\cdots\int d\mathbf{l}\, d\mathbf{s}\, d\mathbf{m}\, dr_1 G^0_\omega(\mathbf{l},\mathbf{s})(s_1-d)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial s_2} G^0_\omega(\mathbf{s},\mathbf{r}) G^0_{-\omega}(\mathbf{l},\mathbf{m})(m_1-d)\frac{\partial}{\partial m_2} G^0_{-\omega}(\mathbf{m},\mathbf{r}),$$
$$K_4 = 2\left(\frac{ie\hbar H_C}{mc}\right)^4 |g|kT \sum_\omega \int\cdots\int d\mathbf{l}\, d\mathbf{m}\, d\mathbf{s}\, d\mathbf{z}\, d\boldsymbol{\lambda}\, dr_1 G^0_\omega(\mathbf{l},\mathbf{s})(s_1-d)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial s_2} G^0_\omega(\mathbf{s},\mathbf{r}) G^0_{-\omega}(\mathbf{l},\mathbf{m})(m_1-d)\frac{\partial}{\partial m_2} G^0_{-\omega}(\mathbf{m},\mathbf{z})(z_1-d)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial z_2} G^0_{-\omega}(\mathbf{z},\boldsymbol{\lambda})(\lambda_1-d)\frac{\partial}{\partial \lambda_2} G^0_{-\omega}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{r})+$$
$$+2\left(\frac{ie\hbar H_C}{mc}\right)^4 |g|kT \sum_\omega \int\cdots\int d\mathbf{l}\, d\mathbf{m}\, d\mathbf{s}\, d\mathbf{z}\, d\boldsymbol{\lambda}\, dr_1 G^0_\omega(\mathbf{l},\mathbf{s})(s_1-d)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial s_2} G^0_\omega(\mathbf{s},\mathbf{r}) G^0_{-\omega}(\mathbf{l},\mathbf{m})(m_1-d)\frac{\partial}{\partial m_2} G^0_{-\omega}(\mathbf{m},\mathbf{z})(z_1-d)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial z_2} G^0_{-\omega}(\mathbf{z},\boldsymbol{\lambda})(\lambda_1-d)\frac{\partial}{\partial \lambda_2} G^0_{-\omega}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{r})+$$
$$+2\left(\frac{ie\hbar H_C}{mc}\right)^4 |g|kT \sum_\omega \int\cdots\int d\mathbf{l}\, d\mathbf{m}\, d\mathbf{s}\, d\mathbf{z}\, d\boldsymbol{\lambda}\, dr_1 G^0_\omega(\mathbf{l},\mathbf{s})(s_1-d)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial s_2} G^0_\omega(\mathbf{s},\mathbf{m})(m_1-d)\frac{\partial}{\partial m_2} G^0_\omega(\mathbf{m},\mathbf{r})\times$$
$$\times G^0_{-\omega}(\mathbf{l},\mathbf{z})(z_1-d)\frac{\partial}{\partial z_2} G^0_{-\omega}(\mathbf{z},\boldsymbol{\lambda})(\lambda_1-d)\frac{\partial}{\partial \lambda_2} G^0_{-\omega}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{r}).$$

在(9)式中，含有 H_C 的奇次方幂項等于零，我們已經拋去了. K_0 和 K_2 在文献[1]中計算过:

$$K_0 = 2d\left[|g|N(0)\ln\frac{T_C}{T}+1\right], \tag{10}$$

$$K_2 = -|g|N(0)\frac{31\zeta(5)}{2\pi\gamma}\frac{e^2\xi_0 H_0^2 d^4}{\hbar^2 c^2}\frac{T_C}{T}\Phi_1(\sigma), \tag{11}$$

其中 $\gamma = \ln C$，C 是 Euler 常数，为 0.5772. 为了方便，我們将 $\Phi_1(\sigma)$ 的表达式重新写出:

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{32}{31\zeta(5)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Phi_0\left(\frac{\sigma}{2l+1}\right)}{(2l+1)^5},$$
$$\Phi_0\left(\frac{\sigma}{2l+1}\right) = \frac{16}{\pi^3}\left[G\left(\frac{\sigma}{2l+1}\right)-\frac{\sigma}{2l+1}F\left(\frac{\sigma}{2l+1}\right)\right],$$
$$G(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{(2n+1)\eta}, \tag{12}$$

$$F(\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left[1-(2n+1)\eta\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{(2n+1)\eta}\right],$$

$$\sigma=0.364\,\frac{2d}{\xi_0}\frac{T}{T_C},$$

$$\xi_0=\frac{\gamma}{\pi^2}\frac{\hbar v_0}{kT_C}\approx 0.182\,\frac{\hbar v_0}{kT_C}.$$

函数 $F(\eta)$ 和 $G(\eta)$ 在 $\eta<1$ 时可以表示成（見附录）

$$\begin{aligned}F(\eta)&=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\eta}+\frac{1}{2}(C+\ln 2-1)+\frac{\eta^2}{12}+O(\eta^4),\\ G(\eta)&=\frac{\pi^3}{16}-\frac{1}{2}\eta\ln\frac{1}{\eta}-\frac{1}{2}(C+\ln 2+1)\eta+\frac{1}{36}\eta^3+O(\eta^5).\end{aligned}\tag{13}$$

因而，在 $\sigma<1$ 时，$\Phi_1(\sigma)$ 可近似表为

$$\Phi_1(\sigma)=\frac{32}{31\zeta(5)}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)^5}-\frac{16\sigma}{\pi^3}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)^6}\left[\ln\frac{2l+1}{\sigma}+(C+\ln 2)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cdots\right]\right\}.$$

上式大括号中第一个求和很容易算出，而第二个求和，由于本身就比第一个求和的貢献小，而且收斂得更快，取第一项已足够了．于是我們得到，$\sigma<1$ 时，

$$K_2=-|g|N(0)\,\frac{31\zeta(5)e^2\xi_0H_0^2d^4}{2\pi\gamma\hbar^2c^2}\left(\frac{T_C}{T}\right)\left\{1-0.185\,\frac{2d}{\xi_0}\left[2.29+\ln\frac{\xi_0}{2d}+\ln\frac{T_C}{T}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cdots\right]\right\}.\tag{14}$$

在 T_C 附近，按 $\Delta t=1-\dfrac{T}{T_C}$ 展开到 Δt 的一級，K_2 可表示成

$$K_2=-|g|N(0)\,\frac{31\zeta(5)\ e^2\xi_0H_0^2d^4}{2\pi\gamma\quad\hbar^2c^2}\,[1-\mu(x)][1+[1+\epsilon_1(x)]\Delta t],\tag{15}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\mu(x)&=0.185\,x\left(2.29+\ln\frac{1}{x}+\cdots\right),\\ \epsilon(x)&=\frac{0.185\,x\left(1.29+\ln\dfrac{1}{x}+\cdots\right)}{[1-\mu(x)]},\\ x&=\frac{2d}{\xi_0}.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

将 $\ln\dfrac{T_C}{T}$ 按 Δt 展开，到 Δt 的二級，K_0 可写作

$$K_0=2d\left\{1+|g|N(0)\Delta t\left(1+\frac{\Delta t}{2}\right)\right\}.\tag{17}$$

至于积分 K_4，可以用类似于文献[1]中計算 K_2 的方法求得．經过略为繁瑣的計算后，我們得到在 $\sigma\ll 1$ 时，

$$K_4 = |g|N(0)\frac{B}{\pi\gamma^3}\left(\frac{e}{\hbar c}\right)^4 \xi_0^3 H_0^4 d^6\left(\frac{T_C}{T}\right)^3. \tag{18}$$

其中 B 是个常数,經过計算, $B \approx 12.5$.

将 (15)—(18) 代入(9)和(5),得到定薄膜二級相变临界磁場 H_C 的方程:

$$a_1 + a_2H_C^2 + a_3H_C^4 = 0, \tag{19}$$

其中

$$a_1 = \Delta t\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\right),$$

$$a_2 = -\frac{31\zeta(5)}{4\pi\gamma}\frac{e^2\xi_0 d^3}{\hbar^2c^2}[1-\mu(x)][1+[1+\epsilon_1(x)]\Delta t], \tag{20}$$

$$a_3 = \frac{B}{2\pi\gamma^3}\left(\frac{e}{\hbar c}\right)^4 \xi_0 d^5.$$

从(19)立即可解出 H_C:

$$H_C = \left(\frac{\hbar c}{e}\right)\frac{2.36}{\xi_0^{1/2}d^{3/2}[1-\mu(x)]^{1/2}}(\Delta t)^{1/2}(1+\epsilon\Delta t), \tag{21}$$

其中

$$\epsilon = \epsilon_2 - \frac{\epsilon_1}{2} - 0.25,$$

$$\epsilon_2 = \frac{0.0136B}{x[1-\mu(x)]^2} \approx \frac{0.163}{x[1-\mu(x)]^2}. \tag{22}$$

ϵ_1 和 $\mu(x)$ 的定义見 (16) 式. 注意到 $\sigma < 1$ 时, $\Phi(\sigma) = 1 - \mu\left(\frac{2d}{\xi_0}\right)$, 易見 (21) 式中的 $(\Delta t)^{1/2}$ 級項和文章[1]所給出的 H_C [見本文公式(8)] 是一致的.

三、理論和实驗比較

上一节中,我們求得了超导薄膜在 T_C 附近的二級相变临界磁場(21), 这个表达式至少对于厚度滿足条件

$$\sigma = 0.364\frac{2d}{\xi_0} < 1 \tag{23a}$$

以及

$$0.36p_0(2d)\frac{2d}{\xi_0} \gg 1 \tag{23b}$$

的膜是适用的 [条件 (23b) 在文章 [1] 中討論过]. 对于 Sn, 由 $\xi_0 \sim 2.3 \times 10^{-5}$ cm, $v_0 \sim 0.65 \times 10^8$ cm/sec[11], 由(23)估計得: 10^{-6} cm $\ll 2d < 6.3 \times 10^{-5}$ cm[1)]. 在 DB 实驗中, Sn 膜的厚度从 1.9×10^{-6} cm 到 4.3×10^{-5} cm, 正是(21)式可以应用的范围.

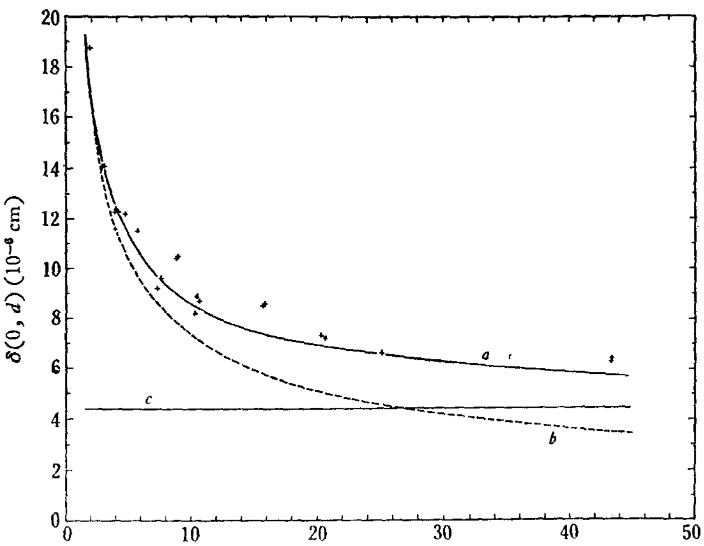
为了和 DB 实驗比較,我們把(21)表成(3)的形式. 显然, (3) 中的参量 $\delta(0, d)$ 和 ϵ 的理論表达式分别由

---

1) 实际上只要 2×10^{-6} cm $< 2d < 6.3 \times 10^{-5}$ cm, 公式(21)就可以应用.

$$\delta(0,\ d)=\frac{2.36\hbar c}{1510\,e\xi_0^{1/2}(2d)^{1/2}[1-\mu(x)]^{1/2}}\ ^{1)} \tag{24}$$

和(22)給出. 在图 1 中画出了选取 $\xi_0 = 2.0 \times 10^{-5}$ cm 根据 (24) 計算的 $\delta(0,\ d)$ 的曲綫 (a) 以及 DB 的实驗点. 为了对比，还同时画出了从 ΓЛ 理論的結果 (2)，利用 $H_{CM} = 1.74H_{CM}(0)\,\Delta t$ 和 $\delta_0 = \delta_L(0)/\sqrt{2\Delta t}$，选取 $H_{CM}(0) = 307$ gauss[12] 和 $\delta_L(0) = 3.55 \times 10^{-6}$ cm 所得到的 $\delta(0,\ d)$ 值，它是一条水平綫 (c). 可以看到，本文結果与 DB 实驗符合



厚度 $2d$ (10^{-6} cm)

图 1. Sn 膜的 $\delta(0,\ d)$ 的理論值和 DB 实驗的比較
"+"代表 DB 实驗点

得很好，特别应当注意到我們是将純粹的理論值与实驗的絕对值而不是約化值比較. 我們所用的 $\xi_0 = 2.0 \times 10^{-5}$ cm 与文献 [11] 所給的 $\xi_0 = 2.3 \times 10^{-5}$ cm 以及 Faber-Pippard 所給的 $\xi_0 = 2.1 \times 10^{-5}$ cm[13] 是合理地一致的.

順便，我們想指出，所以能够使理論和实驗一致，(24)中的因子 $\Phi_1^{1/2}(\sigma)=(1-\mu(x))^{1/2}$ 起了重要的作用. 为了說明这一点，在图 1 中我們用虛綫(b)标出了按公式

$$\delta(0,\ d)=\frac{2.36\hbar c}{1510\,e\xi_0^{1/2}\,(2d)^{1/2}} \tag{24a}$$

計算的 $\delta(0,\ d) \sim d$ 曲綫 (取 $\xi_0 = 2.0 \times 10^{-5}$ cm)，它只有在 d 非常小的时候才与实驗符合. 而且，我們指出，即使調节 ξ_0 的数值也不能与实驗一致. 由此可見，与 (24a) 相当的薄膜临界場公式 ($H_C \sim d^{-3/2}$) 只有当膜的厚度非常小时才成立.

临界磁場 H_C 的 $(\Delta t)^{3/2}$ 項系数 ϵ 的理論曲綫[根据公式(22)，也取 $\xi_0 = 2.0 \times 10^{-5}$ cm] 以及 DB 的实驗資料画在图 2. 可以看出，本文所給的 ϵ 值是随 d 显著变化的，当 d 減少

---

1) 更一般些，从公式(8)可得

$$\delta(0,\ d)=\frac{2.36\hbar c}{1510\,e\xi_0^{1/2}\,(2d)^{1/2}}\,\frac{1}{\Phi_1(\sigma)},$$

此公式对于 $2d \gg 2d^*$ 的膜都是对的. 計算表明，在 DB 实驗所用的膜的厚度范围内，它和(24)式一致.

时，ϵ 迅速增加. 这些特点与 DB 实验定性趋势上是一致的. 但是，从定量上看，本文給出的 ϵ 的数值比 DB 实验值要大.

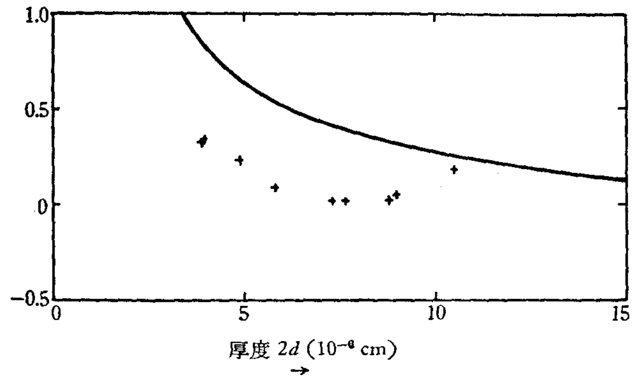


图 2. Sn 膜的 ϵ 值随厚度 $2d$ 的变化
"+" 代表 DB 实验点

临界磁場的 $(\Delta t)^{3/2}$ 級項是很小的，它对临界磁場絕对值的貢献一般都在10%以下. 因此，DB 从他們的临界場实驗值定 ϵ 可能有比較大的誤差. 另外，也应当提到，本文的理論沒有考虑杂质和应力的影响，并且假定能隙是常数. 这些因素对临界場的 $(\Delta t)^{3/2}$ 級項的影响也还有待进一步研究. 但是，上述定性結果至少說明了两点：(1)場的四次方項对 ϵ 的貢献是重要的；(2)薄膜的非局域效应在决定 ϵ 随 d 的变化方面起决定的作用. 正是由于在我們的計算中不仅包含了場的四次方項，而且考虑了膜的非局域效应，才得到 ϵ 随 d 減少而迅速增加的結果. 如果用 Горьков 的局域近似来計算，即使包含場的四次方項，所得的 ϵ 也不随 d 变化.

为了进一步检驗公式 (21)，我們还将它和 Toxen[4] 对 In 膜的临界磁場測量結果作了比較. 在文献 [8] 中，Toxen 在图上給出了他測量的 In 膜临界磁場 H_C 和大样品 In 的临界磁場 H_{CM} 的比在 $T = 0.9T_C$ 以及 $T = 0.95T_C$ 的实驗点. 为了从所得的薄膜临界磁場理論公式 (21) 算出 $\frac{H_C}{H_{CM}}$，我們利用 Muench[12] 对大样品 In 的临界磁場資料. 根据 Muench 所給的經驗公式，在 T_C 附近，大样品 In 的临界磁場可表为

$$H_{CM} = 530\Delta t(1 - 0.395\Delta t). \quad (25)$$

由(21)和(25)得

$$\frac{H_C}{H_{CM}} = \frac{2.36}{530}\frac{\hbar c}{e}\frac{(\Delta t)^{-1/2}}{\xi_0^{1/2}d^{3/2}[1-\mu(x)]^{1/2}} \times \times [1 + (\epsilon + 0.4)\Delta t]. \quad (26)$$

根据 (26)，我們計算了在二級相变范围的 $\frac{H_C}{H_{CM}}$. 为了理論与实驗很好地符合，应当选取 $\xi_0 = 2.3 \times 10^{-5}\,\text{cm}$，这和 Toxen 自己的工作所要求的 $\xi_0 = 2.6 \times 10^{-5}\,\text{cm}$ 也是一致的.

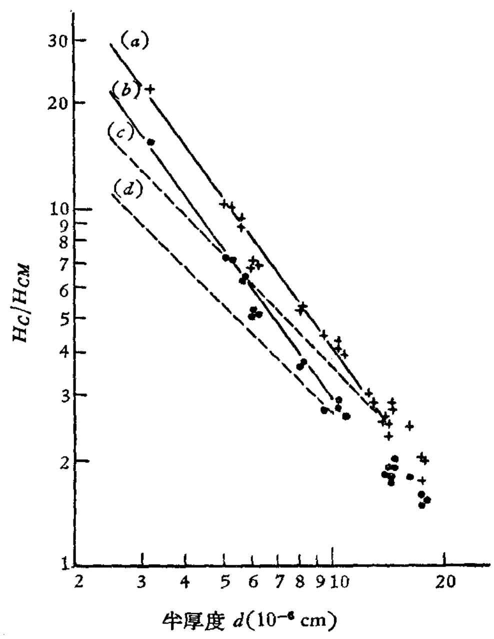


图 3. In 膜的 $\frac{H_C}{H_{CM}}$ 值随 d 的变化以及 Toxen 的实驗点

(a) 为本文理論曲綫 $\Delta t = 0.05$;
(b) 为本文理論曲綫 $\Delta t = 0.10$;
(c) 为 ГЛ 理論曲綫 $\Delta t = 0.05$;
(d) 为 ГЛ 理論曲綫 $\Delta t = 0.10$;
"+" 为 Toxen 实驗点，$\Delta t = 0.05$;
"·" 为 Toxen 实驗点，$\Delta t = 0.10$

在图 3 中我們画出了 $\Delta t = 0.10$ 和 $\Delta t = 0.05$ 时 $\frac{H_C}{H_{CM}} \sim d$ 的两条理論曲綫（理論曲綫只画出了二級相变区域的情形）以及从 Toxen 的图上所讀出的实験点．图中还画出了 ГЛ 理論的結果(2)．利用 $\delta_0 = \frac{\delta_L(0)}{\sqrt{2\Delta t}}$，取 $\delta_L(0) = 3.5 \times 10^{-6}$ cm[8] 在 $\Delta t = 0.10$ 和 $\Delta t = 0.05$ 时的曲綫以作比較．本文的理論值与 Toxen 实験值的符合也是令人滿意的．

附录　函数 $F(\eta)$ 和 $G(\eta)$ 在 $\eta < 1$ 时的展开式

函数 $F(\eta)$ 和 $G(\eta)$ 的定义如下：

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left[1 - (2n+1)\eta\, \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{(2n+1)\eta}\right], \tag{A.1}$$

$$G(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\, \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{(2n+1)\eta}. \tag{A.2}$$

求它們在 η 大时的展式只要对 $\frac{1}{\eta}$ 作 Taylor 展开卽可；我們略去这个极其簡单的运算．在这里，我們只討論 $F(\eta)$ 和 $G(\eta)$ 在 η 小时的展开問題．

$F(\eta)$ 和 $G(\eta)$ 在 η 小时的展开可以用不同的方法得到，現只介紹其中的一种．

先討論 $F(\eta)$．令 $\lambda = \frac{\pi}{\eta}$，則

$$F(\eta) \equiv F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{(2n+1)\pi}\left[1 - \frac{(2n+1)\pi}{\lambda}\, \mathrm{tg}^{-1}\frac{\lambda}{(2n+1)\pi}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{i}{4} \oint_{\Gamma_n} \frac{\mathrm{tg}\frac{z}{2}}{z}\left(1 - \frac{z}{\lambda}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{\lambda}{z}\right) dz. \tag{A.3}$$

其中，多值函数 $\mathrm{tg}^{-1}\frac{\lambda}{z}$ 的单值分支是这样确定的，卽在 z 平面上作連接 $i\lambda$ 与 $-i\lambda$ 的割縫，并規定，当 $z = +\infty$ 时，$\arg\left(\frac{z+i\lambda}{z-i\lambda}\right) = 0$；又 $\{\Gamma_n\}$ 是如图 4 所示的矩形围道序列．

对于上述規定的 $\mathrm{tg}^{-1}\frac{\lambda}{z}$ 的单值分支，很易証明，当 $|z|$ 大时：

$$\left(1 - \frac{z}{\lambda}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{\lambda}{z}\right) \sim \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{z}\right)^2 + 0\left(\frac{\lambda}{z}\right)^4.$$

而且，不难看出，在围道序列 $\{\Gamma_n\}$ 上，$\mathrm{tg}\frac{z}{2}$ 是有界的．因此，当 $n \to \infty$ 时，BC，CD 和 DA 上积分的貢献将趋于零，只剩下沿 AB 的积分．于是 (A.3) 可化为

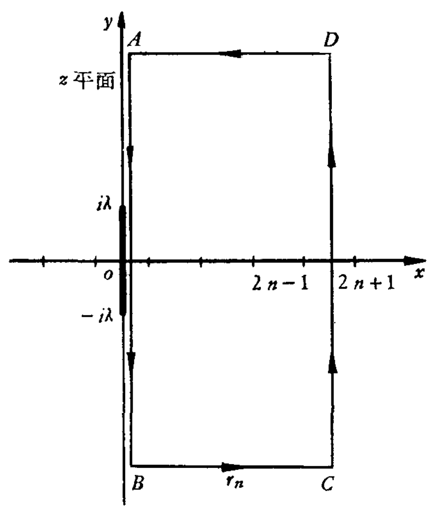


图 4．围道 Γ_n
图中連接 $i\lambda$ 与 $-i\lambda$ 的粗黑綫表示割縫

$$F(\lambda)=\frac{i}{4}\int_{i\infty}^{-i\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{z}\left(1-\frac{z}{\lambda}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\lambda}{z}\right)dz, \tag{A.4}$$

积分路径是沿着虚轴,在割縫的右岸. 注意到所規定的 $\operatorname{tg}^{-1}\frac{\lambda}{z}$ 的单值分支沿虚軸的特性,显然有

$$F(\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^\lambda\frac{\operatorname{th}\frac{y}{2}}{y}dy-\frac{1}{2\lambda}\int_0^\lambda\operatorname{th}\frac{y}{2}\operatorname{th}^{-1}\frac{y}{\lambda}dy-\frac{1}{2\lambda}\int_\lambda^\infty\operatorname{th}\frac{y}{2}\left(\operatorname{th}^{-1}\frac{\lambda}{y}-\frac{\lambda}{y}\right)dy. \tag{A.5}$$

下面分别計算 (A.5) 中每一个积分. (A.5) 中的第一項

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^\lambda\frac{\operatorname{th}\frac{y}{2}}{y}dy=\frac{1}{2}\ln\lambda\operatorname{th}\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}\int_0^\infty\frac{\ln y}{\operatorname{ch}^2\frac{y}{2}}dy+\frac{1}{2}\int_\lambda^\infty\ln y\left(\operatorname{th}\frac{y}{2}\right)'dy,$$

利用展式

$$\operatorname{th}\frac{y}{2}=1+2\sum_{n=1}^\infty(-)^n e^{-ny}\qquad(y>0), \tag{A.6}$$

进行逐項积分(这时逐項积分是允許的),得到

$$I_1=\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda}{\pi}+\frac{1}{2}(C+\ln 2)+\sum_{n=1}^\infty(-)^n E_i(-n\lambda), \tag{A.7}$$

拋去 $0(e^{-\lambda})$ 以上的項,我們有

$$I_1=\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda}{\pi}+\frac{1}{2}(C+\ln 2)+0(e^{-\lambda}). \tag{A.8}$$

(A.5) 中的第二項是

$$I_2=-\frac{1}{2\lambda}\int_0^\lambda\operatorname{th}\frac{y}{2}\operatorname{th}^{-1}\frac{y}{\lambda}dy=-\frac{1}{2\lambda}\int_0^\lambda\operatorname{th}^{-1}\frac{y}{\lambda}dy-$$
$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^\infty(-)^n\int_0^\lambda e^{-ny}\operatorname{th}^{-1}\frac{y}{\lambda}dy. \tag{A.9}$$

利用展式

$$\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{y}{\lambda}\right)=\sum_{s=0}^\infty\frac{1}{(2s+1)}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{2s+1}\qquad(y<\lambda), \tag{A.10}$$

逐項积分(不难証明逐項积分是允許的),(A.9) 化为

$$I_2=-\frac{1}{2}\sum_{s=0}^\infty\frac{1}{(2s+1)(2s+2)}-\sum_{n=1}^\infty(-)^n\sum_{s=0}^\infty\frac{1}{(2s+1)(n\lambda)^{2s+2}}\{(2s+1)!$$
$$-e^{-n\lambda}[(n\lambda)^{2s+1}+2s(n\lambda)^{2s}+\cdots+(2s+1)!]\}. \tag{A.11}$$

忽略 $0\left(\frac{1}{\lambda^{2N}}\right)$ 以及 $0(e^{-\lambda})$ 以上的小量,則

$$I_2=-\frac{1}{2}\sum_{s=0}^\infty\frac{1}{(2s+1)(2s+2)}+\sum_{s=0}^{N-1}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{2s+2}\frac{(2^{s+1}-1)}{(2s+1)(2s+2)}|B_{2s+2}|+$$
$$+0\left(\frac{1}{\lambda^{2N+2}},e^{-\lambda}\right), \tag{A.12}$$

其中 B_k 是伯努利数，$B_2 = \frac{1}{6}$，$B_4 = -\frac{1}{30}$，$\cdots$. 对于 (A.5) 右边的第三个积分

$$I_3 = -\frac{1}{2\lambda}\int_\lambda^\infty \mathrm{th}\,\frac{y}{2}\left(\mathrm{th}^{-1}\frac{\lambda}{y} - \frac{\lambda}{y}\right) dy$$

可以按同样的方式将它表作級数形式

$$I_3 = -\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2s(2s+1)} - \sum_{n=1}^{\infty}(-)^n e^{-n\lambda}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2s(2s+1)}\left[1 - \frac{n\lambda}{(2s-1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n\lambda)^2}{(2s-1)(2s-2)} - \cdots + \frac{(n\lambda)^{2s}}{(2s-1)!}\right] \tag{A.13}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2s(2s+1)} + 0(e^{-\lambda}). \tag{A.14}$$

总結以上計算，可得

$$F(\lambda) = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda}{\pi} + \frac{1}{2}(C + \ln 2 - 1) +$$
$$+ \sum_{s=0}^{N-1}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{2s+2}\frac{(2^{2s+1}-1)|B_{2s+2}|}{(2s+1)(2s+2)} + 0\left(\frac{1}{\lambda^{2N+2}}, e^{-\lambda}\right), \tag{A.15}$$

写出这个表达式时还利用等式 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = 1$. 于是在 $\eta < 1$ 时，

$$F(\eta) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\eta} + \frac{1}{2}(C + \ln 2 - 1) + \sum_{s=0}^{N-1}\frac{(2^{2s+1}-1)|B_{2s+2}|}{(2s+1)(2s+2)}\eta^{2s+2} +$$
$$+ 0(\eta^{2N+2}, e^{-\frac{\pi}{\eta}}). \tag{A.16}$$

这就是所要求的展式.

用完全类似的办法，可以求出 $\eta < 1$ 时 $G(\eta)$ 的展式：

$$G(\eta) = \frac{\pi^3}{16} - \frac{\eta}{2}\ln\frac{1}{\eta} - \frac{\eta}{2}(C + \ln 2 + 1) + \sum_{s=1}^{N-1}\frac{(2^{2s-1}-1)|B_{2s}|}{2s(2s+1)}\eta^{2s+1} +$$
$$+ 0(\eta^{2N+3}, e^{-\frac{\pi}{\eta}}). \tag{A.17}$$

我們写出 (A.15) 和 (A.16) 的前几項

$$F(\eta) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\eta} + \frac{1}{2}(C + \ln 2 - 1) + \frac{1}{12}\eta^2 + \frac{7}{360}\eta^4 + 0(\eta^6, e^{-\frac{\pi}{\eta}}), \tag{A.18}$$

$$G(\eta) = \frac{\pi^3}{16} - \frac{\eta}{2}\ln\frac{1}{\eta} - \frac{\eta}{2}(C + \ln 2 + 1) + \frac{1}{36}\eta^3 + 0(\eta^5, e^{-\frac{\pi}{\eta}}). \tag{A.19}$$

参　考　文　献

[1] 吳杭生、雷嘯霖，物理学报，**20** (1964), 873.
[2] London, F., Superfluids, vol. 1.
[3] Гинзбург, В. Л., Ландау, Л. Д., *ЖЭТФ*, **20** (1950), 1064.
[4] Toxen, A. M., *Phys. Rev.*, **123** (1961), 442.
[5] Ittner, W. B., *Phys. Rev.*, **119** (1960), 1591.

[6] Douglass, D. H., Blumberg, R. H., *Phys. Rev.*, **127** (1962), 2038.
[7] Tinkhm, M., *Phys. Rev.*, **110** (1958), 26.
[8] Toxen, A. M., *Phys. Rev.*, **127** (1962), 382.
[9] Schrieffer, J. R., *Phys. Rev.*, **106** (1957), 47.
[10] Douglass, D. H., *Phys. Rev. Letters*, **6** (1961), 346.
[11] Bardeen, J., Schrieffer, J. R., Progress in Low Temp. Phys. (edited by Gorter. C. J. North-Holland Publishing Company, 1961), **3**, p. 243.
[12] Muench, N. L., *Phys. Rev.*, **99** (1955), 1814.
[13] Bardeen, J., Encyclopedia of Physics (edited by Flügge. S., Spring-Verlag, 1956), **15**, p. 318.

ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ ТОНКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЁНКИ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ (II)

——Критическое магнитное поле сверхпроводяшей плёнки——

Лэй Сяо-линь У Хан-шэн

Резюме

В данной работе рассчитано критическое магнитное поле сверхпроводяшей плёнки при фазовом переходе второго рода на основе теории, предложенной в предыдущей статье, и получен дополнительный член порядка $(\Delta t)^{\frac{3}{2}}$ (магнитное поле параллельно поверхности плёнки, $\Delta t = 1 - \frac{T}{T_C}$). Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными.