第 27 卷 第 9 期
2004 年 9 月
计 算 机 学 报
CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS
Vol. 27 No. 9
Sept. 2004

二次背包问题的一种快速解法

谢 涛[1)] 陈火旺[1)] 康立山[2)]
[1)](国防科学技术大学计算机学院 长沙 410073)
[2)](武汉大学软件工程国家重点实验室 武汉 430072)

摘 要 在分析了二次背包问题(QKP)精确算法的计算效率随利润矩阵密度下降的原因的基础上,提出了不受密度影响的 QKP 快速解法——利润欺骗法. 在线性化 QKP 的目标上界估计中,利润欺骗法通过引进一适当正常数对称扩展 Lagrangian 乘子的变化范围,亚梯度优化算法能较快地找到一 Lagrangian 乘子矩阵,使对偶问题的解逼近线性化 QKP 问题的等式约束条件. 通过提高目标函数的估计精度,利润欺骗法可以提高变量约简效率,降低分支决策深度. 实例计算表明,快速算法的效率远高于精确算法,而且计算精度并不降低.

关键词 二次规划;二次背包问题;Lagrangian 松弛;分支定界算法
中图法分类号 TP301

A Fast Algorithm of Quadratic Knapsack Problem

XIE Tao[1)] CHEN Huo-Wang[1)] KANG Li-Shan[2)]
[1)](*School of Computer, National University of Defense Technology, Changsha* 410073)
[2)](*National Key Laboratory of Software Engineering, Wuhan University, Wuhan* 430072)

Abstract The cause that the computational efficiency of the fast algorithm for quadratic knapsack problems (QKP) decreases with the density of positive profits, has been theoretically analyzed. A profit swindling-based fast algorithm which is not subject to the density of positive profits is specially proposed for QKP with non-positive profits. In the upper bound computing of the linearized QKP, the fast algorithm symmetrically expands the domain of Lagrangian multipliers by increasing all profits by an appropriate positive constant, so that the sub-gradient algorithm can obtain an optimal Lagrangian multiplier matrix and the solution to the dual problem approach the equality constrains of the linearized QKP. The improved estimation precision of the optimal value further increases the reduction efficiency, and eventually decreases the branching depth of the branch-and-bound algorithm. Computational results show that this profit swindling-based fast algorithm greatly exceeds the exact QKP algorithm in overall efficiency, without exactness reduction.

Keywords quadratic programming; quadratic knapsack problem; Lagrangian relaxation; branch-and-bound algorithm

1 引 言

0-1 二次背包问题如下:

给定 n 个项目集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$,设项目 i 的重量为 $w_i(>0)$,背包容量为 c. 项目利润集合以矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$表示,其中 p_{ii} 是项目 i 自身的利润,$(p_{ij}+p_{ji})$是项目 i 与项目 j 的协作利润,$j>i$. 0-1 二次背包问题就是选择一项目子集 $S\subseteq N$,使得在$\sum_{i\in S} w_i\leq c$ 的条件下,最大化总利润值 $z=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$,其

收稿日期:2003-09-01;修改稿收到日期:2004-06-22. 本课题得到国家自然科学基金(60133010,69903010)资助. **谢 涛**,男,1966 年生,博士,教授,主要研究方向为软计算、组合数学、网络信息安全、复杂性与复杂科学. E-mail: taoxie@nudt.edu.cn. **陈火旺**,男,1936 年生,中国工程院院士,博士生导师,主要研究领域为软件工程、数理逻辑、机器翻译、智能计算. **康立山**男,1934 年生,教授,博士生导师,主要研究领域为并行计算、演化计算、计算数学.

中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$x_i=\begin{cases}1, & i\in S\\ 0, & i\notin S\end{cases}$. 为叙述方便，0-1 二次背包问题以下简称 QKP. 在工程定址、水文地理、编译器设计、集成电路设计以及图论中，QKP 都有重要的实用价值. QKP 可在图论中找到直接的理论解释，QKP 即是 Clique 问题的一种推广形式[1]. QKP 与 Max Clique 问题具有同样的特征，是一种比求解简单背包问题困难得多的组合优化问题，甚至不存在多项式的近似算法[2].

Gallo 等[3]首先研究了 QKP 的精确求解技术，提出应用上端平面技术(upper planes)估计上界的精确算法. Billionnet 等[4]采用 QKP 的整数规划形式，应用分支切割法(branch-and-cut)求解. Chaillou[5]，Michelon[6]，Hammer[7]与 Billionnet 等[8]采用了 Lagrangian 松弛法. Helmberg 等[9]研究了更一般的 QKP,其中利润矩阵含有负值元素，应用切割平面与半定规划的混合方法，可得到非常紧的上界. Caprara 等[1]研究了具有对称的非负利润矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的 QKP 问题的分支定界精确算法. 为了提高 QKP 最优值的上界估计精度，Caprara 采用线性化 QKP 的 Lagrangian 连续松弛形式，转化为多个连续背包问题求解，Lagrangian 乘子矩阵采用亚梯度优化算法计算. Caprara 的精确算法虽在计算效率上远优于 Gallo[3]，Chaillou[5]，Michelon[6]，Hammer[7]与 Billionnet[8]等算法，但实例计算中 Caprara 却发现，精确算法的效率随利润矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中正值元素的密度减小而降低. 例如，在所设定的时间上限内(50,000s)，当密度分别为 25%与 50%时，Caprara 仅能计算至 $n=120$ 与 $n=160$；而当密度分别为 75%与 100%时，可计算至 $n=360$ 与 $n=400$. Caprara 等没有分析算法效率受密度影响的原因.

本文从理论上进一步阐述了 QKP 的线性化形式与 Lagrangian 连续松弛方法，证明了线性化 QKP 的 Lagrangian 连续松弛形式满足等式约束条件的最优解即最小最优解；论证了当利润矩阵元素均为正值时，线性化 QKP 的 Lagrangian 连续松弛形式存在可使最优解逼近等式约束条件的 Lagrangian 乘子矩阵，并在此基础上提出可以逼近等式约束条件的利润欺骗法. 利润欺骗法将一般利润矩阵修改为正利润矩阵，通过对称扩展 Lagrangian 乘子的变化范围，使对偶问题的利润欺骗解逼近线性化 QKP 问题的等式约束条件，提高目标函数估计精度. 利润欺骗法可使变量约简效率大为提高，大幅度降低分支定界算法的决策深度，容易计算规模超过 $n=400$ 的低密度 QKP.

2　QKP 的线性化与上界估计

2.1　QKP 的线性规划模型

QKP 的数学模型即为 0-1 二次整数规划问题，记为 QKP_1：

$$\max \quad z(\mathrm{QKP})=\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}p_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in N}w_ix_i\le c,\ x_i\in\{0,1\},\ i\in N.$$

不失一般性，假定 $\max\limits_{i\in N}w_i\le c<\sum\limits_{i\in N}w_i$. 仅考虑对称利润矩阵 $\boldsymbol{P}_{n\times n}$，即 $\forall\, i,j\in N,\ j>i,\ p_{ij}=p_{ji}$. 引入变量 y_{ij} 取代 x_ix_j，$i,j\in N, j\ne i$，y_{ij} 与 x_i 和 x_j 的关系用以下不等式约束条件表示. 记 $q_i=p_{ii}$，线性化后，QKP 等价于一整数线性规划问题，记为 $\mathrm{ILP}_{2\sim 7}$.

$$\max \quad z(\mathrm{QKP})=\sum_{j\in N}\sum_{i\in N\setminus\{j\}}p_{ij}y_{ij}+\sum_{j\in N}q_jx_j \tag{2}$$

s. t.

$$\sum_{j\in N}w_jx_j\le c \tag{3}$$

$$\sum_{i\in N\setminus\{j\}}w_iy_{ij}\le(c-w_j)x_j,\ j\in N \tag{4}$$

$$0\le y_{ij}\le x_j\le 1,\ i,j\in N,\ j\ne i \tag{5}$$

$$y_{ij}=y_{ji},\ i,j\in N,\ j>i \tag{6}$$

$$x_j,y_{ij}\in\{0,1\},\ i,j\in N,\ j\ne i \tag{7}$$

由式(2)～(5)组成的线性规划问题记为 $\mathrm{LP}_{2\sim 5}$，由式(2)～(6)组成的线性规划问题记为 $\mathrm{LP}_{2\sim 6}$.

2.2　QKP 的上界计算

定理 1.　$\mathrm{LP}_{2\sim 5}$ 的最优值是 $\mathrm{LP}_{2\sim 6}$ 的最优值的一个上界，即 $z^*(\mathrm{LP}_{2\sim 5})\ge z^*(\mathrm{LP}_{2\sim 6})$，当式(6)满足时等式成立.

证明.　由 $\mathrm{LP}_{2\sim 5}$ 的约束条件少于 $\mathrm{LP}_{2\sim 6}$ 的约束条件可知，$\mathrm{LP}_{2\sim 5}$ 的可行域包含 $\mathrm{LP}_{2\sim 6}$ 的可行域，从而必有 $z^*(\mathrm{LP}_{2\sim 5})\ge z^*(\mathrm{LP}_{2\sim 6})$，当两可行域相互包含时等式成立.　证毕.

定理 2.　$\mathrm{LP}_{2\sim 6}$ 的最优值是 $\mathrm{ILP}_{2\sim 7}$(即 QKP 本身)的一个上界，即 $z^*(\mathrm{LP}_{2\sim 6})\ge z^*(\mathrm{ILP}_{2\sim 7})$.

证明.　同定理 1，略.

因此，$\mathrm{LP}_{2\sim 5}$ 的最优值是 QKP 的上界估计.

定理 3[1].　$\mathrm{LP}_{2\sim 5}$ 的最优解 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})$ 可由下列三步求取，即可分解为 $(n+1)$ 个连续背包问题(CKP)，采用 Dantzig 贪婪算法求解，其计算复杂度为 $O(n^2)$.

1. 求解与约束条件(4)对应的 n 个 CKP，分别记为 $\mathrm{CKP}_1\sim\mathrm{CKP}_n$；$\mathrm{CKP}_j$ 可表示如下，设其最优解为 $\bar{\pi}_{ij}$，$i\in N\setminus\{j\}$：

$$\max \quad \bar{p}_j=\sum_{i\in N\setminus\{j\}}p_{ij}\pi_{ij} \tag{8}$$

s. t. $\sum_{i\in N\setminus(j)} w_i\pi_{ij} \le (c-w_j), \pi_{ij}\in[0,1]$;

2. 求解与约束条件(3)相对应而利润为$(\bar{p}_j+q_j)$的CKP,记为CKP_{n+1}. 设其最优解为$\bar{x}_j$, $j\in N$,即

$$\max \sum_{j\in N}(\bar{p}_j+q_j)x_j \tag{9}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum w_j x_j \le c,\ x_j\in[0,1], j\in N;$$

3. 计算$\bar{y}_{ij}=\bar{\pi}_{ij}\bar{x}_j, i,j\in N, i\ne j$.

一般地,$LP_{2\sim5}$的最优解$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$并不满足等式约束条件(6). 为提高上界估计的精度,引进 Lagrangian 乘子矩阵对等式约束条件(6)进行对偶松弛,通过调整 Lagrangian 乘子最小化$LP_{2\sim5}$的最优值.

2.3 Lagrangian 松弛

引入 Lagrangian 乘子矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=(\lambda_{ij})_{n\times n}$,其中$\lambda_{ij}$是与式(6)相对应的乘子,且有$\lambda_{ij}+\lambda_{ji}=0$. 对目标函数(2)进行修改,得到相应的 Lagrangian 松弛目标函数:

$$\max z(L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}))=\sum_{j\in N}\sum_{i\in N\setminus\{j\}}\hat{p}_{ij}y_{ij}+\sum_{j\in N}q_jx_j \tag{10}$$

其中,对于$i,j\in N, j\ne i$, $\hat{p}_{ij}=p_{ij}+\lambda_{ij}$, $\hat{p}_{ij}$称为 Lagrangian 利润.

目标函数(10)与约束条件(3)～(5)构成$LP_{2\sim5}$的连续 Lagrangian 松弛形式,记为$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$. $L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$是$LP_{2\sim6}$关于等式约束(6)的对偶问题[10]. 因此,存在一个最优矩阵$\boldsymbol{\Lambda}^*$,使得$z(L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^*))=\min_{\boldsymbol{\Lambda}} z(L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}))$.

定理4[1]. 存在最优 Lagrangian 乘子矩阵$\boldsymbol{\Lambda}^*$,使得$\hat{p}_{ij}\ge0$,其中$i,j\in N, j\ne i$.

定理4表明,$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^*)$的最优解值最小的必要条件是所有 Lagrangian 利润非负,即$\hat{p}_{ij}\ge0$, $i,j\in N, j\ne i$. 由此可知乘子$\lambda_{ij}\in[-p_{ij},p_{ij}]$. 满足等式约束集合(6)的$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^*)$的最优解即为$LP_{2\sim6}$的最优解.

定理5. 如果$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的最优解$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$满足等式约束集合(6),则$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}^*$,且$z^*(LP_{2\sim6})=z^*(L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^*))$.

证明. 可以证明,如果$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的最优解中存在$\bar{y}_{ij}\ne\bar{y}_{ji}, i,j\in N, j>i$,则$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的最优值一定大于$LP_{2\sim6}$的最优值.

假设当$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}^*$时,$\bar{y}_{ij}=\bar{y}_{ji}, i,j\in N, j>i$. 不失一般性,可以通过修改$\lambda_{ij}$使得$\bar{y}_{ij}>\bar{y}_{ji}$. 如果增大$\lambda_{ij}$至$(\lambda_{ij}+\delta)$,则$\hat{p}_{ij}$相应增至$(\hat{p}_{ij}+\delta)$,而$\hat{p}_{ji}$降至$(\hat{p}_{ji}-\delta)$,其中$\delta>0$. 设因增大$\hat{p}_{ij}$而导致$CKP_j$中序号为$a$的元素被置出,则有$\frac{\hat{p}_{aj}}{w_a}<\frac{\hat{p}_{ij}+\delta}{w_i}$,即$(\hat{p}_{ij}+\delta)w_a-\hat{p}_{aj}w_i>0$,而最优值的变化量$\Delta_j=\bar{y}'_{ij}(\hat{p}_{ij}+\delta)-\hat{p}_{aj}-\bar{y}_{ij}\hat{p}_{ij}$,其中$\bar{y}'_{ij}=\bar{y}_{ij}+\frac{w_a}{w_i}$;又设因降低$\hat{p}_{ji}$而导致$CKP_i$中序号为$b$的元素被置入,则有$\frac{\hat{p}_{ji}-\delta}{w_j}<\frac{\hat{p}_{bi}}{w_b}$,即$\hat{p}_{bi}w_j-(\hat{p}_{ji}-\delta)w_b>0$,而最优值的变化量$\Delta_i=\bar{y}'_{ji}(\hat{p}_{ji}-\delta)+\hat{p}_{bi}-\bar{y}_{ji}\hat{p}_{ji}$,其中$\bar{y}'_{ji}=\bar{y}_{ji}-\frac{w_b}{w_j}$. 元素置换后两CKP的最优值变化总和$\Delta=\Delta_i+\Delta_j=\frac{\hat{p}_{bi}w_j-(\hat{p}_{ji}-\delta)w_b}{w_j}+\frac{(\hat{p}_{ij}+\delta)w_a-\hat{p}_{aj}w_i}{w_i}>0$,即通过修改 Lagrangian 乘子使得至少存在一对项目$i,j\in N, j>i$,在$\bar{y}_{ij}>\bar{y}_{ji}$成立时,$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的最优值有所增加. 同理可证,可以通过修改$\lambda_{ij}$使得至少存在一对$i,j\in N, j>i$,在$\bar{y}_{ij}<\bar{y}_{ji}$成立时,$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的最优值亦有所增加. 因此,当$\bar{y}_{ij}=\bar{y}_{ji}, i,j\in N, j>i$时,$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的最优解取最小值,即$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}^*$;此时,目标函数(2)与其 Lagrangian 松弛式(8)等价,$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^*)$的最优解即为$LP_{2\sim6}$的最优解. 证毕.

事实上,并非所有 QKP 都存在可使对偶问题的最优解满足等式约束条件(6)的 Lagrangian 乘子矩阵$\boldsymbol{\Lambda}^*$.

定理6. 当利润矩阵$\boldsymbol{P}$中元素均为正值时,存在最优 Lagrangian 乘子矩阵$\boldsymbol{\Lambda}^*$,使得$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^*)$的最优解$(\bar{x},\bar{y})$至少满足$|\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{ji}|<1, i,j\in N, i\ne j$.

证明. 可以证明,当$|\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{ji}|=1$时,总可以找到新的 Lagrangian 乘子矩阵$\boldsymbol{\Lambda}'$使得$|\bar{y}'_{ij}-\bar{y}'_{ji}|<1$,同时$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}')$的最优解值一定小于$L(LP_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的最优解值.

不失一般性,假定$\bar{y}_{ij}=1, \bar{y}_{ji}=0, i,j\in N, j>i$.

根据定理3中的算法,总可以通过修改乘子$\lambda_{ji}\in[-p_{ji},p_{ij}]$,使$\hat{p}_{ji}$增大$\delta$从而提高$\bar{y}_{ji}$至$\bar{y}'_{ji}$(至少不降低),同时使$\hat{p}_{ij}$减小$\delta$从而使$\bar{y}_{ij}$降低至$\bar{y}'_{ij}$(至少不增大). 具体地,设 Lagrangian 利润$\hat{p}_{ij}$变为$(\hat{p}_{ij}-\delta)$, $\hat{p}_{ji}$变为$(\hat{p}_{ji}+\delta)$.

当利润矩阵$\boldsymbol{P}$中元素均为正值时,由定理4可知$\hat{p}_{kj}\ge0\ (k\ne j)$,因此总可以找到一个正的$\delta$,使得$CKP_i$与$CKP_j$中有且仅有一个发生元素置换:

假设CKP_j由于$\hat{p}_{ij}$的下降导致序号为a的元素被置入,则有$\frac{\hat{p}_{ij}}{w_i}>\frac{\hat{p}_{aj}}{w_a}$,即$\hat{p}_{aj}w_i-\hat{p}_{ij}w_a<0$,计算由元素置换而导致$CKP_j$最优值的变化$\Delta_j=\bar{y}'_{ij}(\hat{p}_{ij}-$

$\delta)+\hat{p}_{aj}-\hat{p}_{ij}$,其中 $\bar{y}_{ij}^{\cdot}=1-\min\left(\frac{w_a}{w_i},1\right)$;

假设 CKP_i 由于 $\hat{p}_{ji}$ 上升导致序号为 b 的元素被置换出,则有 $\frac{\hat{p}_{bi}}{w_b}>\frac{\hat{p}_{ji}}{w_j}$,即 $\hat{p}_{ji}w_b-\hat{p}_{bi}w_j<0$,计算由元素置换而导致 CKP_i 最优值的变化 $\Delta_i=\bar{y}_{ji}^{\cdot}(\hat{p}_{ji}+\delta)-\hat{p}_{bi}$,其中 $\bar{y}_{ji}^{\cdot}=\min\left(\frac{w_b}{w_j},1\right)$.

当 CKP_i 中发生元素置换时,$|\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{ji}^{\cdot}|=\left|1-\min\left(\frac{w_b}{w_j},1\right)\right|<1$,$\Delta=\Delta_i-\delta=\delta(\bar{y}_{ji}^{\cdot}-1)+\frac{\hat{p}_{ji}w_b-\hat{p}_{bi}w_j}{w_j}<0$,即 $L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^{\cdot})$ 的最优值减小;

当 CKP_j 中发生元素置换时,$|\bar{y}_{ij}^{\cdot}-\bar{y}_{ji}|=\left|1-\min\left(\frac{w_a}{w_i},1\right)\right|<1$,$\Delta=\Delta_j=-\bar{y}_{ij}^{\cdot}\delta+\frac{\hat{p}_{aj}w_i-\hat{p}_{ij}w_a}{w_i}<0$,即 $L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^{\cdot})$ 的最优值减小.

当 $\bar{y}_{ij}=0,\bar{y}_{ji}=1$ 时,$i,j\in N,j>i$,同理可证,总可以找到正的 δ 使得 CKP_i 与 CKP_j 中有且仅有一个发生元素置换,从而使 $|\bar{y}_{ij}^{\cdot}-\bar{y}_{ji}^{\cdot}|<1$ 并且使 $L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$ 的最优值减小.　　证毕.

推论 1.　当利润矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中元素均为正值时,如果 $w_1=w_2=\cdots=w_n$,则存在最优 Lagrangian 乘子矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}^*$,使得 $z^*(\mathrm{LP}_{2\sim6})=z^*(L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^*))$.

对于正利润矩阵的 QKP,定理 1、定理 5 与定理 6 隐含求解 $\mathrm{LP}_{2\sim6}$ 的新途径,即通过调整乘子矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使 $L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$ 的最优解逼近等式约束条件(6),从而使 $L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$ 的最优值逼近 $\mathrm{LP}_{2\sim6}$ 的最优值,可以提高 $\mathrm{LP}_{2\sim6}$ 的上界估计精度.对于定址问题,推论 1 成立;对于 Clique 问题,推论 1 不一定成立.

当利润矩阵中存在非正元素时,由定理 4 可知,如果相对式(8)的 CKP 问题中的正元素项目的重量小于背包容量,则此背包问题不能通过修改 Lagrangian 乘子进行必要的元素置换,使得 $\bar{y}_{ij}=\bar{y}_{ji}$,$i,j\in N,j>i$.一般地,当利润矩阵中存在非正元素时,不一定存在最优 Lagrangian 乘子矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}^*$,使得 $L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^*)$ 的最优解满足等式约束条件(6),此时,对偶问题上界估计的精度往往过低.因此,QKP 利润矩阵的密度通过制约对偶问题上界估计的精度影响文献[1]中 QKP 精确算法的效率.

通过修改利润矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使元素全为正,可以扩展 Lagrangian 乘子的变化范围,使得各 CKP 中可以进行必要的元素置换,近似满足等式约束条件(6).

3　利润欺骗法

设 Δ 为协作利润值之间的最大差值,即 $\Delta=\max\limits_{i,j\neq i}p_{ij}-\min\limits_{i,j\neq i}p_{ij}$.首先,修改利润矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得修改后的伪利润矩阵 $\boldsymbol{P}^{\cdot}$ 中的元素 $p_{ij}^{\cdot}=p_{ij}+\Delta$,$i,j\in N$,$i\neq j$,称 Δ 为利润欺骗因子.修改后的最小协作利润 $\min\limits_{i,j\neq i}p_{ij}^{\cdot}$ 等于原最大协作利润 $\max\limits_{i,j\neq i}p_{ij}$.其次,将定理 3 中求解 $L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$ 的过程修改如下:

1. 求解与约束条件(4)对应的 n 个 CKP;其中 CKP_j 可表示如下,设其最优解为 $\pi_{ij}^{\cdot}$,$i\in N\backslash\{j\}$:

$$\max\quad \bar{\hat{p}}_j^{\cdot}=\sum_{i\in N\backslash\{j\}}\hat{p}_{ij}^{\cdot}\pi_{ij}^{\cdot}\tag{8′}$$

$$\text{s. t.}\quad \sum_{i\in N\backslash(j)}w_i\pi_{ij}^{\cdot}\leq(c-w_j),\ \pi_{ij}^{\cdot}\in[0,1];$$

$$\text{计算}\quad \bar{\hat{p}}_j=\sum_{i\in N\backslash\{j\}}(\hat{p}_{ij}^{\cdot}-\Delta)\pi_{ij}^{\cdot};$$

2. 求解与约束条件(3)对应而利润为 $(\bar{\hat{p}}_j+q_j)$ 的 CKP,设其最优解为 $\bar{x}_j^{\cdot}$,$j\in N$;即

$$\max\quad \sum_{j\in N}(\bar{\hat{p}}_j+q_j)x_j^{\cdot}\tag{9′}$$

$$\text{s. t.}\quad \sum_j w_jx_j^{\cdot}\leq c,\ x_j^{\cdot}\in[0,1],j\in N;$$

3. 对于 $i,j\in N,i\neq j$,计算 $\bar{y}_{ij}^{\cdot}=\pi_{ij}^{\cdot}\bar{x}_j^{\cdot}$.

定义 $\bar{x}_j^{\cdot}$ 与 $\bar{y}_{ij}^{\cdot}(i,j\in N,i\neq j)$ 为 $L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$ 的利润欺骗解,记为 $(\bar{\boldsymbol{x}}^{\cdot},\bar{\boldsymbol{y}}^{\cdot})$.一般地,$(\bar{\boldsymbol{x}}^{\cdot},\bar{\boldsymbol{y}}^{\cdot})\neq(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})$.目标函数值 $z^{\cdot}(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})|_{\bar{x}^{\cdot},\bar{y}^{\cdot}}=\sum_j(\bar{\hat{p}}_j+q_j)\bar{x}_j^{\cdot}=\sum_j\sum_{i,i\neq j}(\hat{p}_{ij}^{\cdot}-\Delta)\bar{y}_{ij}^{\cdot}+\sum_j q_j\bar{x}_j^{\cdot}$ 可作为 $\mathrm{LP}_{2\sim6}$ 的最优值的估计,称计算 $z^{\cdot}(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})|_{\bar{x}^{\cdot},\bar{y}^{\cdot}}$ 的过程为利润欺骗法.对于非负对称利润矩阵 $\boldsymbol{P}$,利润欺骗法将 Lagrangian 乘子的变化范围对称扩展为 $\lambda_{ij}\in[-p_{ij}-\Delta,p_{ij}+\Delta]$.因此,利润欺骗法可使 $z^{\cdot}(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})|_{\bar{x}^{\cdot},\bar{y}^{\cdot}}$ 小于 $\mathrm{LP}_{2\sim6}$ 的最优值与当前最大本分值 z^*,即利润欺骗法不能确保一般 QKP 问题最优值的上界估计.

定理 7.　假定 $L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$ 的利润欺骗解 $(\bar{\boldsymbol{x}}^{\cdot},\bar{\boldsymbol{y}}^{\cdot})$ 满足等式约束条件(6).对于每一个 $\bar{x}_j^{\cdot}>0$ 的 CKP_j,如果满足 $\min\limits_{i,\bar{y}_{ij}^{\cdot}>0}\frac{\hat{p}_{ij}^{\cdot}-\Delta}{w_i}\geq\max\limits_{k,\bar{y}_{kj}^{\cdot}=0}\frac{\hat{p}_{kj}^{\cdot}-\Delta}{w_k}$,则 $z^{\cdot}(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})|_{\bar{x}^{\cdot},\bar{y}^{\cdot}}=z^*(\mathrm{LP}_{2\sim6})$,即 $(\bar{\boldsymbol{x}}^{\cdot},\bar{\boldsymbol{y}}^{\cdot})$ 是 $\mathrm{LP}_{2\sim6}$ 的最优解.

证明.　对于 CKP_j,如果 $\min\limits_{i,\bar{\pi}_{ij}^{\cdot}>0}\frac{\hat{p}_{ij}^{\cdot}-\Delta}{w_i}\geq\max\limits_{k,\bar{\pi}_{kj}^{\cdot}=0}\frac{\hat{p}_{kj}^{\cdot}-\Delta}{w_k}$,则不可能通过元素置换使 CKP_j 的目标函数值 $\bar{\hat{p}}_j=\sum_{i\in N\backslash\{j\}}(\hat{p}_{ij}^{\cdot}-\Delta)\pi_{ij}^{\cdot}$ 增大.对于每一个 $\bar{x}_j^{\cdot}>0$ 的 CKP_j,如果都不能通过元素置换增大目标函数值 $\bar{\hat{p}}_j$,则 $\pi_{ij}^{\cdot}$ 是满足条件(6)的 CKP_j 的最优解.因此,$(\bar{\boldsymbol{x}}^{\cdot},\bar{\boldsymbol{y}}^{\cdot})$ 是 $\mathrm{LP}_{2\sim6}$ 的最优解.

推论 2. 如果$(\bar{x}^{\cdot},\bar{y}^{\cdot})$是$L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的利润欺骗解,且满足等式约束条件(6),则$z^{\cdot}(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})|_{\bar{x}^{\cdot},\bar{y}^{\cdot}}\le z^{*}(\mathrm{LP}_{2\sim6})$.

推论 3. 如果$w_1=w_2=\cdots=w_n$,则$L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的利润欺骗解$(\bar{x}^{\cdot},\bar{y}^{\cdot})$是$L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的最优解.

推论 4. 如果$w_1=w_2=\cdots=w_n$,则满足等式约束条件(6)的$L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的利润欺骗解$(\bar{x}^{\cdot},\bar{y}^{\cdot})$是$\mathrm{LP}_{2\sim6}$的最优解.

推论 2 表明,一般 QKP 问题的利润欺骗解值只是$\mathrm{LP}_{2\sim6}$的最优值的一个估计,此估计不一定大于$\mathrm{LP}_{2\sim6}$的最优值.对于 Clique 问题与定址问题,推论 3 与推论 4 确保$L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的利润欺骗解值是$\mathrm{LP}_{2\sim6}$的上界估计.亚梯度优化算法可以快速调整 Lagrangian 乘子矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$,使$L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的利润欺骗解$(\bar{x}^{\cdot},\bar{y}^{\cdot})$近似满足等式约束条件(6).定义$\boldsymbol{\Lambda}^t$为亚梯度优化算法在第$t$步中得到的 Lagrangian 乘子矩阵,当$z^{\cdot}(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^t)|_{\bar{x}^{\cdot},\bar{y}^{\cdot}}\le z^{*}$时,亚梯度优化算法提前终止;否则,继续循环至预定步数.

4 分支定界法

分支定界法以深度优先法作为分支决策的基础,在每一分支节点上对所能达到的目标函数值的上界或下界进行估算,并将该估值与已知的最佳本分值比较.通过提前退出或删除那些没有希望超过已知最佳本分值的决策路径,可以提高分支决策效率.分支定界法的效率与精度,取决于变量的决策优先次序与节点目标函数值的估计精度.当前最佳本分解由启发式算法[1]得到.

4.1 约 简

分支决策前,首先进行变量循环约简(预处理).设z^{*}为 QKP 的当前最大本分值,$\boldsymbol{\Lambda}^{*}$是亚梯度优化算法终止时的 Lagrangian 乘子矩阵.设u_j^1为$x_j=1$时$L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^{*})$的利润欺骗解值,$u_j^0$为$x_j=0$时$L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda}^{*})$的利润欺骗解值,约简规则如下:按序选取变量$x_j$,$j=1,2,\cdots,n$,如果$u_j^1<z^{*}$而$u_j^0\ge z^{*}$,则固定$x_j=0$;如果$u_j^0<z^{*}$而$u_j^1\ge z^{*}$,则固定$x_j=1$.此外,若$u_j^1\le z^{*}$与$u_j^0\le z^{*}$同时满足,则$x_j$仍为自由变量.如果$x_j$被固定,则删除利润矩阵$\hat{\boldsymbol{P}}^{\cdot}$中第$j$行与第$j$列元素.如果$x_j$被固定为 1,则对角元素$q_i$增加$(p_{ij}+p_{ji})$,即$q_i=q_i+p_{ij}+p_{ji}$,$i\in N\backslash\{j\}$,而背包容量减少$w_j$.定义固定变量集合$N_{\mathrm{fixed}}$,固定变量个数$n_{\mathrm{fixed}}=|N_{\mathrm{fixed}}|$,则$N_{\mathrm{fixed}}$的总利润为$Z_{\mathrm{fixed}}=\sum_{i\in N_{\mathrm{fixed}}}q_ix_i=\sum_{j\in N_{\mathrm{fixed}}}\sum_{i\in N_{\mathrm{fixed}}}p_{ij}x_ix_j$,总重量$W_{\mathrm{fixed}}=\sum_{i\in N_{\mathrm{fixed}}}w_ix_i$.

如果约简过程中有新变量被固定,则由剩下的自由变量组成新的 QKP,用亚梯度优化算法再次调整 Lagrangian 乘子矩阵,然后转入新一轮变量约减过程.如此循环直至无新变量被固定,剩下的变量即为自由变量.

4.2 分支策略

变量循环约简后,剩余的自由变量集合记为$N_{\mathrm{free}}=N\backslash N_{\mathrm{fixed}}$,自由变量数记为$n_{\mathrm{free}}=n-n_{\mathrm{fixed}}$,自由变量的取值由分支定界法决策,Lagrangian 乘子矩阵在分支决策过程中不再调整.自由变量的决策优先次序由每一项目的利润贡献率的上界值γ_i决定.计算γ_i,按γ_i的大小将自由变量降序排列,排在最前面的项目的决策优先级最高.

$$\gamma_i=\frac{q_i}{w_i}+\max\left\{\frac{1}{w_i}\sum_{j\in N_{\mathrm{free}}\backslash\{i\}}(p_{ij}+p_{ji})x_j:\ \sum_{j\in N_{\mathrm{free}}\backslash\{i\}}w_jx_j\le c-W_{\mathrm{fixed}}-w_i,\ x_j\in[0,1],j\in N_{\mathrm{free}}\backslash\{i\}\right\}.$$

QKP 快速算法的整个过程可描述如下:

1. 计算利润欺骗因子Δ,并令利润欺骗值$p_{ij}^{\cdot}=p_{ij}+\Delta$,$i,j\in N$,$j\ne i$;

2. 采用启发式算法[1]搜索QKP_1的当前本分解$\boldsymbol{x}^{*}$,本分值$z^{*}=z(\boldsymbol{x}^{*})$;

3. 采用利润欺骗法,由亚梯度优化算法逐步调整$L(\mathrm{LP}_{2\sim5},\boldsymbol{\Lambda})$的 Lagrangian 乘子矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$,并注意更新本分解$\boldsymbol{x}^{*}$与本分值$z^{*}=z(\boldsymbol{x}^{*})$;

4. 变量约简,若有变量固定,则转步 3;否则,调用分支定界算法[1].

4.3 计算复杂度

如果忽略本分解的计算复杂度($<O(n^3)$),QKP 快速算法的计算复杂度基本由两部分组成:变量循环约减过程与分支定界算法.每次变量约减过程前先进行亚梯度优化.设亚梯度优化算法的最高迭代次数为$t=n$,则亚梯度优化算法的计算复杂度为$O(n^3)$.亚梯度优化算法可使利润欺骗解值快速逼近当前最佳本分值,因此,基于利润欺骗法的亚梯度优化算法的计算复杂度一般远小于$O(n^3)$.首轮变量约减过程的计算复杂度为$O(n^2)$,一般最多经过数轮约减过程.如果将包括亚梯度优化处理的整个变量循环约减过程看作分支定界算法的预处理,

则整个预处理过程的计算复杂度小于 $O(n^3+n^2)$.

上界估计是分支定界算法中计算代价最高的环节，对于自由变量数为 n_{free} 的 QKP 分支定界算法，一次独立的节点目标函数估计的计算复杂度为 $O(n_{free}^2)$. 因此，降低上界的计算复杂度可以大大提高算法的效率. 定理 3 中算法的复杂度瓶颈在于求解由式(8)定义的 CKP，而 CKP 计算复杂度的瓶颈在于排序算法. 考虑 Lagrangian 乘子矩阵不随决策节点位置变化，可用两个 $n\times n$ 二维数组存储根节点上按利润/重量比值排序的利润矩阵及与原项目序号的对应关系. 通过记录分支决策路径上的变量取值，子节点上界估计中各 CKP 的求解只须按序选择当前尚未固定的项目，直至总重量超过背包剩余容量. 可以证明，通过增加算法的空间复杂度（$2n^2$），节点目标函数估计的计算复杂度的上界可降为 $O(n_{free})$，而其期望复杂度仅为一常数.

分支定界算法的效率取决于决策路径的优先次序与节点目标函数的估计精度. 虽然分支定界算法在最坏情况下的计算复杂度等于节点目标估计算法的计算复杂度与最大可能节点访问个次数（$2^{n_{free}+1}-1$）的乘积，即指数复杂度 $O(n_{free}2^{n_{free}+1}-n_{free})$，但精确的节点目标估计与优化的决策路径使得分支决策的节点个次数大为降低. 因此，分支定界算法的计算复杂度一般远小于指数复杂度 $O(n_{free}2^{n_{free}+1}-n_{free})$，但实际的平均计算复杂度只能通过实验测算.

5　计算实例

QKP 实例采用与 Gallo[3] 类似的随机生成法产生，但背包容量按项目总重量的一定比例设定. 定义密度 d 为利润矩阵 P 中非零元素的百分率. 项目重量 w_j 是从［1，50］内均匀产生的随机整数，项目利润 $p_{ij}(=p_{ji})$ 是从［1，100］内按非零概率 d 产生的均匀随机整数，背包容量 $c=r\sum_{j=1}^{n}w_j$，背包系数 $r\in(0,1)$. 本文最小背包规模 $n=50$，最大背包规模 $n=400$；实例密度分别取 $d=0.25, 0.5, 0.75, 1.0$；对于每一密度 d，实例背包系数 r 均取 0.5. 计算机处理器采用 PentiumIV，主频为 1.8GHz，内存 256MB.

表 1 列出规模 $n=400$ 以内的 QKP 在同一机器上的比较计算结果，每一行数据是 5 次随机产生的 QKP 数据的计算平均值，其中 Caprara 的精确算法[1] 的计算结果 z_{max} 是 QKP 的精确解. 当密度 $d<1.0$ 时，由于分支决策深度受内存资源限制，精确算法仅能计算至规模 $n=250$，但利润欺骗快速算法可计算至规模 $n=400$；而且在可比较的结果范围内，利润欺骗法同样可以得到 QKP 的精确解，而计算时间大大减少. 统计分析表明，精确算法只能平均固定约 36％的变量，而利润欺骗法通过变量循环约简可以平均固定约 84％的变量，其中特别是 $d<1.0$ 时的变量约简效率增大明显. 不仅在密度 $d<1.0$ 时，利润欺骗法能大大提高算法效率；而且当 $d=1.0$ 时，利润欺骗法也可以提高算法的效率，只是没有前者明显. 此外，在可计算范围内，二者的变量循环约简过程几乎占全部计算时间. 利润欺骗法提高了 QKP 目标函数值的估计精度，并通过变量循环约简使分支决策深度大为降低，从而使算法效率不受密度 d 的影响. 为使整个计算过程控制在一定时间内，当节点访问的个次数超过 100 万后即终止分支决策过程.

表 1　快速算法与 Caprara 的精确算法[1] 的性能比较结果（$r=0.5$）

密度	n	Caprara 的精确算法[1]（无利润欺骗）						本文快速算法（采用利润欺骗）					
		t_r	e_{up}	z_{max}	n_{fixed}	$n_{b\&b}$	t_w	t_r	e_{up}	z_{max}	n_{fixed}	$n_{b\&b}$	t_w
0.25	50	26	0.6193	20921	41	39	26	3	0.5890	20921	46	11	3
	100	210	3.8025	76984	0	90353	950	24	0.1090	76984	97	7	24
	150	731	0.0873	180266	139	53	731	77	−0.0003	180266	118	1	77
	200	2443	0.1569	323521	161	691	2444	197	−0.0566	323521	200	1	197
	250	7086	0.0319	496953	238	49	7087	331	−0.0015	496953	154	1	333
	300	9717	——	691352*	0	——	——	797	0.0000	691352	296	3	798
	350	18434	——	931270*	0	——	——	1309	0.0213	931919	336	131	1310
	400	25931	——	1250300*	0	——	——	2606	−0.0011	1250300	339	1	2607
0.5	50	39	3.2690	33037	1	633	40	5	0.5930	33037	44	21	5
	100	178	0.0781	146080	95	9	178	19	−0.0299	146080	87	1	19
	150	666	1.4080	307750	0	31617	974	140	0.0431	307750	137	63	140
	200	2202	1.3773	548270	0	60677	3431	254	−1.1151	548270	200	1	254
	250	4775	1.4790	848836	0	628219	24072	641	−0.0030	848836	220	1	641
	300	10068	——	1212000*	0	——	——	1242	−0.0014	1212000	265	1	1243
	350	18377	——	1680660*	0	——	——	2511	−0.0001	1680950	341	1	2512
	400	28057	——	2189960*	0	——	——	5875	−0.0020	2189960	342	1	5877

（续 表）

密度	n	Caprara 的精确算法[1]（无利润欺骗）						本文快速算法（采用利润欺骗）					
		t_r	e_{up}	z_{max}	n_{fixed}	$n_{b\&b}$	t_w	t_r	e_{up}	z_{max}	n_{fixed}	$n_{b\&b}$	t_w
0.75	50	42	1.1391	50597	28	205	42	14	0.5440	50597	36	123	14
	100	131	0.0314	203940	97	3	131	59	−0.0015	203940	100	1	59
	150	1110	0.3492	443278	101	763	1112	217	0.1664	443278	133	265	217
	200	1908	1.0787	760588	0	4337	2074	385	−0.0070	760588	178	1	385
	250	4305	1.4202	1199600	0	40595	5855	2022	0.0647	1199600	231	225	2023
	300	8141	——	1714210*	0	——	——	2419	0.0360	1715860	289	41	2420
	350	15809	——	2324730*	0	——	——	6774	0.0584	2324730	319	2109	6776
	400	25783	——	3069400*	0	——	——	21974	0.1464	3072220	283	919535	23328
1.0	50	13	0.1633	64870	46	7	13	11	0.1620	64870	46	7	11
	100	194	0.7671	236011	57	1367	195	155	0.7348	236011	61	1311	155
	150	728	0.5316	573335	93	46593	752	600	0.5304	573335	93	51467	628
	200	1926	0.3512	1048390	131	247145	2087	1677	0.3448	1048390	139	279691	1832
	250	9865	0.2044	1540390	162	42739	9909	3403	0.1438	1540390	184	27275	3425
	300	9220	0.1198	2269680	222	132081	9301	5929	0.1099	2269680	241	112829	5989
	350	13847	0.1213	3149740	268	505119	14278	11129	0.1140	3149740	284	519901	11449
	400	53488		3967820*	133			22023	0.2892	3967880	176	1000000	26445

注：欺骗因子 $\Delta=100$. t_r 为预处理时间；e_{up} 为预处理过程后的上界估计值和最优值的百分误差率；z_{max} 为最优值；n_{fixed} 为约简变量个数；$n_{b\&b}$ 为分支定界算法中节点访问的个次数；t_w 为总计算时间. 空格表示该列数据因内存资源有限不可计算，其中标 * 号的 z_{max} 值为预处理过程所得的最佳本分值.

6 结 论

二次背包问题是一类具有重要意义但却极难求解的组合优化问题. 基于 Lagrangian 松弛方法的上界估计精度受利润矩阵密度的影响，变量约简效率过低，因而可计算的 QKP 问题的规模受到限制. 利润欺骗方法通过扩展 Lagrangian 乘子的变化范围，将对上界估计放松至对目标函数值的估计，可以较大提高特别是低密度 QKP 问题的变量约简的效率，从而大大降低分支定界算法的决策深度，消除了利润矩阵密度对算法效率的影响. 利润欺骗快速算法的效率与节点目标值估计精度超过文献中的精确算法. 虽然快速算法不能确保解的精确性，但实际上却往往能得到 QKP 问题的精确解.

虽然利润欺骗法针对对称利润矩阵的 QKP 提出，但可以推广至利润矩阵非对称的一般 QKP.

参 考 文 献

1 Caprara A., Pisinger D., Toth P.. Exact solution of the quadratic knapsack problem. INFORMS Journal on Computing, 1999, 11:125～137

2 Bretthauer K. M., Shetty B., Syam S.. A branch-and-bound algorithm for integer quadratic knapsack problems. ORSA Journal on Computing, 1995, 7:109～116

3 Gallo G., Hammer P. L., Simeone B.. Quadratic knapsack problems. Mathematical Programming, 1980, 12:132～149

4 Billionnet A., Camels F.. Linear programming for the 0-1quadratic knapsack problem. European Journal of Operational Research, 1996, 92:310～325

5 Chaillou P., Hansen P., Mahieu Y.. Best network flow bounds for the quadratic knapsack problem. Lecture Notes in Mathematics, 1986, 1403:226～235

6 Michelon P., Veilleux L.. Lagrangean methods for the 0-1 quadratic knapsack problem. European Journal of Operational Research, 1996, 92:326～341

7 Hammer P. L., Rader D.. Efficient methods for solving quadratc 0-1 knapsack problems. INFOR, 1997, 35:170～182

8 Billionnet A., Faye A., Soutiff E.. A new upper-bound and an exact algorithm for the 0-1 quadratic knapsack problem. In: Proceedings of the ISMP'97, Lausanne, EPFL, 1997

9 Helmberg C., Rendl F., Weismantel R.. Quadratic knapsack relaxation using cutting planes and semidefinite programming. Lecture Notes in Computer Science 1084, Berlin: Springer-Verlag, 1995, 175～189

10 Fisher M. L.. The Lagrangian relaxation method for solving interprogramming problems. Management Science, 1981, 27(1):1～8

XIE Tao, born in 1966, Ph. D., professor. His research interests include soft computations, combinatorial mathematics, network information security, complexity and complex adaptive systems.

CHEN Huo-Wang, born in 1936, member of the Chinese Academy of Engineering, Ph. D. supervisor. His research interests software engineering, symbolic logic, machine translation, intelligent computation and etc..

KANG Li-Shan, born in 1934, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include parallel computation, evolutionary computation, computing mathematics and etc..

Background

Assume we have a set of n items $N=\{1,2,\cdots,n\}$ and a positive integer knapsack capacity c, the ithitem has a positive integer weight w_i, and a nonnegative integer profit matrix $P=(p_{ij})_{n\times n}$ is given that p_{jj} is a profit achieved when item j is selected and, for $j>i$, $(p_{ij}+p_{ji})$ is the profit achieved when both items i and j are selected. The $0\sim1$ quadratic knapsack problem is try to select an item subset $S\subseteq N$ whose overall weight $\sum_{i\in S}w_i=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$ does not exceed the knapsack capacity c, so that the overall profit $z=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ is maximized, where $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $x_i=1$ if $i\in S$, $x_i=0$ otherwise. For simplification, the $0\sim1$ quadratic knapsack problem is denoted as QKP thereafter. QKP has important applications in engineering location and hydrology, compiler design, integrated circuit design, and graph theory. QKP is a generalization of the Clique problem, which has immediate graph-theoretic interpretation. Max Clique problem is the optimization formulation of the Clique problem, and generally regarded as one of the hardest combinatorial optimization problems. QKP is much harder than the knapsack problem, it has the same properties as Max Clique problem, even without an approximate polynomial algorithm.

QKP was first studied by Gallo, Hammer and Simeone, who proposed exact algorithms where upper bounds are computed using upper planes. The problem was not widely studied until a few years ago, but has recently attracted great interest. Using a classical integer linear programming (ILP) formulation of the problem, Billionnet and Calmels follow a branch-and-cut approach to QKP. Hemlmberg, Rendl and Weismantel consider a more general version of the problem where the profit matrixPmay have negative entries, and proposed a combined approach which uses cutting planes and semidefinite programming, and allows for the computation of very tight upper bounds. Lagrangian relaxation is a tool that has been widely used in large-scale mathematical programming applications and is the backbone of a number of large-cscale applications. Lagrangian relaxation approaches for QKP are described in literatures. Most recently, Caprara, Pisinger and Toth proposed an approach using the branch-and-bound algorithm with Lagrangian relaxation method to compute the upper bounds, which can give an exact solution to the QKPs without negative profits. By using a subgradient optimization procedure, the suboptimal Lagrangian multipliers can be derived to provide a convenient reformulation of the problem. While Caprara, Pisinger and Toth's exact algorithm greatly exceeds all the algorithms proposed respectively by Gallo, Chaillou, Michelon, Billionnet, the computational results reveal that, the efficiency of Caprara's approach decreases with the density of positive entries in P. For example, when the density is 25% and 50%, by using workstation HP9000/735 and within the time limit (50,000 sec.), this approach can compute the problem only to $n=120$ and $n=160$, respectively; by contrast, when the density is 75% and 100%, it can compute to $n=360$ and $n=400$ respectively. Caprara Pisinger and Toth, however, did not give any interpretations.

In this paper, authors first give and prove an ultimate reason for the density susceptibility of Caprara's exact algorithm, and then propose a profit swindling approach to overcome it. Computational experiments show that the profit swindling approach can eliminate the density susceptibility and form as the backbone of a fast algorithm to solve QKPs. The reduction efficiency is much improved and the branching depth is greatly decreased, the profit swindling approach can easily compute low density QKPs to $n=400$.

This project is supported by the National Natural Science Foundation of China under grant No. 60133010, 69903010.