

最 小 摩 阻 場*

刘 叔 仪

(中国科学院, 冶金陶瓷研究所)

提 要

前文^[1] 簡略地提到塑压陡綫規律。本文視最小摩阻条件所定义之塑压接触面为一曲面“流”場, 旨在于提出此“最小摩阻場”之場綫規律与場函数(摩擦应力 τ , 压应力 p) 規律。主要結果为:

推广前文之陡綫規律于广泛情况, 指出“摩擦場”与“滑質場”之基本区别在于前者为發散場, 向外減阻; 后者为收斂場, 向内減阻。二者之复合場有“分水嶺”, 內場收斂, 外場發散。金屬表面之粘性粘着区須为一收斂場。陡綫規律之庫侖标量方程引出兩重要推論:

(1) 摩擦力正比于压力之陡率(并給出比例函数之实例);

(2) 一切塑性压力分布皆为摩擦綫弧長之函数, 常含一指数項。这概括进現存不少特解。由严格不滑动条件定出具体之粘着区域。

試圖研究 (τ, p) 在应力圓中定义之“摩擦点”变化規律。以重叠应力圓法定出平面应变时此点之变域, 說明在平压中摩擦系数不大时, 压力約近于第一主应力。

本文仅涉及原則問題。場函数解法之一見作者另文^[2]。

定 義

(1) “表面” 塑压受力介質与施力工具直接接触之抽象几何曲面。

(2) 摩擦力 (τ) 与压力 (p) 根生于表面介質內之摩擦切应力, 称为“摩擦力” τ , 方向为工具对表面之摩擦力方向, p 为工具对表面之压应力。

(3) “最小摩阻場” 最小摩阻条件在表面定义之“摩擦‘流’場”。

(4) “外滑向”、“內滑向”与“滑向” 表面質点对工具能作相对滑动时之相对滑动方向, 向外, 与 $\vec{\tau}$ 相反, 称为“外滑向”; 表面質点不能对工具作相对滑动而能对介質內層有相对滑动时之相对滑动方向, 称“內滑”向, 向内, 与 $\vec{\tau}$ 同向。內外滑向总称“滑向”。

(5) “潜滑向” 內外滑向皆不發生时, 或內或外总有一待生效之滑向, 称为“潜滑向”, 与 $\vec{\tau}$ 共綫。

(6) “場綫”与“力綫” “場綫”特指“瞬时滑动綫”与“潜滑动綫”。外滑場綫为摩擦力綫之迹, 內滑場綫为摩擦綫之本身, 詳見(一)。

(7) 中性点(綫) 由于几何条件而必有之绝对無滑动趋势之点(綫), 如圓心。

(8) 場坐标弧長 (S) 以中性点为原点 (O) , 以發散場綫为一坐标曲綫, 其弧長 S 由原点起 $S = \widehat{OS}$ 。

* 1956年4月8日收到。

(9) 摩擦函数 (F): 特指下列应力函数: $\sqrt{\frac{(l^2 p_1^2 + m^2 p_2^2 + n^2 p_3^2)}{(l^2 p_1 + m^2 p_2 + n^2 p_3)^2} - 1} = F; (p_1, p_2, p_3)$

为主应力, (l, m, n) 为 p 法对为三主轴之方向余弦.

(10) 摩擦点 (Q): (τ, P) 在应力圆中定义之点.

(11) $\dot{\gamma}$ = 切应变速度.

(12) ∇ —— 曲面梯度算子.

文中自明之其他数量符号不再列出.

一. 場綫規律

凡塑压摩擦力皆压力之后果. 援此, 凡塑压摩擦力皆可视为压力之未知函数. 以最小阻力条件用于外滑、内滑与潜滑方向, 即得广义陡綫規律, 即

“摩擦力常与 $\nabla\tau$ 或 ∇p 共綫:

$$\vec{\tau} \parallel \nabla\tau \parallel \nabla p,$$

$$\nabla\tau = \frac{d\psi}{dp} \nabla p,$$

$$\tau = \psi(p),$$

(1)

摩擦場綫为等压綫之正交族”.

(1) 式给定場之曲坐标系, 坐标方向为發散場之場綫方向, 場綫方向逆于坐标方向者

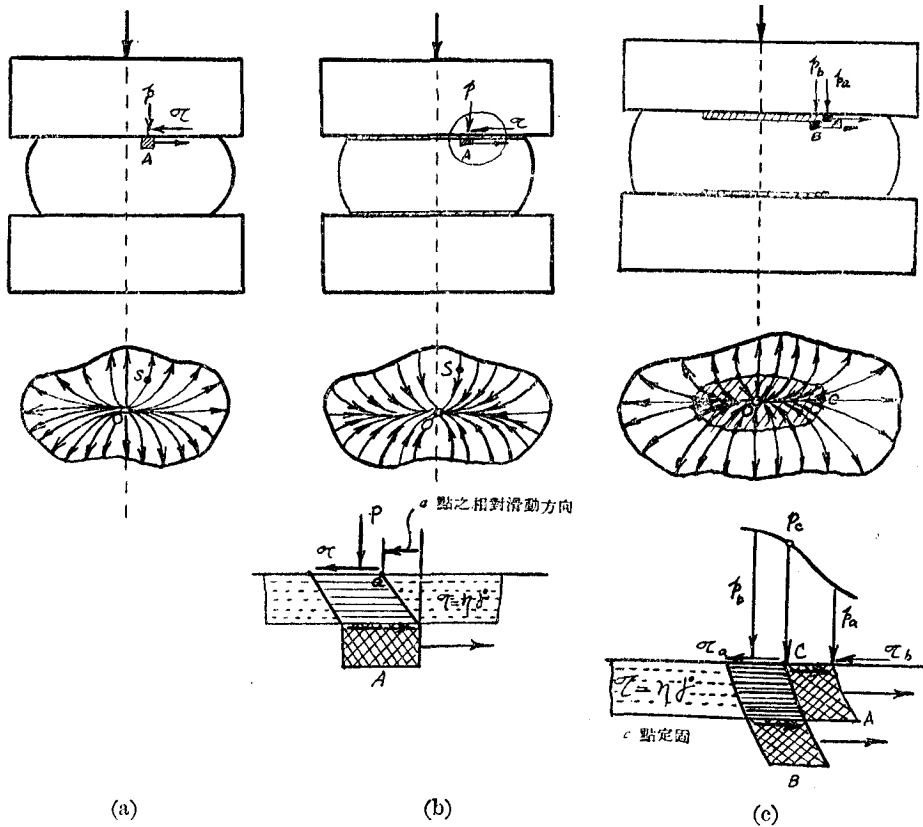


圖 1. 最小摩阻場之二基本类型与复合場

为收敛場。陡綫規律可簡述为：

“場綫方向常为减阻(最快之)方向”。 (2)

場之收敛与發散决定于場之介質：

(1) 固态介質能克服摩阻發生滑动,故其表面可有發散場,称“摩擦場”,庫侖場屬之。場綫和力綫方向相反,称“摩擦綫”;摩擦力發生于固体表層,称“外摩擦力”。

(2) 液态介質則順从摩阻而表面落后于内層,有(非“作”)相对后滑,故表面为收敛場,称“滑質場”,牛頓場屬之。場綫为力綫之本身,称“滑油綫”;摩擦力發生于液層内,为“内摩擦”。

二者为最小摩阻場之基本类型(圖 1)。中性点为摩擦場之“源”点,滑質場之“匯”点¹⁾。

按(2)式,摩擦場向外减阻,滑質場向内减阻²⁾。故發散場志摩阻,收敛場志潤滑。

二者之复合場[圖 1(c)]具“分水嶺”,内場收敛,外場發散,以压力 p_c 为界,其处恰無固体滑动,然力綫則皆为收敛。

塑性力学只处理塑压問題,流体力学之潤滑理論只处理滑潤問題,于压力加工中实乃兩者之混合問題。

二. 場函数規律

(1) 式为陡綫規律之向量方程,其标量方程决定 τ, p 兩場函数之广泛性質:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} < 0 \\ \tau = -g(s) \frac{d\tau}{ds} \\ \frac{d\tau}{ds} = -M(s)\tau \end{aligned} \right\} s > 0 \quad (\text{發散場}); \quad (3a)$$

或

$$\tau = -g(s) \frac{d\tau}{ds} \quad (3b)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = -M(s)\tau \quad (3c)$$

$g(s)$ 与 $M(s)$ 为 $\vec{\tau}$ 与 $\nabla\tau = \frac{d\tau}{ds}$ 兩向量間之尺度函数。对于收敛場有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} > 0 \\ \tau = g(s) \frac{d\tau}{ds} \\ \frac{d\tau}{ds} = M(s)\tau \end{aligned} \right\} s > 0 \quad (\text{收敛場}). \quad (4a)$$

或

$$\tau = g(s) \frac{d\tau}{ds} \quad (4b)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = M(s)\tau \quad (4c)$$

兩場函数以广义庫侖律相系于内部主应力与主方向:

$$\tau = Fp, \quad (5)$$

F 为一应力函数,称“摩擦函数”:

$$\sqrt{\frac{(l^2 p_1^2 + m^2 p_2^2 + n^2 p_3^2)}{(l^2 p_1 + m^2 p_2 + n^2 p_3)^2} - 1} = F. \quad (6)$$

本式可由塑性体表面应力平衡条件求得之。

按 $\tau = \psi(p)$, 故 $F = F(p)$, 有下列諸情况:

1) 指数学性質相同。

2) 可参考軋板滑油解中之 τ 分布曲綫[3]。

$$F = \begin{cases} F(p) & (\text{一般情况}), \\ f = \text{常数} & (\text{庫侖場}), \\ \frac{\eta(p)}{p} \dot{\gamma} & (\text{牛頓場}), \end{cases} \quad \begin{matrix} (7a) \\ (7b) \\ (7c) \end{matrix}$$

粘性系数 $\eta(p)$ 约为压力之指数函数^[3,4]. F 或 f 之点上值迄今尚無数据¹⁾. 茲按(7b)式与陡綫規律提出庫侖場函数之两种推論:

推論 1: 摩擦力正比于压力之陡率:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= -fg(s) \frac{dp}{ds}, \\ \frac{dp}{ds} &< 0. \end{aligned} \right\} ; s > 0 \quad (8)$$

有作者^[5]应用 Karman 軋軋方程求得此类关系. 就此而言, 尺度函数 $g(s)$ 之实验值可定:

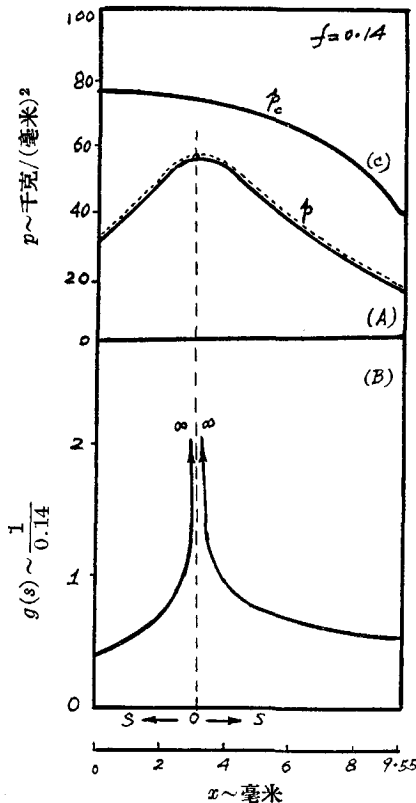


圖 2. 軋鋁板中心摩擦綫上之压力分布^[6]与 $g(s)$ 分布

$$\left. \begin{aligned} g(s) &= -\frac{p}{\left(\frac{dp}{ds}\right)}, \\ \frac{dp}{ds} &< 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

結果例如(圖 2)²⁾. 中性点位于压力極大处, $g(s)$ 在此呈奇点現象.

推論 2: 压力 p 仅为摩擦綫弧長($S = OS$)之函数, 常有一指数項.

按(3c)式中之 $M(s)$ 为待定, 型項皆可任取. 如取:

$$M(s) = \alpha(s) - \frac{\left(\frac{d\omega}{ds}\right)}{\omega(s)}, \quad (10a)$$

$$\frac{\omega(s)}{\omega(s_0)} = 1 + \frac{\varphi(s)}{\varphi(s_0)}, \quad (10b)$$

則將(3c)式沿全摩擦綫^{[2]3)}由外($s = s_0$)向内作曲綫积分, 有对应于(10a)与(10b)兩式之压力分布曲面为:

$$p = p(s_0) \frac{\omega(s)}{\omega(s_0)} e^{-\int_{s_0}^s \alpha(s) ds}, \quad (11a)$$

$$p = p(s_0) e^{\int_{s_0}^s \alpha(s) ds} + \frac{p(s_0)}{\varphi(s_0)} e^{-\int_{s_0}^s \alpha(s) ds} \cdot \varphi(s). \quad (11b)$$

当 $\frac{\omega(s)}{\omega(s_0)} = 1$ 时, (11a) 式为 Nadai^[3], Swift^[7] 等作者三鍛板解之概括式:

$$p = p(s_0) e^{-\int_{s_0}^s \alpha(s) ds}. \quad (11c)$$

1) 我們正在研究此問題.

2) 圖 A 虛綫为中心綫上值, 常用实綫值代之, 圖 B 基于实綫值. p_c 为(15)式給定之粘着条件.

3) 通过一切等压綫之摩擦綫.

(11b)式为某些 Karman 軋軋方程解(如[8])与作者平压近似总解^[2]之概括式。未知函数以陡綫規律及塑性力学关系定出。

除以上推論外, (τ, p) 兩場函数在应力圓内定义一“摩擦点”(Q)。摩擦点位服从下列規律:

$$\left. \begin{array}{l} (1) Q \text{ 点只能在 } \tau = Fp \text{ 曲綫上;} \\ (2) Q \text{ 点只能在三应力圓之实域上,} \end{array} \right\} \quad (12)$$

故 Q 点只能在 $\tau = Fp$ 曲綫过三应力圓圍域之曲綫段上。

設有兩種摩擦現象:

$$\tau = F_1 p, \quad \tau = F_2 p$$

可由 $\tau = F_1 p$ 轉变为 $\tau = F_2 p$, 則 $\tau = F_1 p$ 曲綫与最大应力圓应能相切于一点 (τ_c, p_c) , 此为兩摩擦現象之临界点。当 $\tau = Fp$ 曲綫切大圓于頂点时, 有阿罗宛之粘着条件^[9]:

$$\tau_c = \tau_{\max}.$$

当 $F=f$ 时, 庫侖直綫最多交三圓于六点, 与大圓交点方程之單根条件給出粘着条件为:

$$\tau_c = \frac{p_1 - p_3}{2\sqrt{1+f^2}} = \frac{\tau_{\max}}{\sqrt{1+f^2}}, \quad (13a)$$

$$p_c = \frac{p_1 - p_3}{2f\sqrt{1+f^2}} = \frac{\tau_{\max}}{f\sqrt{1+f^2}}. \quad (13b)$$

按最大切应力学說有:

$$\tau_c = \frac{K}{2\sqrt{1+f^2}}, \quad (14a)$$

$$\text{或} \quad p_c = \frac{K}{2f\sqrt{1+f^2}} \quad (K = \text{單向屈服点}). \quad (14b)$$

$$f = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{K}{p_c} \right)^2} - 1 \right] \quad (14c)$$

按畸变能学說, 則于平面应变时有:

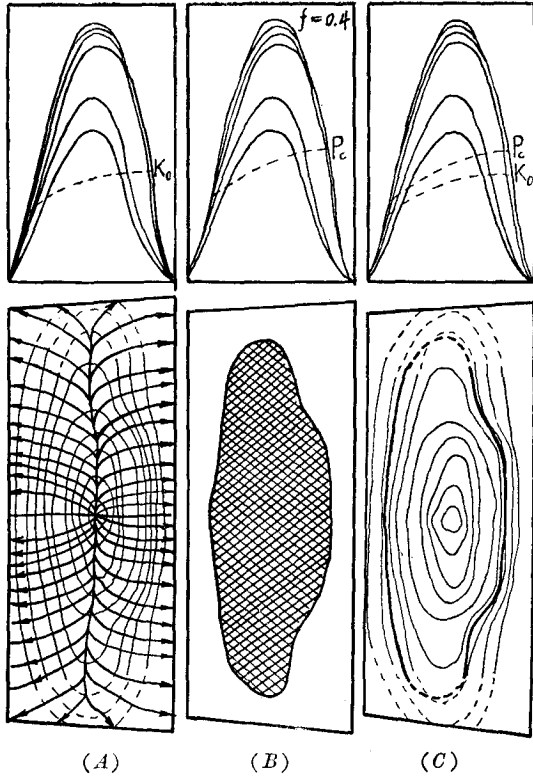
$$\tau_c = \frac{K_0}{2\sqrt{1+f^2}}, \quad (15a)$$

$$\text{或} \quad p_c = \frac{K_0}{2f\sqrt{1+f^2}} \quad \left(K_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} K \right). \quad (15b)$$

$$f = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{K_0}{p_c} \right)^2} - 1 \right] \quad (15c)$$

兩作者在滑移綫理論中附帶提到(15b)式之另型与切点之临界意义^[10]。由(14c)或(15c)可決定点上之 f 值(由压力分布与摩擦綫兩实验配合)。按(15b)式, 金屬愈硬^[11]則愈不易粘着。当 $K_0 = \text{常数}$ 时, 粘着区界为一等压綫^[1], 否則为非等压綫, 如圖 3 所示。此圖为粘着区界之具体結果¹⁾。

1) 根据压力曲面作者[6]之粗觀面条件取 $f=0.4$ 。



(A) (B) (C)
圖 3. 軋板摩擦綫(A)与粘着区(B), (C)
(溫金珂, 刘叔仪)

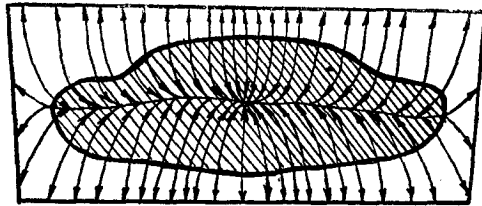


圖 4. 軋板庫倫牛頓复合場

如按流行一时之牛頓粘着概念, 則此区域須为收斂場(圖 4). (τ, p) 之定量力学分析与此不矛盾. 平頂压力曲面, 或其边上出脊等現象可能与此有关.

表面点位一定而 F 变化时, 摩擦点位在应力平面中描出一曲綫. 当 $F=f$ 时, 此曲綫有圖 5 之凹性, 来自实验^{[12]1)}. 据此估計, 平压或軋中之相似曲綫亦有凹性. 茲以平面应变为例. 此时, 曲綫有兩定点(圖 6):

$$\left. \begin{aligned} Q(0): & f=0; \\ & \tau=0, \\ & p=p_1, \\ Q(f_c): & \tau=\tau_c; \\ & p=p_c, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

仅此二应力圓固定. 此类应力圓可重叠, $Q(0), Q(f), Q(f_c)$ 曲綫縮于重叠应力圓之一可定变域上, 即(圖 6C) 之陰域上, 其兩直綫界乃基于 $\tau=fp(x_1)$ 曲綫之單調增值性. 可見: 摩擦点 Q 之变域随 f 之降值而趋于一点 $(0, p_1)$, 在一般平压中, Q 之曲綫常始于此点. 当 (p_1-p_2) 愈小, 則 Q 点变域愈窄.

故平面庫倫場之压力 p , 在 f 不大时近于 p_1 . 实則此关系不但为 Nadai^[13] 等用于平鍛, 亦为 Karman^[13] 及 Целиков 学派用于軋軋.

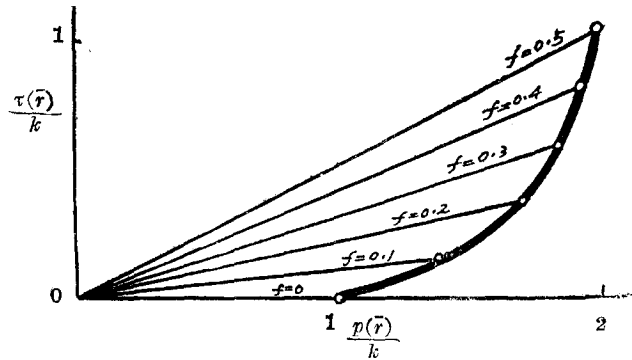


圖 5. f 变时定点上之摩擦点軌跡

1) 压力 $p(\bar{r})$ 为平均位置 (\bar{r}) 上之 p 值, f 对 \bar{r} 影响不大, 故此平压记录近于定点上之 p 值, 但屬定性.

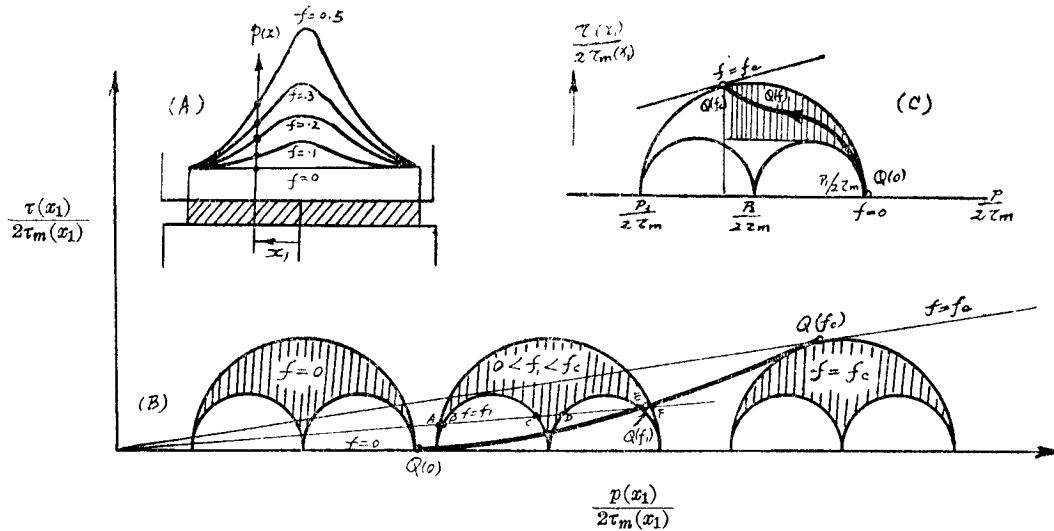


圖 6. 定点 ($x=x_1$) 上之摩擦点位与摩擦系数之关系

結 論

本文理論提供下列結論，适用于塑压摩擦現象：

(一) 最小摩阻場之場綫規律为 (1), (2) 兩原始性公式。按此，摩擦場之摩阻性基于其發散性；滑質場之潤滑性基于其收斂性。复合場有“分水嶺”，軋板之牛頓-庫侖場屬之。

(二) 最小摩阻場之場函数規律，本文提供者有 (3), (4), (8), (9), (11) 五原始性公式；經典理論提供者有 (5), (6), (7), (15) 四式；基于經典理論而本文指出者有 (6), (12), (14), (16) 与圖 6。

(三) 本文作出具体軋板粘着区域，并指出点上 f 值之一測定途徑。整个塑压表面应力分布問題可以最小摩阻場为一新基础；内部应力分布亦与此場有关。因此，可以說本文为压力塑性学开拓了一个新發展之基础与途徑，提供力学家参考。場函数解法之一見作者另一文^[2]。

参 考 文 献

- [1] 刘叔仪, 物理学报, 12 (1956), 41. 鋼院学报, 1955 輯. 鋼院学报, 1956 輯.
- [2] 刘叔仪, 摩擦綫理論与平面压力分布之(近似)总解答, 1955 年 5 月 28 日定稿, 尚未發表.
- [3] Nadai, A., *Jour. Appl. Mech.* pp. A54—62, ASME, 1936, 6.
- [4] Dow, R. V., *Jour. Appl. Phy.* 8 (1937), 369.
- [5] Королев, А. А., Новые исследования деформации металла при прокатке, ст. 251—262, Машгиз, 1953.
- [6] Leug, W., 見[8].
- [7] Swift, 見 Underwood, *The Rolling of Metals*, 1950.
- [8] Целиков, А. И., *Прокатные станы*, 1947, Москва.
- [9] Orrowan, E., *Proc. I. Mech. E.* 150, 4 (1943), 104—167.
- [10] Hoffman, O. and Sachs, G., *Introduction the Theory of Plasticity for Engineers*, 1953, McGraw-Hill.
- [11] Кузнецов, В. Д., 見[12].
- [12] Павлов, Иг. М., *Теория прокатки*, 1950, Москва.
- [13] Karman, V. T., *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 5, p. 139, 1925.

THE FRICTION-FIELD OF LEAST RESISTANCE

LIU SHU-I

(*Institute of Metallurgy and Ceramics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The contact surface in plastic deformation is considered as a field, whose field-line is given by the "generalized rule of gradient" based upon the condition of least resistance applied both to effective and ineffective direction of "relative" slip on solid and liquid surfaces, as shown by equation (1), which is the formulation of the statement that the direction of field-lines is the direction of (most rapidly) decreasing frictional resistance [equation (2)]. The main results are:

(1) The rule of field lines is given by equation (1) and (2). Accordingly, for dry friction, the "resistant" field is divergent; for plastic lubrication, the "lubricating" field is convergent (Fig. 1). There may be combination of both types, as shown in Fig. 1(c) and Fig. 4 for the case of plate-rolling.

(2) The two field functions, the unit friction (τ) and the unit pressure (p) are governed by equations (3), (4), (8), (9), (11), given in this work, by equations (5), (6), (7), (15) of classical theory and by equations (6), (12), (14), (16) and Fig. 6, all based upon classical concept, but first used in our work. Fig. 6 deals with range of variation of what is termed the "point of friction", that is, (τ, p) point in the stress plane. Equation (12) reads: The point of friction (Q) must be on the segments of the curve $\tau = Fp$, merged in the closed field limited by the three stress circles, where F is the "friction-function" defined by equation (6). In these equations, S is arc-length of field lines. The other designations are self-evident.

(3) A region of sticking in plate-rolling is determined by equation (15) as shown in Fig. 6. It is pointed out that the value of the coefficient of friction can be measured by two separate experiments on pressure distribution and on friction-lines.

The friction-field of least resistance provides a new foundation for plasticity under pressure.