第20卷 第3期
1964年3月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 20, No. 3
March, 1964

Møller 的引力場能量公式的另一推导*

張 金 如

一、引 言

几年前，Møller 曾經討論过引力場的能量問題[1,2]，他指出：爱因斯坦的能量-动量准张量密度 Θ^{α}_{β} 是値得商榷的，因为在有限空間区域 Ω 內的积分

$$E_{\Omega} = \int_{\Omega} \Theta^4_4 d^3x,$$

对純空間变換

$$\bar{x}^i = f^i(x^k), \quad \bar{x}^4 = x^4, \quad i, k = 1, 2, 3 \tag{1}$$

不能保持不变，其中[3]

$$\Theta^{\alpha}_{\beta} = \sqrt{-g}\, T^{\alpha}_{\beta} + \frac{1}{2\kappa}\left[\delta^{\alpha}_{\beta}\mathfrak{L} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\beta}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha}}\right], \tag{2}$$

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{g}^{\alpha\beta}[\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}],$$

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}, \qquad \mathfrak{g}^{\alpha\beta}_{\mu} = \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}; \tag{3}$$

而 T^{α}_{β} 表物質的能量-动量张量，即

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} \qquad \alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Møller 建議了另一种能量-动量准张量密度 $\mathfrak{T}^{\alpha}_{\beta}(M)$[1]：

$$\mathfrak{T}^{\alpha(M)}_{\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \chi^{\alpha\mu}_{\beta}.$$

$$\chi^{\alpha\rho}_{\beta} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}}\right) g^{\alpha\nu} g^{\rho\mu} \qquad \rho = 1, 2, 3, 4, \tag{4}$$

而积分

$$\int_{\Omega} \mathfrak{T}^{4(M)}_{4} d^3x$$

具有对純空变換不变的性質. 正是由于这种不变性，所以在 Møller 的理論中，可以意义明确地談到引力場能量定域空間的概念，談到非封閉系統中能量分布及能流的概念. 引力波就是一个非封閉系統的重要例子.

Møller 証明了[2]：他的公式可以通过 Lagrange 密度

$$V = \sqrt{-g}\, R$$

用无穷小变換的方法推导出来. 然而，在进行这种推导时，引力場是作为非 Lagrange 系統

---

* 1962年11月9日收到；1963年8月5日收到修改稿.

来处理的，这就是：作用积分不仅是場量一阶微商的泛函，而且还是二阶微商的泛函．可是，各种熟知的場（Maxwell 場、Dirac 場、介子場）都是被当做 Lagrange 系統来处理的，亦即：其作用积分乃場量一阶微商的泛函，为什么引力場单单要例外？这种情况难免令人費解．

其实，采用

$$V = \sqrt{-g}\, R$$

把引力場当做 Lagrange 系統来处理仍然是可能的（Palatini 方法[3]）．由此可以引出一个守恆量 $\mathfrak{T}_\beta^\alpha$，能够証明这个守恆量 $\mathfrak{T}_\beta^\alpha$ 与 Møller 所建議的 $\mathfrak{T}_\beta^{\alpha(M)}$ 完全等同．

二、Palatini 方法与守恆定律

取 Lagrange 密度为

$$V = \sqrt{-g}\, R,$$

Palatini 的变分方法在于把 $g_{\mu\nu}$ 及 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ 当做互相独立的場量来处理，其中

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}.$$

令

$$\delta \int V d^4x = 0,$$

則得[3]

$$g^{\alpha\beta};_{\mu} = 0,$$

及

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

式中記号"；"表示协变微商，即

$$g_{\mu\nu;\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\alpha} - g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\alpha}.$$

今

$$R = g^{\mu\nu}\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - g^{\mu\nu}\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - g^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\nu},$$

則按照熟知的方法，可求得正則能量-动量准张量密度为

$$\sqrt{-g}\, t^A_B = \frac{1}{2\kappa}\left[\frac{\partial V}{\partial \Gamma^\lambda_{\rho\sigma,A}}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma,B} - \delta^A_B V\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\{g^{\mu\nu}[\delta^\alpha_\lambda\delta^\nu_\rho\delta^\sigma_\alpha\delta^\mu_A - \delta^\alpha_\lambda\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma\delta^A_\alpha]\Gamma^\lambda_{\rho\sigma,B} - \delta^A_B R\} =$$

$$= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}[g^{\rho A}\Gamma^\lambda_{\rho\lambda,B} - g^{\rho\sigma}\Gamma^A_{\rho\sigma,B}] - \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\delta^A_B R,$$

其中 κ 为引力常数，$\rho, \sigma, \lambda, A, B = 1, 2, 3, 4$，而

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu,A} = \frac{\partial}{\partial x^A}\Gamma^\alpha_{\mu\nu},$$

即

$$\sqrt{-g}\, t^\alpha_\beta = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\left[g^{\mu\alpha}\frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - g^{\mu\nu}\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - \delta^\alpha_\beta R\right]. \tag{5}$$

所求得的 t^{α}_{β} 在自由引力場

$$R_{\mu\nu} = 0$$

的情况下,显然满足守恆方程

$$\frac{\partial \sqrt{-g} t^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0.$$

对于物质內部的引力場

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu},$$

則守恆方程为

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} [\sqrt{-g}\, T^{\alpha}_{\beta} + \sqrt{-g}\, t^{\alpha}_{\beta}] = 0,$$

其中 T^{α}_{β} 为物質的能量-动量张量. 事实上,若注意[1)]

$$\frac{\partial V}{\partial g_{\mu\nu}} = -\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) = \kappa \sqrt{-g}\, T^{\mu\nu},$$

与协变微商

$$g^{\mu\nu};\, \alpha = 0$$

及

$$(\sqrt{-g} T^{\alpha}_{\beta})_{;\,\alpha} = \frac{\partial \sqrt{-g}\, T^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \sqrt{-g}\, T^{\alpha}_{\beta} \Gamma^{\nu}_{\alpha\nu} - \sqrt{-g}\, T^{\alpha}_{\rho} \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} + \\ + T^{\rho}_{\beta} \Gamma^{\alpha}_{\rho\alpha} = 0,$$

則有

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}[\sqrt{-g}\, T^{\alpha}_{\beta} + \sqrt{-g}\, t^{\alpha}_{\beta}] = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}[\sqrt{-g}\, T^{\alpha}_{\beta}] + \\ + \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left[\frac{\partial V}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\alpha}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta} V\right] = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} [\sqrt{-g} T^{\alpha}_{\beta}] + \frac{1}{2\kappa}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial V}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\alpha}}\right) - \\ - \frac{\partial V}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}\right] \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\beta} - \frac{\partial V}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\right\} \\ = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}[\sqrt{-g}\, T^{\alpha}_{\beta}] - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} = (\sqrt{-g} T^{\alpha}_{\beta})_{;\,\alpha} = 0.$$

現在定义引力場的能量-动量准张量密度 $\mathfrak{T}^{\alpha}_{\beta}$ 为

$$\mathfrak{T}^{\alpha}_{\beta} = 2[\sqrt{-g}\, T^{\alpha}_{\beta} + \sqrt{-g}\, t^{\alpha}_{\beta}], \tag{6}$$

則 $\mathfrak{T}^{\alpha}_{\beta}$ 滿足守恆方程

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \mathfrak{T}^{\alpha}_{\beta} = 0.$$

对孤立系統而言,积分

$$P_{\alpha} = \int \mathfrak{T}^{4}_{\alpha} d^3x$$

可以被解释为 4-动量. 其次还可以証明: $\mathfrak{T}^{4}_{4}$ 在有限空間 Ω 內的积分

1) 視 $g^{\mu\nu}$ 及 $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ 为互相独立的量.

$$E_\Omega = \int_\Omega \mathfrak{T}_4^4 d^3x$$

是純空間变换(1)的不变量．为此，只須証明 $\mathfrak{T}_4^\alpha$ 在变换(1)下是一个矢量密度就够了．由(5)，(6)可知，倘若 $\Gamma^\alpha_{\mu\nu,4}$ 在变换(1)下是一个三阶张量，則 $\mathfrak{T}_4^\alpha$ 必是一矢量密度，然而

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\nu}\right),$$

对(1)而言，則

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^4} = \frac{\partial \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^4} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu}\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}}{\partial x^4}.$$

故在变换(1)下，$\Gamma^\alpha_{\mu\nu,4}$ 的确是一个三阶张量．

由(5)，(6)可知，在恆定引力場的情况下，$\mathfrak{T}_4^4$ 变得特别簡单：

$$\mathfrak{T}_4^4 = 2\sqrt{-g}T_4^4 - \frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}\,R = \sqrt{-g}[T_4^4 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3],$$

对孤立系統而言，应用 Tolman 的結果[4]，則

$$\int \mathfrak{T}_4^4 d^3x = m.$$

这表明公式(6)中的系数选择得合适．

三、$\mathfrak{T}_\beta^\alpha$ 与 $\mathfrak{T}_\beta^{\alpha(M)}$ 等同的証明

本节将証明：上节所选用的守恆量 $\mathfrak{T}_\beta^\alpha$ 与 Møller 所建議的 $\mathfrak{T}_\beta^{\alpha(M)}$ [見公式(4)] 完全等同．Møller 曾經在下述条件下証明了他的 $\mathfrak{T}_\beta^{\alpha(M)}$ 的唯一性[1]．这些条件是：首先，$\mathfrak{T}_\beta^{\alpha(M)}$ 可以由某个超势 (super-potential) $\chi_\rho^{\alpha\beta} = -\chi_\rho^{\beta\alpha}$ 推导出来：

$$\mathfrak{T}_\beta^{\alpha(M)} = \frac{\partial}{\partial x^\rho}\chi_\beta^{\alpha\rho}.$$

其次，$\mathfrak{T}_\beta^{\alpha(M)}$ 中不包含高于二阶的 $g_{\mu\nu}$ 的微商．最后，$\mathfrak{T}_4^\alpha$ 在变换 (1) 下应該是一个矢量密度，并对孤立系統而言，有

$$\int \mathfrak{T}_4^{4(M)} d^3x = m.$$

从上节的討論立刻可以看出：我們选用的 $\mathfrak{T}_\beta^\alpha$ 滿足上述最后两个假定．倘若我們能够証明 $\mathfrak{T}_\beta^\alpha$ 也滿足上述第一个条件，則必然

$$\mathfrak{T}_\beta^\alpha = \mathfrak{T}_\beta^{\alpha(M)}.$$

其实，自(2)及公式[3]

$$\sqrt{-g}\,R = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\mathfrak{g}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha}\right] - \mathfrak{L},$$

可得到

$$\Theta_B^A = \sqrt{-g}\,T_B^A + \frac{1}{2\kappa}\delta_B^A\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \sqrt{-g}\,R\right] - \frac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\mu\nu}_B\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_A} =$$

$$= \sqrt{-g}\,T_B^A - \frac{1}{2\kappa}\delta_B^A\sqrt{-g}\,R + \frac{1}{2\kappa}\left[\delta_B^A\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial x^B}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_A}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\kappa}\mathfrak{g}^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^B}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_A}\right) =$$

$$= \sqrt{-g}\, T_B^A + \frac{1}{2\kappa}\left[\mathfrak{g}^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^B}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}_A^{\mu\nu}}\right) - \delta_B^A \sqrt{-g}\, R\right] +$$
$$+ \frac{1}{2\kappa}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\delta_B^A \mathfrak{g}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}} - \delta_B^\alpha \mathfrak{g}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}_A^{\mu\nu}}\right].$$

由(5),(6)得

$$\mathfrak{T}_B^A = 2\left[\sqrt{-g}\, T_B^A + \frac{1}{2\kappa}\left(\sqrt{-g}\, g^{\rho A}\frac{\partial \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda}{\partial x^B} - \sqrt{-g}\, g^{\rho\sigma}\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^A}{\partial x^B} - \delta_B^A \sqrt{-g} R\right)\right].$$

然因[1)]

$$\sqrt{-g}\left(g^{\rho A}\frac{\partial \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda}{\partial x^B} - g^{\rho\sigma}\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^A}{\partial x^B}\right) = \mathfrak{g}^{\rho\sigma}\frac{\partial}{\partial x^B}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}_A^{\rho\sigma}}\right),$$

故

$$\mathfrak{T}_B^A = 2\sqrt{-g}\, T_B^A + \frac{1}{\kappa}\left[\mathfrak{g}^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^B}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}_A^{\mu\nu}}\right) - \delta_B^A \sqrt{-g}\, R\right].$$

将 Θ_B^A 与 $\mathfrak{T}_B^A$ 相比較,得到

$$\mathfrak{T}_B^A = 2\Theta_B^A - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\delta_B^A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}}\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \delta_B^\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}_A^{\mu\nu}}\mathfrak{g}^{\mu\nu}\right].$$

令 Θ_B^A 可由超势 $h_B^{A\rho} = -h_B^{\rho A}$ 表出

$$\Theta_B^A = \frac{\partial}{\partial x^\rho} h_B^{A\rho},$$

而

$$\chi^{*A\alpha}_{B} = \delta_B^A \mathfrak{g}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}} - \delta_B^\alpha \mathfrak{g}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}_A^{\mu\nu}} = -\chi_B^{\alpha A}.$$

故 $\mathfrak{T}_B^A$ 可由超势

$$h_B^{A\rho} + \chi_B^{A\rho}$$

推出. 故必

$$\mathfrak{T}_B^A = \mathfrak{T}_B^{A(M)}. \tag{7}$$

値得指出的是:公式(5), (6),(7)使得应用 $\mathfrak{T}_\beta^{\alpha(M)}$ 来討論恆定引力場的能量的工作变得十分簡便. 按照(5),(6),(7),在恆定引力場下,应有

$$\mathfrak{T}_4^{4(M)} = \sqrt{-g}(T_4^4 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3),$$

由此可以立刻得到 Petros S. Florides 詳細研究过的某些結論[5].

参 考 文 献

[1][2)] Møller, C., "Max-Planck Festschrift" (1958), Belin.
[2][2)] Møller, C., *Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat-fys. Medd* **31**, No. 14 (1959).
[3] Schrödinger, E., Space-Time Structure (1950).
[4] Tolman, R., *Phys. Rev.*, **35** (1930), 875.
[5] Petros. S. Florides, *Pro. Camb. Philo. Soc.*, **58** (1962), 102; **58** (1962), 110.

1) 文献[3], p. 103, (11.23).
2) 均收集在論文集 "Новейшие проблемы гравитации" 中 (1961), Москва.