第20卷 第7期　　物 理 学 报　　Vol. 20, No. 7
1964 年 7 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　July, 1964

鉄磁金属的表面阻抗与自旋波共振*

于　渌

提　要

本文計算了鉄磁金属在平行磁場中的表面阻抗．計算中考虑了交換作用所引起的磁化率空間色散及趋肤效应的反常性．分别討論了磁矩的两种边界条件 $\mathbf{m}=0$ 和 $\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n}=0$．同时研究了导电电子在表面散射性質的影响．利用 Азбель-Канер 在迴旋共振理論中的方法，計算了考虑电导率旋磁性条件下的表面阻抗．

一、引　言

如所周知[1]，交換作用对于鉄磁体的微波性質并不重要．它所引起的磁化率的空間色散效应(卽从属于波矢$\mathbf{k}$)在微波波段可以略而不計，因为 $W=\frac{A}{2\pi M_s^2}k^2\ll 1$，这里 A 是交換作用常数，M_s 是飽和磁化強度．但在一些特殊条件下，这一效应会明显地表現出来．对于厚度为 10^{-4}—10^{-5} 厘米的薄膜，参量 W 較大．在这样厚度的金属膜上曾观察到自旋駐波的共振[2]．在大块金属中，由于磁矩在趋肤层內的不均匀性，参量 W 也要比絕緣体中大得多．在外場很小的条件下，交換项 $\frac{2A}{M_s^2}\nabla^2\mathbf{m}$ 可以与在外場中的Zeeman项 $H_x\mathbf{m}$ 相比，甚至更大一些．磁矩的不均匀性可以引起渦流，形成附加綫寬，同时可以引起共振頻率的移动．这些現象确实被 Rado 和 Weertman[3] 在实驗中观察到．Rodbell[4] 在針状鉄单晶的共振中也观察到类似的效应．为了与一般鉄磁共振有所区别，这些作者把上述現象称作自旋波共振．(文献中往往把上面提到的自旋駐波共振也称为自旋波共振．本文中討論的是大块样品中的效应．)

这些現象的研究，对鉄磁金属理論有一定意义，因为从实驗数据中可以确定交換作用常数 A．

Kittel 与 Herring[5] 曾用微扰方法估計了交換作用的影响．他們認为，只有在低温、純金属条件下，它才会表現出来．这一預言未被証实，因为 Rado 等人的实驗是在室温和液氮温度下作的，而且用的是叵莫合金．Ament 与 Rado[6] 系統地討論了交換作用的影响，建立了自旋波共振的唯象理論．但他們只討論了正常趋肤效应的情形(細节可参看文献[1])．

在低温下，电子的自由行程可以比趋肤深度大得多．这时必須考虑电导率的空間色散，卽电流与电場的非定域关系．这就是所謂反常趋肤效应．在 Pippard[7] 的实驗工作和 Reuter 及 Sondheimer[8] 的理論工作以后，对非鉄磁金属中的反常趋肤效应已有了較

* 1963 年 2 月 5 日收到．

深入的研究. 他們的工作后来被推广到任意色散律 $\varepsilon=\varepsilon(\mathbf{P})$[9] 和有磁場的情况[10]. Азбель 和 Канер[11] 从理論上預言的金属中的迴旋共振也为实驗所証实.

在鉄磁金属中，在較高温度时可能就要考虑趋肤效应的反常性，因为在共振频率附近,有效磁导率很大，趋肤深度很小. Гуревич[12] 曾經討論了垂直磁場中鉄磁金属的反常趋肤效应. 在这种情形下的理論分析比較簡单，但实驗是在平行磁場中作的. 他还討論了平行場中交換作用不重要时的特例[13]. Rado 曾用微扰方法計算了自由程效应对經典表达式的修正[14]. 他把 $\frac{l}{\delta}(\mu_{\rm eff})^{1/2}$ 当作小参量. 实际上,若假定趋肤深度 $\delta\sim10^{-4}$ 厘米，自由程 $l\sim10^{-4}$—10^{-5} 厘米，$\mu_{\rm eff}\sim10^2$，这一参数約为 1—10. 微扰論显然是不能用的.

在这些工作中都沒有考虑电导率的旋磁性. 如果电子在有效磁場中运动的迴旋半径比自由程大得多,这一近似是正确的. 看来,在液氦温度下,这一条件并不能满足.

曾把理論工作[6,14]的結論与实验进行了比較[3]. 在室温下，共振綫寬、綫形等符合較好,只是由实驗数据确定的交换作用常数偏大,而且与頻率有关. 在 Каганов 与作者的工作[15]中討論了对这一現象的可能解释. 在液氮温度下,理論与实驗相差很大.

从以上的綜述中可以看出，鉄磁金属反常趋肤效应及自旋波共振理論中尚有不少問題需要进一步討論. 本文从 Maxwell 方程、磁矩运动方程及电子輸运方程出发,考虑了磁化率和电导率的空間色散，計算了鉄磁金属在平行磁場中的表面阻抗；利用 Азбель 和 Канер[11] 在迴旋共振理論中的方法,討論了电导率旋磁性的影响.

二、完全方程組

考虑占有半空間（$z>0$）的金属. 設外加恆定磁場与 x 軸平行. Maxwell 方程写成

$$\frac{dE_x}{dz}=-\frac{i\omega}{c}(h_y+4\pi m_y),$$
$$\frac{dE_y}{dz}=\frac{i\omega}{c}(h_x+4\pi m_x),$$
$$0=h_z+4\pi m_z,\tag{1}$$
$$\frac{dh_x}{dz}=\frac{4\pi}{c}j_y,$$
$$\frac{dh_y}{dz}=-\frac{4\pi}{c}j_x,$$
$$0=j_z.\tag{2}$$

我們略去了位移电流，因为直到可見光譜段 $\left(\frac{\delta\omega}{c}\right)^2\ll1$.

将描述磁矩运动的 Ландау-Лифшиц 方程对于可变部分綫性化,写成

$$\left[D\frac{d^2}{dz^2}-(1+\eta)\right]m_z=-[i\omega'+\beta\eta]m_y+\frac{\beta h_y}{4\pi},\tag{3a}$$

$$\left[D\frac{d^2}{dz^2}-\eta\right]m_y=[i\omega'+\beta(1+\eta)]m_z-\frac{h_y}{4\pi},\tag{3b}$$

$$m_x=0.\tag{3c}$$

这里 $D = \frac{A}{2\pi M_s^2}$, A 是交換作用常数. 按数量級說,它等于 $\frac{\theta_c}{a}$, θ_c 是居里温度, a 是晶格常数. $\omega' = \frac{\omega}{4\pi g M_s}$, $\eta = \frac{H_x}{4\pi M_s}$, g 是有效旋磁比, β 是弛豫常数. 我們沒有考慮磁晶各向异性, 因为自旋波共振只有在各向异性很弱时才能观察到. 如果外磁場与最易磁化方向平行,只要把 H_x 換成 $H_x + \gamma M_s$ 就行了, γ 是各向异性常数.

在考慮磁化率空間色散时,必須給出磁矩 $\mathbf{m}$ 所滿足的边界条件来补充一般电磁場在边界上連續的条件. Ament 和 Rado[6] 認为在表面上仍是交換作用重要,磁矩可以自由运动,即 $\left.\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n}\right|_{z=0} = 0$. Kittel[2] 在討論自旋駐波共振时認为,由于表面各向异性,磁矩在表面上是被"釘"住的,即 $\mathbf{m}|_{z=0} = 0$. 实际的情形可能介于两者之間:

$$\left.\left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n} + \alpha \mathbf{m}\right)\right|_{z=0} = 0. \tag{4a}$$

α 是一个和鉄磁体性質、表面状况有关的参量. 在文献[15]中利用普遍边界条件(4a)計算了正常趋肤效应情况下的表面阻抗. 在討論反常趋肤效应时,我們将只限于两种极限情形:

$$\mathbf{m}|_{z=0} = 0, \tag{4b}$$

$$\left.\frac{d\mathbf{m}}{dz}\right|_{z=0} = 0. \tag{4c}$$

在(1)—(3)式中消去 m_y, m_z, h_y 以后,求得

$$\left[D^2 \frac{d^6}{dz^6} - (1 + 2\eta) D \frac{d^4}{dz^4} + F \frac{d^2}{dz^2}\right] E_x(z) =$$

$$= \frac{4\pi i\omega}{c^2}\left[D^2 \frac{d^4}{dz^4} - 2(1 + \eta) D \frac{d^2}{dz^2} + B\right] j_x(z), \tag{5a}$$

$$\frac{d^2 E_y(z)}{dz^2} = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_y(z), \tag{5b}$$

这里

$$F = \eta(1 + \eta) + (i\omega' + \beta\eta)[i\omega' + \beta(1 + \eta)], \tag{5c}$$

$$B = (1 + \eta)^2 + [i\omega' + \beta(1 + \eta)]^2. \tag{5d}$$

注意到,如果不考慮交換作用, $\frac{B}{F}$ 是磁导率,在共振点 $(\omega_r = g(H_x B_x)^{1/2})$, F 的实部为零,在反共振点 $(\omega_a = gB_x)$, B 的实部为零. 考慮交換作用后, F 和 B 已經沒有这样簡单的意义了.

如果电流的分量不包含"交叉"項,求 E_x, E_y 的方程是各自独立的. 既然鉄磁体的特点全部反映在 x 分量上,我們仅限于对它进行討論.

由(4b)式出发,利用方程(1)—(3)很容易求得边界上各阶导数的关系:

$$E_x^{(\mathrm{III})}(0) = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_x'(0) - \frac{E_x'(0)}{D}, \tag{6a}$$

$$E_x^{(\mathrm{V})}(0) = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_x^{(\mathrm{III})}(0) - \frac{4\pi i\omega}{c^2 D} j_x'(0) + \frac{\beta[i\omega' + \beta(1 + \eta)] - \eta}{D^2} E_x'(0). \tag{6b}$$

同样,在 $\left.\frac{d\mathbf{m}}{dz}\right|_{z=0} = 0$ 的情况下,我們得到

$$E_x''(0) = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_x(0), \tag{7a}$$

$$E_x^{(\mathrm{IV})}(0) = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_x''(0) - \frac{4\pi i\omega}{c^2}\frac{1}{D} j_x(0). \tag{7b}$$

为了获得完备方程組,必須給出电流与电場的关系式. 在正常趋肤效应情况下,这一关系由欧姆定律給出. 在一般情况下,它应由导电电子的 Boltzmann 方程确定. 相对外电場綫性化以后可写成[16]

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + V_z\frac{\partial f_1}{\partial z} + \Omega\frac{\partial f_1}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\mathrm{cr}} = e\mathbf{VE}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \tag{8}$$

这里 $\Omega = \frac{eH_0}{mc}$, $m = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial s}{\partial \varepsilon}$, s 是等能面, $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$ 与 $p_x = \mathrm{const}$ 平面的交綫所包絡的面积. τ 正比于电子在动量空間軌道上旋轉的“时間”. 如果色散律是各向同性的, τ 是这个平面上的角. H_0 是作用在导电电子上的有效磁場. Азбель 与 Канер[11] 曾証明,在反常趋肤效应条件下,即 $l \gg \delta$ 时,可以引入弛豫时間 t_0

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{ct} = -\frac{f_1}{t_0}.$$

电流 $j_i = -\frac{2e}{h^3}\int V_i f_1\, d^3\tau_{\mathbf{p}} \qquad i = 1, 2, 3.$

作为 f_1 的边界条件,我們假定电子在表面作漫反射,即

$$f_1(0, \mathbf{p}) = 0 \qquad V_z > 0, \tag{9a}$$

或鏡面反射

$$f_1(0_i, V_x, V_y, -V_z) = f_1(0_i, V_x, V_y, V_z). \tag{9b}$$

此外,从金属深处来的电子应遵从平衡分布

$$f_1(\infty, \mathbf{p}) = 0 \qquad V_z < 0. \tag{9c}$$

在考虑磁場影响时,分布函数还应满足对 τ 的周期性条件

$$f_1(\tau + 2\pi) = f_1(\tau). \tag{10}$$

至于导电电子的色散律, 我們将只討論各向同性的情况 $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$.

三、表面电阻的計算(不考虑电导率的旋磁性)

1. 边界上 $\mathbf{m} = 0$, 电子作鏡面反射.

将电場和电流对称地延拓到 $z < 0$, 取 (5a) 式的傅氏变换, 并考虑边界条件 (6), 求得

$$[W^2k^6 + W(1 + 2\eta)k^4 + Fk^2]\varepsilon(k) + \frac{4\pi i\omega l^2}{c^2}[W^2k^4 + 2(1+\eta)Wk^2 + B]j(k) + \\ + 2E'(0)[W^2k^4 + 2(1+\eta)Wk^2 + B] = 0. \tag{11}$$

由 Boltzmann 方程(8) 在 $\omega t_0 \ll 1$ 和 $\Omega t_0 \ll 1$ 的条件下,可以求得[8]

$$j(\zeta) = \frac{2\pi e^2 P_0^2 l}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta - \xi)E(\xi)\, d\xi. \tag{12}$$

这里

$$K(\xi)=\int_1^\infty \frac{e^{-|\xi|s}}{s}ds-\int_1^\infty \frac{e^{-|\xi|s}}{s^3}ds. \tag{13}$$

p_0 是費米动量.

我們引进了无綱量 $W=\frac{D}{l^2}=\frac{A}{2\pi M_s^2 l^2}$, $\xi=\frac{z}{l}$. 取(12)式的傅氏象

$$j(k)=\frac{2\pi e^2 P_0^2 l}{h^3}K(k)\varepsilon(k), \tag{14}$$

$$K(k)=\frac{2}{k^3}[(1+k^2)\operatorname{arctg}k-k]. \tag{15}$$

根据定义,表面电阻

$$Z=\frac{E_x(0)}{h_y(0)}=-\frac{i\omega l}{\pi c E'(0)}\int_0^\infty \varepsilon(k)\,dk. \tag{16}$$

将(14)代入方程(11),得

$$Z=\frac{2\omega li}{\pi c}\int_0^\infty \frac{(W^2k^4+2(1+\eta)Wk^2+B)\,dk}{(W^2k^6+(1+2\eta)Wk^4+Fk^2)+i\alpha K(k)[W^2k^4+2(1+\eta)k^2+B]}, \tag{16a}$$

$$\alpha=\frac{3\pi\omega\sigma l^2}{c^2}=\frac{3}{2}\frac{l^2}{\delta_0^2}.$$

如果考虑到数量級 $\frac{k}{l}\sim 10^4$—$10^5\,\mathrm{cm}^{-1}$ 的极点給出对积分的主要貢献,并估計积分中各項的大小,可以略去一些小項,将 (16a) 簡化成

$$Z=\frac{2\omega liB}{\pi c}\int_0^\infty \frac{dk}{(1+2\eta)Wk^4+Fk^2+i\alpha K(k)B}. \tag{16b}$$

普遍情形下計算这一积分仍有困难. 考虑各种极限情形:

正常趋肤效应. $\alpha\ll 1$, $\delta_0\gg l$. 这时小的 k 值起主要作用, $K(k)\approx K(0)=\frac{4}{3}$;在共振点附近, $\eta\ll 1$, $B\approx 1$, $F\approx\eta-\omega'^2+i\beta\omega'$. 考虑了这些簡化后, 得到 Rado 等人的結果[3a] (他們也作了同样的近似).

$$Z=\frac{c}{4\pi\sigma\epsilon\delta_0}\frac{(1+i)\epsilon}{\sqrt{F+2(1+i)\epsilon}}, \tag{16c}$$

$$\epsilon=\frac{l}{\delta_0}\sqrt{W}=\sqrt{\frac{A}{2\pi M_s^2\delta_0^2}}.$$

反常趋肤效应. $\alpha\gg 1$, $\delta_0\ll l$. 大的 k 值起主要作用 $K(k)\approx\frac{\pi}{k}$,

$$Z=\frac{2\omega liB}{\pi c}\int_0^\infty \frac{k\,dk}{(1+2\eta)Wk^5+Fk^3+i\alpha\pi B}. \tag{16d}$$

在一般情形下,这一积分只能用数值法計算. 只考虑一些簡单的极限情况:

a) 离共振点很远,交换作用不重要.

$$(1+2\eta)W\ll|F|^{5/3}|\alpha\pi B|^{-2/3},$$

$$Z=\frac{2}{9}\left(\frac{\sqrt{3}\,\omega^2 l}{c\sigma\pi^2}\right)^{1/3}\left(\frac{(1+\eta)^2+[i\omega'+\beta(1+\eta)]^2}{\eta(1+\eta)+(i\omega'+\beta\eta)[i\omega'+\beta(1+\eta)]}\right)^{2/3}(1+i\sqrt{3}). \tag{16e}$$

此式与 Гуревич 結果相符[13].

b）在未移动的共振峯附近，交換作用很重要.

$$Z=\left(\frac{4}{27\pi^4}\right)^{1/5}\frac{2}{5\sin\frac{2\pi}{5}}\left(\frac{\omega^2 c l^3 M_s^4}{\sigma^3 A^2}\right)^{1/5}\left(\frac{(1+\eta)^2+[i\omega'+\beta(1+\eta)]^2}{1+2\eta}\right)^{2/5}e^{\frac{\pi}{5}i}. \tag{16f}$$

注意到以下特点：

（1） $Z\sim\omega^{2/5}$, $Z\sim M_s^{4/5}/A^{2/5}$;

（2） 与普通金属一样，表面阻抗不依赖于自由程；

（3） 表面电阻实部与虚部的关系和普通金属完全不一样.

近似地估計一下共振频率的移动和附加綫寬. 为此先假定 F 是一小参数，用逐次近似法求解（16d）式分母的根.

$$k_{0n}=\left(\frac{\alpha\pi B}{(1+2\eta)W}\right)^{1/5}e^{i\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{2n\pi}{5}\right)},$$

$$k_{1n}=-\frac{F}{5(1+2\eta)Wk_{0n}}\qquad n=0,1,2,3,4.$$

如果 B 的虚数部分很小，则 k_{03} 与 k_{13} 在 k 的复平面上組成近 π 的角，$n=3$ 这一极点距原点最近，給出对积分的最主要貢献.

$$Z\approx\frac{2\omega li}{\pi c}\frac{B}{(1+2\eta)W}\frac{-k_3\ln k_3}{k_3^2\left(5k_3^2+\frac{3F}{(1+2\eta)W}\right)}. \tag{16g}$$

在新的共振频率附近，这一近似不再适用. 由此可以粗略地估計出共振点的移动和附加綫寬. 如果 $B\approx 1$, $\eta\ll 1$,

$$\Delta H_r^{(a)}\approx 60\left(\frac{A^3\omega^2\sigma^2}{M_s c^4 l^2}\right)^{1/5}. \tag{17a}$$

注意到，在垂直磁場中[12],

$$\Delta H_r^{(a)}\approx 10\left(\frac{A^3\omega^2\sigma^2}{M_s c^4 l^2}\right)^{1/5}. \tag{17b}$$

两种情形下的結果只差一数值系数.

根据正常趋肤效应的理論，

$$\Delta H_r^{(n)}\approx\frac{4\pi}{c}(A\omega\sigma)^{1/2}. \tag{17c}$$

如果假定在低温下电导率比室温下大 10^2 倍（因为上述表达式适用于这比值比 1 大得多的情况），$\Delta H_r^{(n)}\approx 120$ 奥，$\Delta H_r^{(a)}\approx 60$ 奥（其他参量数值取自文献 [3]）. 實驗所得位移数值比經典表达式給出的要小，这一点可以由此得到定性的解释.

2. 边界上 $\dfrac{d\mathbf{m}}{dz}=0$，电子作鏡面反射.

在这种情况下，最自然的是将电場和电流反对称地延拓到 $z<0$. 但包含有对坐标一次微商的輸运方程不允許我們这样作. 如果用方程 (5a) 进行演算，并进行对称的延拓，則数学問題較复杂. 考虑到 $\delta_{\rm eff}\sim 10^{-5}\,{\rm cm}$，方程 (5a) 中各項的数量級显然不同. 左方第一項和右方第一、第二項比其他項要小得多(至少小 10^3 倍). 如果回到原有方程 (1)—(3)，可以看出，略去这些項的物理意义在于：考虑 m_y 但不是 m_z 的空間色散；渦流基本上是由磁矩的可变部分而不是由外磁場的可变部分形成的. 交換項可以比外場中的 Zeeman 項大，但永远比相当于磁感应強度的內場中的 Zeeman 項小 [参看(3)式]. m_y，m_z 的非对称性是由問題的提法本身决定的，因为 m_z 应滿足条件 $h_z+4\pi m_z=0$. 应該指出，在正常趋膚效应理論中也作了类似的近似，因为 m_z 的边界条件根本沒有被利用[6]. 还注意到，即使用方程 (5a) 进行运算，最后仍旧可以略去这些小項. 所有这些討論，使我們有可能只考虑一个簡化了的方程：

$$\left[(1+2\eta)W\frac{d^4}{d\xi^4}-F\frac{d^2}{d\xi^2}\right]E_x(\xi)=-\frac{4\pi i\omega l^2}{c^2}Bj_x(\xi). \tag{18}$$

同一近似下，边界条件变成

$$E''(0)=0. \tag{19}$$

利用与上节类似的傅氏变換方法可以求出方程(18)的解.

$$E(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\xi k\,\frac{2W'E^{(\rm III)}(0)-2E'(0)(W'k^2+F)}{W'k^4+Fk^2+i\alpha BK(k)}\,dk, \tag{18a}$$
$$W'=W(1+2\eta).$$

边界条件(19)給出

$$P=\frac{E^{(\rm III)}(0)}{E'(0)}=\frac{-i\alpha B\displaystyle\int_0^\infty\frac{K(k)\,dk}{R(k)}}{\displaystyle\int_0^\infty\frac{k^2\,dk}{R(k)}}, \tag{19a}$$

这里 $R(k)=W'k^4+Fk^2+i\alpha BK(k)$.

在求 (18a) 式的导数时，必須先分出 $E'(0)$ 的跳跃.

$$Z=\frac{c}{4\pi l}\frac{E(0)}{\displaystyle\int_0^\infty j(\xi)\,d\xi}, \tag{20a}$$

考虑到

$$\int_0^\infty d\xi\int_0^\infty\cos\xi k\,\frac{[PW'-(W'k^2+F)]}{R(k)}K(k)\,dk=$$
$$=\frac{\pi}{2}\lim_{k\to 0}\frac{PW'-(W'k^2+F)}{R(k)}K(k)=\frac{\pi}{2}\frac{PW'-F}{i\alpha B},$$

可以求得

$$Z=\frac{2i\omega lB}{\pi c}\left[\int_0^\infty\frac{dk}{R(k)}-\frac{W'}{PW'-F}\int_0^\infty\frac{k^2\,dk}{R(k)}\right]. \tag{20b}$$

討論各种极限情形：

在正常趋膚效应条件下，得到 Ament 与 Rado 由宏观理論得到的結果[6]：

$$Z=\frac{c(1+i)}{4\pi\delta_0\sigma}\frac{\sqrt{\eta-\omega'^2+i\beta\omega'+2(1+i)\epsilon}}{\eta-\omega'^2+i\beta\omega'+(1+i)\epsilon}. \tag{20c}$$

反常趋肤效应时，只能在特殊情形下写出明显的解析表达式．如果交换作用不重要，我們重新得到(16e)式．这一点是可以預期的，因为不考虑空間色散时，根本不需对 **m** 再加边界条件．如果交換作用很重要，則

$$Z=\left(\frac{4}{27\pi^4}\right)^{1/5}\frac{2}{5}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}}+\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{5}}\right)\left(\frac{\omega^2 c l^3 M_s^4}{\sigma^3 A^2}\right)^{1/5}\times$$
$$\times\left[\frac{(1+\eta)^2+[i\omega'+\beta(1+\eta)]^2}{1+2\eta}\right]^{2/5}e^{\frac{\pi}{5}i}. \tag{20d}$$

将(20d)与(16f)相比較，可以看出，这两种边界条件下的表面电阻只相差一个約为 2.6 的数值系数．在正常趋肤效应情况下，$F=0$ 时，这一数值系数为 2．共振点的移动和附加綫寬的数量級与 $\mathbf{m}=0$ 的情形相同．

3. 到現在为止，我們都假設电子在表面上作鏡面反射．实际情形更接近于漫反射．在后一情况下，必須解一个 Winer-Hopf 型的积分微分方程．如所周知[8]，在反常趋肤效应极限下，两个結果只差一个系数

$$\frac{Z_{\text{鏡}}}{Z_{\text{漫}}}=8/9.$$

这一关系在鉄磁金属，特别是鉄磁共振頻率附近是否保持必須进一步討論．在附录 I 中我們求得了这一問題的解．如果边界上 $\mathbf{m}=0$，則在未迁移共振頻率附近

$$\frac{Z_{\text{鏡}}}{Z_{\text{漫}}}\approx 0.84.$$

由此可見，这一情形下系数随頻率改变．这一点完全可以理解，因为出現了一个新的特征頻率——鉄磁共振頻率．

四、表面电阻的計算(考虑电导率的旋磁性)

1. 我們認为，有一个差不多等于磁感应强度的有效磁場作用在导电电子上．若假定在液氦温度下 $l\sim10^{-3}$ 厘米，$H_0\sim10^4$—10^5 奥，$\Omega t_0\sim1$—10．Ω 是迴旋頻率，t_0 是弛豫时間．这一情况下必須考虑电导率的旋磁性．

一般說来，自发磁矩的影响不仅限于有一个有效磁場作用在导电电子上，它可能还会引起碰撞积分的奇异性．鉄磁体中霍耳效应和磁阻的反常可能与此有关[17]，但实驗表明，这些反常現象在低温下并不显著．因此，在討論低温下的自旋波共振时可以認为上述假定是成立的．当然，这些討論都基于 s-d 模型，卽認为形成自发磁矩和导电的是两組不同的电子．这一模型本身有很大的局限性．注意到，在鉄磁共振的实驗中，入射波的电矢量与恆定磁場平行，霍耳場为零．因此，电流表达式中不包括电場的"交叉"項．

为了研究金属中的迴旋共振，Азбель 和 Канер[11] 求得了輸运方程(8)在強磁場条件下的解．这一方法的基本思想在于：坐标空間里分布函数在方程(8)的特征綫上有断裂．从物理上說，这是因为在具有一定动量的电子中只有那些与表面碰撞的电子才"感到"它的存在，另一些电子都完全"感覚"不到．但分布函数的傅氏变換是連續的，因此最好从开始就轉到 k 空間．虽然在所得到的定 $\varepsilon(k)$ 的积分方程中核的形式很复杂，不能在普遍形式下求解．但仍可近似地算出表面电阻，准到数量級为 1 的系数．

这一节中我們将利用他們的方法来計算鉄磁金属的表面电阻.

2. 边界上 $\mathbf{m}=0$, 电子作漫反射.

这一情况下最好将电場对称地延拓到 $z<0$, 并可直接利用 Азбель 和 Канер 的結果.

在滿足条件

$$l,\ r \gg \delta_{\rm eff},\ \left|\frac{i\omega}{\Omega}+\frac{\nu_0}{\Omega}\right| \ll \left(\frac{\gamma}{\delta_{\rm eff}}\right)^{1/2} \tag{21}$$

的反常趋肤效应和強磁場情况下,对平方色散律我們有[11]

$$\begin{aligned} j_\mu(k) = \frac{2\pi^2P_0^2e^2}{h^3}\Bigg\{&\frac{\varepsilon_\mu(k)}{k}(1-\exp(-2\pi\gamma))^{-1}-\frac{1}{\pi}\frac{(1+\exp(-2\pi\gamma))^2}{4(1-\exp(-2\pi\gamma))}\times \\ &\times\int_0^\infty\frac{dk'}{\sqrt{kk'}}\frac{\varepsilon_\mu(k')}{k+k'}-\frac{3+\exp(-2\pi\gamma)}{2\pi^2}\int_0^\infty dk'\,\frac{\ln k-\ln k'}{k^2-k'^2}\varepsilon_\mu(k')+ \\ &+\frac{\varepsilon_\mu(k)}{k}O\left(\frac{1}{kr}\right)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{22}$$

$\mu = x,\ y.$　$\gamma = i\dfrac{\omega}{\Omega}+\dfrac{\nu_0}{\Omega}$, ν_0 是碰撞頻率, r 是电子軌道半径. 如果磁場很強, $|\gamma|\ll 1$, 則可对 γ 展开,保留最低次項,

$$j_\mu(k) \approx \frac{\pi P_0^2e^2}{h^3}\frac{\Omega}{i\omega+\nu_0}\left\{\frac{\varepsilon_\mu(k)}{k}-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varepsilon_\mu(k')\,dk'}{\sqrt{kk'}(k+k')}\right\}. \tag{22a}$$

取 (5a) 式的余弦傅氏变换,并考虑边界条件(6),

$$\begin{aligned} &[D^2k^6+D(1+2\eta)k^4+Fk^2]\varepsilon(k)+\frac{4\pi i\omega}{c^2}[D^2k^4+2(1+\eta)Dk^2+B]j(k)+ \\ &\quad +2E'(0)[D^2k^4+2(1+\eta)Dk^2+B]=0. \end{aligned} \tag{23}$$

将 (22a) 代入 (23), 卽得到求 $\varepsilon(k)$ 的积分方程. 这一方程无法在普遍形式下求解. 类似文献[11]用逐次近似法来求解. 一級近似下略去积分項,

$$Z=\frac{2i\omega}{\pi c}\int_0^\infty\frac{k(D^2k^4+2(1+\eta)Dk^2+B)\,dk}{D^2k^7+D(1+2\eta)k^5+Fk^3+G[D^2k^4+2(1+\eta)Dk^2+B]}. \tag{24a}$$

在略去 (24a) 式中一些小項后 (参看第三节 1), 求得

$$Z=\frac{2i\omega B}{\pi c}\int_0^\infty\frac{k\,dk}{D(1+2\eta)k^5+Fk^3+BG}, \tag{24b}$$

这里 $G=\dfrac{4\pi^2e^2P_0^2\omega}{c^2h^3}\dfrac{\Omega}{\omega-i\nu_0}$, 按数量級 $|G|\sim 10^{14}\,\text{cm}^{-3}$, 如果 $\Omega t_0\approx 10$.

考虑各种极限情况:

如果交換作用不重要,卽远离共振峯时,

$$(1+2\eta)D \ll |F|^{5/3}|GB|^{-2/3},$$

$$\begin{aligned} Z=\frac{4J_1}{3\sqrt{3}}&\left(\frac{(1+\eta)^2+[i\omega'+\beta(1+\eta)]^2}{\eta(1+\eta)+(i\omega'+\beta\eta)[i\omega'+\beta(1+\eta)]}\right)^{2/3}\left[\frac{4\omega^4l^2(\omega^2+\nu_0^2)}{9\pi^2c^2\sigma^2\Omega^2}\right]^{1/6}\times \\ &\times\exp i\left(\frac{\pi}{2}+\theta_1\right), \end{aligned} \tag{24c}$$

$$\theta_1=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\nu_0}{\omega}.$$

在反正切函数中,应选出满足条件 $\mathrm{Re}\,Z>0$ 的一支. 如果与不考虑电导率旋磁性时的(16e)式比較,可以看出,在所討論的情况下,表面电阻从属于自由程,对頻率的从属关系以及虛部、实部之間的关系都不一样. 当然,这里还出現了对磁場的从属关系 $z\sim H_0^{-1/3}$,它通过 Ω 表現出来.

如果考虑积分項,則

$$Z=\frac{2i\omega}{\pi c}\left(\frac{B}{F}\right)^{2/3}\frac{1}{G^{1/3}}\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\int_0^\infty W(x)dx, \tag{24d}$$

这里 $W(x)$ 满足积分方程

$$W(x)=\frac{x}{x^3+1}\left\{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{W(x')\,dx'}{\sqrt{xx'}(x+x')}\right\},$$

$$J_1=\int_0^\infty W(x)\,dx\approx\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

这里我們取了二級近似.

在相反的极限情况下,即当交换作用很重要时,

$$Z=\frac{4J_2}{5\sin\frac{2\pi}{5}}\left(\frac{1}{27\pi}\right)^{1/5}\left\{\frac{(1+\eta)^2+[i\omega'+\beta(1+\eta)]^2}{1+2\eta}\right\}^{2/5}\left[\frac{M_s^4l^3c\omega^2(\omega^2+\nu_0^2)^{3/2}}{\sigma^3A^2\Omega^3}\right]^{1/5}\times$$

$$\times\exp i\left(\frac{\pi}{2}+\theta_2\right), \tag{24e}$$

$$\theta_2=-\frac{3}{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\nu_0}{\omega}.$$

这一情形下与不考虑磁場时的差别与上例类似. 第一、二级近似計算給出 $J_2\approx1.23$.

利用类似于第三节 1 中的討論,可以近似地估算出共振頻率的位移和附加綫寬,

$$\Delta H_r^{(a)}\approx50\left(\frac{A^3\omega^2\sigma^2}{M_sl^2c^4}\frac{\Omega^2}{(\omega^2+\nu_0^2)}\right)^{1/5}. \tag{25}$$

将此式与不考虑磁場影响的(17a)式比較,可以看出,在所討論的情形下:1)頻率从属关系不同; 2)位移和附加綫寬从属于碰撞頻率; 3)如果 $\Omega t_0\approx10$,移动和加寬約大两倍. 这些区别使得有可能从实驗中判别电导率旋磁性在自旋波共振中的作用.

3. 边界上 $\dfrac{d\mathbf{m}}{dz}=0$,电子作漫反射.

这一情况下最好将电場反对称地延拓到 $z<0$. Азбель 和 Канер 是用对称法延拓的. 在附录 II 中用类似方法在反对称延拓情形下求得了輸运方程的解.

如果条件(21)满足,且 $|\gamma|\ll1$,可以求得

$$j_\mu(k)=\frac{\pi P_0^2e^2}{h^3}\frac{\Omega}{i\omega+\nu_0}\left[\frac{\varepsilon_\mu(k)}{k}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varepsilon_\mu(k')\,dk'}{\sqrt{kk'}(k+k')}\right]. \tag{26}$$

取(5a)式的正弦傅氏变换,并考虑边界条件(7),求得

$$[D^2k^6+(1+2\eta)Dk^4+Fk^2]\varepsilon(k)+\frac{4\pi i\omega}{c^2}[D^2k^4+2(1+\eta)Dk^2+B]j(k)=$$

$$=2E(0)k[D^2k^4+(1+2\eta)Dk^2+F], \tag{27}$$

$$Z^{-1}=\frac{4\pi}{cE(0)}\int_0^\infty j(z)\,dz=\frac{4}{E(0)c}\int_0^\infty dz\int_0^\infty j(k)\sin kz\,dk. \tag{28a}$$

由于 $\int_0^\infty \frac{j(k)}{k} dk$ 存在，可以先完成对 z 的积分：

$$Z^{-1} = \frac{4}{cE(0)} \int_0^\infty \frac{j(k)\,dk}{k}. \tag{28b}$$

将 (26) 代入 (27) 即得积分方程. 与上节一样，用逐次近似法求解，并只限于一級近似. 略去积分中的小項后得到

$$Z^{-1} \approx \frac{6\sigma\Omega}{cl(i\omega + \nu_0)} \int_0^\infty \frac{D(1+2\eta)k^2 + F}{D(1+2\eta)k^5 + Fk^3 + BG} dk. \tag{28c}$$

考虑各种极限情形：

当交換作用不重要时，

$$Z = J_3 \left(\frac{4}{9\pi^2}\right)^{1/6} \frac{3\sqrt{3}}{4} \left\{\frac{(1+\eta)^2 + [i\omega' + \beta(1+\eta)]^2}{\eta(1+\eta) + (i\omega' + \beta\eta)[i\omega' + \beta(1+\eta)]}\right\}^{2/3} \times$$
$$\times \left[\frac{\omega^4 l^2(\omega^2 + \nu_0^2)}{c^2\Omega^2\sigma^2}\right]^{1/6} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \theta_1\right)}, \tag{28d}$$
$$\theta_1 = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\nu_0}{\omega};$$

当交換作用重要时，

$$Z = J_4 \left(\frac{1}{27\pi}\right)^{1/5} 5 \sin\frac{2\pi}{5} \left\{\frac{(1+\eta)^2 + [i\omega' + \beta(1+\eta)]^2}{1+2\eta}\right\}^{2/5} \times$$
$$\times \left[\frac{M_s^4\omega^2 c l^3(\omega^2 + \nu_0^2)^{3/2}}{A^2\sigma^3\Omega^3}\right]^{1/5} \exp i\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2\right), \tag{28e}$$
$$\theta_2 = -\frac{2}{5} \operatorname{arctg} \frac{\nu_0}{\omega}.$$

J_3, J_4 是数量級为 1 的数值系数. 与 (24c), (24e) 比較，可以看出，它們仅以系数相区別. 共振頻率的位移与附加綫寬与 $\mathbf{m} = 0$ 的情况类似.

五、討　　論

从以上的計算可以看出，反常趋肤效应极限下的自旋波共振具有下列特点：

(1) 表面阻抗，共振頻率移动，附加綫寬等与自由程无关；移动比正常趋肤效应給出的要小. 这一点与实驗定性符合. 但定量比較目前还有困难，因为 Rado 等人的实驗[3]是在液氮温度下作的，用的是巨莫合金，所以电导率只增大三倍. 本文中只給出超反常趋肤效应条件下的解析表达式，与此条件不符. 为了算出表面阻抗对磁場从属关系的全部理論曲綫，必須进行数值积分. 也許目前理論与实驗在低温下的差别不完全是由趋肤效应的反常性引起的. 这有待于用进一步的实驗来判定.

(2) 在反常趋肤效应条件下，表面阻抗对磁矩所滿足的边界条件仍很敏感，这一差别也許比正常趋肤效应时更大一些. 由于边界条件中的参量 α 是未知的，因此用自旋波共振来确定交換作用常数的方法就不太可靠[15].

(3) 在鉄磁金属中，导电电子表面散射的性質，对表面阻抗有影响，而且后者与頻率(或磁場)有关，这一点与普通金属不同.

(4) 如果考虑恆定磁場对导电电子的影响，則表面阻抗等特征量重新与自由程有关，而且共振峯的移动等比不考虑磁場影响时大. 因此，当不断降低温度时，共振峯的移动等可能会有一极小值. 由于目前沒有相应的实驗数据，这里不作进一步的討論.

(5) 自旋波共振頻率附近表面阻抗实部与虛部的关系与一般金属中很不一样，考虑磁場影响后又有很大的不同. 仔細測量这个比值有助于查明各种因素的影响.

最后，作者感謝 M. И. Kaганов 对这一工作的指导.

附录 I 电子在表面作漫反射条件下表面电阻的計算

如所周知[8]，在这一条件下 Boltzmann 方程的解是(如果 $\omega t_0 \ll 1$)

$$j(\zeta) = \frac{3}{4}\sigma\int_0^\infty K(\zeta-\xi)E(\xi)\,d\xi, \tag{I.1}$$

这里

$$K(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-s|x|}}{s}\,ds - \int_1^\infty \frac{e^{-s|x|}}{s^3}\,ds.$$

将 (I.1) 代入 (5a) 得积分微分方程

$$\left[W^2\frac{d^6}{d\zeta^6} - (1+2\eta)W\frac{d^4}{d\zeta^4} + F\frac{d^2}{d\zeta^2}\right]E(\zeta) +$$

$$+ i\alpha\left(W^2\frac{d^4}{d\zeta^4} - 2(1+\eta)W\frac{d^2}{d\zeta^2} + B\right)\int_0^\infty K(\zeta-\xi)E(\xi)\,d\xi = 0. \tag{I.2}$$

这是 Winer-Hopf 型的方程. 它可以在一般形式下求解，但計算非常复杂. 根据第三节 2 中所作的物理討論，可以只考虑一个近似的方程

$$\left[(1+2\eta)W\frac{d^4}{d\zeta^4} - F\frac{d^2}{d\zeta^2}\right]E(\zeta) + i\alpha B\int_{-\infty}^\infty K(\zeta-\xi)E(\xi)\,d\xi = g(\zeta). \tag{I.2a}$$

所有的物理量在 $z<0$ 都补充定义为 0. 这里我們引进了一个函数

$$g(\zeta) = \theta(-\zeta)i\alpha B\int_0^\infty K(\zeta-\xi)E(\xi)\,d\xi. \tag{I.3}$$

取双边 Laplace 变换并进行分部积分后，求得

$$[(1+2\eta)Ws^4 - Fs^2 + i\alpha BK(s)]\varepsilon(s) = Q(s). \tag{I.4}$$

这里

$$Q(s) = g(s) + (1+2\eta)W(s^3E(0) + s^2E'(0) + sE''(0) + E^{(III)}(0)) -$$
$$- F(sE(0) + E'(0)),$$

$$K(s) = \frac{1}{s^3}\left\{2s - (1-s^2)\ln\frac{1+s}{1-s}\right\}. \tag{I.4a}$$

$\varepsilon(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\,s>0$ 中是解析的，有限的. $g(s)$ 在 $\mathrm{Re}\,s<1$ 的半平面中，$K(s)$ 在 $|\mathrm{Re}\,s|<1$ 的区域內也有类似的性質.

由 $E^{(IV)}(\zeta)$ 的有限性可以得出下列分解式：

$$\varepsilon(s) = \frac{E(0)}{s} + \frac{E'(0)}{s^2} + \frac{E''(0)}{s^3} + \frac{E^{(III)}(0)}{s^4} + O\left(\frac{1}{s^5}\right). \tag{I.5}$$

考虑下列函数：

$$\tau(s) = \frac{[(1+2\eta)Ws^4 - Fs^2 + i\alpha BK(s)]\,(s^2-1)^{n-2}}{(1+2\eta)W(s^2-s_1^2)\cdots(s^2-s_n^2)}.$$

s_r 是特征方程

$$(1+2\eta)Ws^4 - Fs^2 + i\alpha BK(s) = 0 \tag{I.6}$$

的根, $r = 1, 2, \cdots, n$, $\mathrm{Re}\, s_r > 0$.

根据常用方法进行因子化

$$\tau(s) = \frac{\tau_+(s)}{\tau_-(s)},$$

$$\tau_+(s) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty}\frac{\ln\tau(z)}{z-s}\,dz\right\} \qquad \mathrm{Re}\, s > -1,$$

$$\tau_-(s) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\ln\tau(z)}{z-s}\,dz\right\} \qquad \mathrm{Re}\, s < 1,$$

$$\text{实数}\quad 0 < c < 1. \tag{I.7}$$

遵循一般的討論[8],并考虑到 (I.5) 式, 求得

$$\varepsilon(s) = \frac{E(0)(s+x)}{\tau_+(s)\,(s+1)^{2-n}(s+s_1)\cdots(s+s_n)}. \tag{I.8}$$

在同一近似下,边界条件簡化为

$$E^{(\mathrm{III})}(0) \approx -\frac{BE'(0)}{(1+2\eta)W}, \text{ 如果 } \mathbf{m}\Big|_{z=0} = 0. \tag{I.9a}$$

$$E''(0) = 0, \qquad\qquad \text{如果 } \frac{d\mathbf{m}}{dz}\Big|_{z=0} = 0. \tag{I.9b}$$

討論各种极限情形:

正常趋肤效应条件下, $\alpha \ll 1$. 特征方程在 $|\mathrm{Re}\, s| < 1$ 区域內有四个根. 不用积分卽可完成因子化. 在 $\mathbf{m} = 0$ 和 $\frac{d\mathbf{m}}{dz} = 0$ 的条件下分别得到 (16c) 和 (20c) 式. 这一点是很自然的,因为在正常趋肤效应条件下,表面阻抗与电子在表面如何散射无关.

在反常趋肤效应极限 $\alpha \gg 1$, $|\mathrm{Re}\, s| < 1$ 域內无根.

令

$$\tau_+(s) = 1 + \frac{\lambda}{s} + \frac{\mu}{s^2} + \frac{\nu}{s^3} + O\left(\frac{1}{s^4}\right), \tag{I.10}$$

由 (I.5) 可以求得

$$\begin{aligned} E'(0) &= E(0)\,[x - (\lambda+2)], \\ E''(0) &= -E(0)\,(\mu + 2\lambda + 1) - E'(0)(\lambda+2), \\ E^{(\mathrm{III})}(0) &= -E(0)(\nu + 2\mu + \lambda) - E'(0)(\mu + 2\lambda + 1) - E''(0)(\lambda+2). \end{aligned} \tag{I.11}$$

如果交换作用不重要,我們得到一个表面电阻表达式,它只与鏡面反射条件下的結果差一系数 $\frac{9}{8}$.

在 $\frac{d\mathbf{m}}{dz} = 0$ 的边界条件下,

$$x = \frac{\lambda^2 + \lambda + 3 - \mu}{\lambda + 2}. \tag{I.12}$$

$$j(\zeta)=\frac{3}{4}\sigma\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{s\zeta}K(s)\varepsilon(s)\,ds, \tag{I.13}$$

$$Z^{-1}=\frac{4\pi l}{cE(0)}\int_0^\infty j(\zeta)\,d\zeta=\frac{3il\sigma}{2c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_1(t)}{t}\,\frac{(it+x)}{(1+it)^2\tau_+}\,dt, \tag{I.14}$$

这里 $K_1(t)=K(it)$. 积分只能用数值法計算.

在 $\mathbf{m}=0$ 的情况下,

$$Z=-\frac{i\omega l}{c}\frac{E(0)}{E'(0)}=\frac{-i\omega l}{c}\frac{1}{x-(\lambda+2)}=$$

$$=\frac{i\omega l}{c}\frac{\lambda^2+2\lambda+3-\mu+\dfrac{B}{W(1+2\eta)}}{\lambda\mu+2\lambda^2+4\lambda+2-\nu}. \tag{I.15}$$

在交换作用很重要的极限情况下可以用分部积分法求出

$$\tau_+(s)=\exp\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\dfrac{t^5+ib\,\mathrm{sgn}\,t}{t(t^2+1)^2}}{t+is}\,dt\right],$$

$$b=\frac{\alpha\pi B}{(1+2\eta)W}.$$

按 $1/s$ 的漸近分解式. 将結果代入 (I.15) 式后可得

$$Z=\frac{i\omega l}{c}\,\frac{3}{2}\,\frac{I_1^2b^{2/5}+\dfrac{2B}{W(1+2\eta)}}{b^{3/5}(I_1^3+I_2)}. \tag{I.15a}$$

这里

$$I_1=\left(\frac{3}{2}+\cos\frac{4\pi}{5}+3\cos\frac{2\pi}{5}\right)+i\left(\frac{4}{5}\sin\frac{2\pi}{5}-\frac{2}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\right)\approx 1.62+0.52i,$$

$$I_2=-\left(\frac{3}{2}+\cos\frac{2\pi}{5}+3\cos\frac{4\pi}{5}\right)+i\left(\frac{2}{5}\sin\frac{2\pi}{5}+\frac{4}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\right)\approx 0.62+0.85i.$$

估算表明, (I.15a) 式中分子的第一項比第二項远小(10^3 倍). 近似地求得

$$Z\approx\frac{\omega l}{2c}\frac{1}{(\alpha\pi)^{3/5}}\left(\frac{B}{W(1+2\eta)}\right)^{2/5}e^{\frac{\pi}{5}i}. \tag{I.15b}$$

与鏡面反射条件下的結果 (16f) 相比,

$$\frac{Z_{\text{鏡}}}{Z_{\text{漫}}}\approx 0.84.$$

这就是在第三节 3 中所已引用的結論.

附录 II 电場反对称延拓条件下用 Азбель-Канер 方法求解 Boltzmann 方程

引入函数 $\psi(z,\mathbf{P})=f_1(z,\mathbf{P})-f_1(z,-\mathbf{P})$. 为得到 ψ 的方程,将(8)改写成

$$\frac{\partial}{\partial z}f_1(z,\mathbf{P})+\hat{L}f_1(z,\mathbf{P})=\frac{G(z,\mathbf{P})}{V_z}, \tag{II.1a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f_1(z, -\mathbf{P}) - \hat{L} f_1(z, -\mathbf{P}) = \frac{G(z, \mathbf{P})}{V_z}, \tag{II.1b}$$

这里

$$\hat{L} = \frac{1}{V_z}\left(\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} + i\omega + \nu_0\right), \qquad G = e\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\mathbf{EV}.$$

由 (II.1) 求得

$$\frac{\partial^2 \psi(z, \mathbf{P})}{\partial z^2} - \hat{L}^2 \psi(z, \mathbf{P}) = 2\hat{L}\frac{G(z, \mathbf{P})}{V_z}. \tag{II.2}$$

将 ψ, E 反对称地延拓到 $z < 0$, 取傅氏变換

$$(k^2 + \hat{L}^2)\psi(k, \mathbf{P}) = 2\hat{L}\left(\frac{G(k)}{V_z}\right) + 2k\psi(0, \mathbf{P}). \tag{II.3}$$

将 (II.1a), (II.1b) 相加,并由 0 到∞进行积分,可将电子作漫反射的条件改写成

$$\int_0^\infty \hat{L}\psi(z, \mathbf{P})\, dz = 2\int_0^\infty \frac{G(z, \mathbf{P})}{V_z} dz - \psi(0, \mathbf{P}) \operatorname{sgn} V_z. \tag{II.4}$$

注意到,如果我們不要求很精确地計算表面电阻,而是只准到数量級为 1 的系数,可以假定 $\psi(0, \mathbf{P}) = 0$. 这意味着边界上无电流. 虽然这一条件实际上并不滿足,但所得到的近似仍旧很好. 这是由于在反常趋肤效应极限下起主要作用的是沿边界"滑动"但不与边界碰撞的电子. 从这里也可看出,为什么可以用逐次近似法求解由(23)和(27)得到的积分方程,虽然沒有明显的小参量. 这是由于略去积分項相应于假定 $\psi(0, \mathbf{P}) = 0$.

由 (II.3) 式求得

$$\psi(k, \mathbf{P}) = [(\hat{L} + ik)^{-1} + (\hat{L} - ik)^{-1}]\left(\frac{G(k, \mathbf{P})}{V_z}\right) + $$
$$+ i[(\hat{L} + ik)^{-1} - (\hat{L} - ik)^{-1}]\psi(0, \mathbf{P}).$$

满足对 τ 周期性条件的解是

$$\psi(k, \mathbf{P}) = \frac{2}{\Omega}\int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 G(k, \tau_1) \exp\left(\int_\tau^{\tau_1} \gamma\, d\tau_2\right) \cos\left(k\int_\tau^{\tau_1} \frac{V_z}{\Omega} d\tau_2\right) -$$
$$- \frac{2}{\Omega}\int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 V_z \psi(0, \tau_1) \exp\left(\int_\tau^{\tau_1} \gamma\, d\tau_2\right) \sin\left(\int_\tau^{\tau_1} \frac{kV_z}{\Omega} d\tau_2\right), \tag{II.5}$$

这里 $\gamma = i\dfrac{\omega}{\Omega} + \dfrac{\nu_0}{\Omega}$. 与此类似地求得

$$\hat{L}\psi(k, \mathbf{P}) = [(\hat{L} + ik)^{-1} + (\hat{L} - ik)^{-1}]\hat{L}\left(\frac{G(k, \mathbf{P})}{V_z}\right) + $$
$$+ k[(\hat{L} - ik)^{-1} + (\hat{L} + ik)^{-1}]\psi(0, \mathbf{P})$$

的表达式

$$\hat{L}\psi(k, \mathbf{P}) = \frac{2}{\Omega}\int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 V_z \hat{L}\left(\frac{G(k, \tau_1)}{V_z}\right) \exp\left(\int_\tau^{\tau_1} \gamma\, d\tau_2\right) \cos\left(\int_\tau^{\tau_1} \frac{kV_z}{\Omega} d\tau_2\right) +$$
$$+ \frac{2k}{\Omega}\int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 V_z \psi(0, \tau_1) \exp\left(\int_\tau^{\tau_1} \gamma\, d\tau_2\right) \cos\left(\int_\tau^{\tau_1} \frac{kV_z}{\Omega} d\tau_2\right). \tag{II.6}$$

将 (II.6) 代入边界条件 (II.4), 即得出求 $\psi(0, \mathbf{P})$ 的函数方程

$$\psi(0, \tau) \operatorname{sgn} V_z + 2\int_{-\infty}^{\tau} V_z \psi(0, \tau_1) \exp\left(\int_\tau^{\tau_1} \gamma\, d\tau_2\right) \delta\left(\int_\tau^{\tau_1} V_z d\tau_2\right) d\tau_1 = 2F(\tau), \tag{II.7}$$

这里

$$F(\tau)=\int_0^\infty \frac{G(z,\mathbf{P})}{V_z}dz-\frac{1}{\pi\Omega}\int_0^\infty dz\int_0^\infty dk\sin kz\int_{-\infty}^{\tau}d\tau_1 V_z\hat{L}\left(\frac{G}{V_z}\right). \qquad (\text{II}.8)$$

任意一个 τ 的周期函数 $R(\tau)$（周期为 2π）具有下列性质：

$$\int_{-\infty}^{\tau}d\tau_1 R(\tau_1)\exp\left(\int_{\tau}^{\tau_1}\gamma\,d\tau_2\right)=\frac{1}{e^{2\pi\bar{\gamma}}-1}\int_{\tau}^{\tau+2\pi}d\tau_1 R(\tau_1)\exp\left(\int_{\tau}^{\tau_1}\gamma\,d\tau_2\right),$$

$$\bar{\gamma}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma\,d\tau_1.$$

利用这一性质在 $F(\tau)$ 的表达式中进行分部积分，求得

$$F(\tau)=-\frac{1}{\pi\Omega}\int_0^\infty dk'\int_{-\infty}^{\tau}d\tau_1 G(k',\tau_1)\exp\left(\int_{\tau}^{\tau_1}\gamma\,d\tau_2\right)\sin\left(\int_{\tau}^{\tau_1}\frac{k'V_z}{\Omega}d\tau_2\right), \qquad (\text{II}.8\text{a})$$

$$\psi(0,\mathbf{P})=\frac{\operatorname{sgn}V_z}{\Omega\pi}\int_0^\infty dk'\int_{\tau}^{\lambda(\tau)}d\tau_1 G(k',\tau_1)\exp\left(\int_{\tau}^{\tau_1}\gamma\,d\tau_2\right)\sin\left(\int_{\tau}^{\tau_1}\frac{k'V_z}{\Omega}d\tau_2\right). \qquad (\text{II}.9)$$

这里 $\lambda(\tau)$ 是最靠近 τ、比 τ 小且满足条件 $P_y(\lambda(\tau))=P_y(\tau)$ 的点．求得电流的傅氏变换

$$j_\mu(k)=-\frac{e}{h^3}\int\psi(k,\mathbf{P})V_\mu m\,d\tau\,d\varepsilon\,dP_x, \qquad \mu=x,\ y \qquad (\text{II}.10)$$

$$j_\mu(k)=K_{\mu\nu}(k)\varepsilon_\nu(k)+\int_0^\infty Q_{\mu\nu}(k,k')\varepsilon_\nu(k')\,dk', \qquad (\text{II}.10\text{a})$$

这里

$$K_{\mu\nu}(k)=\frac{2e^2}{h^3}\int_0^\infty\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)d\varepsilon\int_{P_x^{\min}}^{P_x^{\max}}dP_x\frac{m}{\Omega}\int_0^{2\pi}d\tau V_\mu(\tau)\int_{-\infty}^{\tau}d\tau_1 V_\nu(\tau_1)\times$$

$$\times\exp\left(\int_{\tau}^{\tau_1}\gamma\,d\tau_2\right)\cos\left(\frac{k}{\Omega}\int_{\tau}^{\tau_1}V_z\,d\tau_2\right),$$

$$Q_{\mu\nu}(k,k')=\frac{2e^2}{\pi h^3}\int_0^\infty\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)d\varepsilon\int_{P_x^{\min}}^{P_x^{\max}}dP_x\frac{m}{\Omega^2}\int_0^{2\pi}d\tau V_\mu(\tau)\int_{-\infty}^{\tau}d\tau_1|V_z(\tau_1)|\times$$

$$\times\sin\left(\frac{k}{\Omega}\int_{\tau}^{\tau_1}V_z\,d\tau_2\right)\int_{\lambda(\tau_1)}^{\tau_1}d\tau_2 V_\nu(\tau_2)\exp\left(\int_{\tau}^{\tau_2}\gamma\,d\tau_3\right)\sin\left(\frac{k'}{\Omega}\int_{\tau_1}^{\tau_2}V_z\,d\tau_3\right).$$

若与对称延拓情形下的結果相比較[11]，差别仅在第二项，这里是正弦的乘积，而且符号相反．

到此为止，我們还未作任何近似．所得結果对于任意色散律、任意性质的趋肤效应和任意大小的磁場都是适用的．在反常趋肤效应极限和磁場相当強［满足条件(21)］的情形下，可以得到一个較簡单的电流漸近表达式．为具体起見，我們只討論了平方色散律的情况．由于計算很繁，这里只写出最后結果：

$$j_\mu(k)=\frac{2\pi^2P_0^2e^2}{h^3}\left\{\frac{\varepsilon_\mu(k)}{k}[1-\exp(-2\pi\gamma)]^{-1}+\frac{\operatorname{ch}^2\pi\gamma}{\pi(e^{2\pi\gamma}-1)}\times\right.$$

$$\times\int_0^\infty\frac{\varepsilon_\mu(k')\,dk'}{\sqrt{kk'}(k+k')}+\frac{1+\exp(-\pi\gamma)\operatorname{ch}\pi\gamma}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon_\mu(k')\ln\dfrac{k}{k'}}{k^2-k'^2}dk'+$$

$$+\frac{\varepsilon_\mu(k)}{k}O\left(\frac{1}{kr}\right)\Big\}. \tag{II.11}$$

在 $|\gamma| \ll 1$ 的強磁場条件下可进行展开，且只保留最低次項:

$$j_\mu(k)=\frac{\pi P_0^2 e^2}{h^3}\frac{\Omega}{i\omega+\nu_0}\left\{\frac{\varepsilon_\mu(k)}{k}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varepsilon_\mu(k')\,dk'}{\sqrt{kk'}(k+k')}\right\}. \tag{II.11a}$$

这就是正文中所已引用的(26)式。

参 考 文 献

[1] Вонсовский, С. В., Ферромагнитный резонанс (1961), Москва.
[2a] Kittel, C., *Phys. Rev.*, **110** (1958), 1295.
[2b] Seavey, M. H., Tannenwald, P. E., *Phys. Rev., Let.*, **1** (1958), 158.
[3a] Rado, G. T., Weertman, J. P., *Phys. Rev.*, **94** (1954), 1386.
[3b] Rado, G. T., Weertman, J. P., *Jour. Phys. Chem. Solids*, **11** (1959), 315.
[4] Rodbell, D. S., *J. A. P. Suppl.*, **30** (1959), 1875.
[5] Kittel, C., Herring, C., *Phys. Rev.*, **77** (1950), 725.
[6] Ament, W. S., Rado, G. T., *Phys. Rev.*, **97** (1955), 1558.
[7] Pippard, A. B., *Proc. Roy. Soc.*, **A191** (1947), 385.
[8] Reuter, G. E. H., Sondheimer, E. H., *Proc. Roy. Soc.*, **A195** (1948), 336.
[9] Каганов, М. И., Азбель, М. Я., *ДАН*, **102** (1955), 49.
[10] Азбель, М. Я., Каганов, М. И., *ДАН*, **95** (1954), 41; Азбель, М. Я., *ДАН*, **100** (1955), 437.
[11] Азбель, М. Я., Канер, Э. А., *ЖЭТФ*, **32** (1957), 896.
[12] Гуревич, В. Л., *ЖЭТФ*, **33** (1957), 1497.
[13] Гуревич, В. Л., *ЖТФ*, **28** (1958), 2352.
[14] Rado, G. T., *J. A. P.*, **29** (1958), 330.
[15] Каганов, М. И., Юй Лу (于渌), *Изв. АН СССР сер. физ.*, **25**, № 11 (1961).
[16] Лифшиц, И. М., Азбель, М. Я., Каганов, М. И., *ЖЭТФ*, **31** (1956), 64.
[17] Jan, J-P., Solid State Phys., ed. by F. Seitz and D. Jurnbull, 5 (1957), 1.

SURFACE IMPEDANCE OF FERROMAGNETIC METALS AND SPIN-WAVE RESONANCE

Yu Luh

Abstract

The surface impedance of a ferromagnetic metal in a parallel magnetic field has been calculated. Both exchange interaction and the anomalous character of skin-effect have been taken into account. Calculation has been carried out for both the "exchange" boundary condition $\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n}=0$ and the "pinning" condition $\mathbf{m}=0$ for the magnetic moment. The influence of the boundary scattering character of conduction electrons has been also considered. Furthermore, by making use of the Азбель-Канер method in the theory of cyclotron resonance the surface impedance has been evaluated with the gyrotropy of the electrical conductivity taken into account.