

## 基于平行性约束的摄像机标定与 3D 重构\*

段福庆<sup>1+</sup>, 吴福朝<sup>2+</sup>, 胡占义<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(北京师范大学 信息科学与技术学院, 北京 100875)

<sup>2</sup>(中国科学院 自动化研究所 模式识别国家重点实验室, 北京 100080)

### Camera Calibration and 3D Reconstruction Using Parallelism Constraint

DUAN Fu-Qing<sup>1+</sup>, WU Fu-Chao<sup>2+</sup>, HU Zhan-Yi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(College of Information Science and Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

<sup>2</sup>(National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-10-82614521, E-mail: fqduan@nlpr.ia.ac.cn, fcwu@nlpr.ia.ac.cn

**Duan FQ, Wu FC, Hu ZY. Camera calibration and 3D reconstruction using parallelism constraint. *Journal of Software*, 2007,18(6):1350-1360.** <http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/1350.htm>

**Abstract:** This paper introduces an affine invariant of trapezia, and the explicit constraint equation between the intrinsic matrix of a camera and the similarity invariants of a trapezium are established using the affine invariant. By this constraint, the inner parameters, motion parameters of the cameras and the similarity invariants of trapezia can be linearly determined using some prior knowledge on the cameras or the trapezia. The proposed algorithms have wide applicability since parallel lines are not rare in many scenes. Experimental results validate the proposed approaches. This work presents a unifying framework based on the parallelism constraint, and the previous methods based on the parallelograms or the parallelepipeds can be integrated into this framework.

**Key words:** invariant; parallelism constraint; camera calibration; 3D reconstruction

**摘要:** 引入了梯形的一个仿射不变量, 并利用这个不变量, 建立了梯形的相似不变量与摄像机内参数之间的约束关系. 基于这个约束关系, 利用摄像机内参数的知识或梯形相似不变量的知识, 可以线性确定摄像机的内参数、运动参数和梯形的相似不变量. 由于梯形是由一对平行线段唯一确定的, 平行线段在许多场景中经常出现, 因而该方法有很广泛的适用性. 实验结果表明了该算法的有效性. 该工作提供了一个基于平行性约束的框架, 以往的基于平行四边形、平行六面体的方法都可以纳入到这个框架中.

**关键词:** 不变量; 平行性约束; 摄像机标定; 3D 重构

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

摄像机标定和 3D 重构是三维计算机视觉中的基本问题. 大量的研究表明, 从 2D 图像恢复 3D 结构非常困难, 并且经常是欠约束的. 如果没有关于摄像机或场景的信息, 要进行 3D 欧氏重构几乎是不可能的. 已有的研究成果大致可分为 3 类: 第 1 类是基于标定物的方法, 主要有基于三维物体的标定方法<sup>[1]</sup>、基于二维平面物体的标定方法<sup>[2,3]</sup>以及基于一维物体的标定方法<sup>[4]</sup>. 这些方法都依赖于制作精密的标定物以及特定的数据获取系

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60575019, 60673100 (国家自然科学基金)

Received 2006-06-29; Accepted 2006-08-16

统,在一般情况下不适用.第 2 类是自标定方法,主要有基于 Kruppa 方程的方法<sup>[5,6]</sup>、基于绝对二次曲线和绝对二次曲面的方法<sup>[7,8]</sup>.这类方法存在临界运动序列的问题,在这种情况下,自标定没有唯一解<sup>[9]</sup>.这个问题可以通过约束摄像机的运动<sup>[10]</sup>或加入摄像机或场景的先验信息来解决<sup>[11]</sup>.在自标定中,为了获得稳定的结果,通常需要大量的图像.第 3 类是基于物体几何结构信息或运动信息约束的方法,主要有基于景物中的平行性约束<sup>[11,12,14]</sup>、正交性约束<sup>[13,14]</sup>的方法、摄像机的纯旋转<sup>[10]</sup>,等等.这些先验信息不但可以解决重构中的摄影模糊问题,还可以稳定敏感的重构过程.本文的研究属于第 3 类.

本文引入了梯形的一个仿射不变量,并从这个不变量导出了梯形的射影性质,以及梯形的相似不变量与摄像机内参数之间的约束关系.基于这个约束关系,我们可以将摄像机内参数的先验知识或梯形相似不变量的先验知识融入到摄像机标定中.本文的工作是对文献[15]中基于平行四边形方法的推广.由于平行四边形是特殊的梯形,因而本文的工作提供了一个基于平行性约束的框架,以往的基于平行四边形、平行六面体的方法都可以纳入到这个框架中.

在本文中,三维空间点用大写粗体字母表示,它的欧氏坐标记为  $X=[x,y,z]^T$ ;图像点用小写粗体字母表示,它的齐次(欧氏)坐标总使用第 3 个分量归一化的坐标,即  $m=[u,v,1]^T$ .矩阵用大写字母表示;标量则用小写字母表示.假定摄像机为五参数的针孔模型,即假定摄像机内参数矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} f_u & s & u_0 \\ 0 & f_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中  $f_u, f_v$  分别为图像平面上  $u$  轴和  $v$  轴的尺度因子,  $[u_0, v_0]$  是主点坐标,  $s$  为畸变因子.在摄像机坐标系下,空间点  $X=[x,y,z]^T$  到图像平面的投影  $m=[u,v,1]^T$  为  $cm=KX$ ,其中,  $\alpha=z$  称为空间点的深度.

本文第 1 节讨论梯形的不变量以及射影性质.第 2 节是基于梯形的摄像机标定和 3D 重构方法.第 3 节是实验结果.最后总结本文.

## 1 梯形的不变量及其射影性质

### 1.1 梯形的不变量

梯形是一组对边相互平行的四边形,假定  $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$  为梯形的 4 个顶点,且  $\overrightarrow{X_1X_2} \parallel \overrightarrow{X_3X_4}$ , 如图 1 所示.

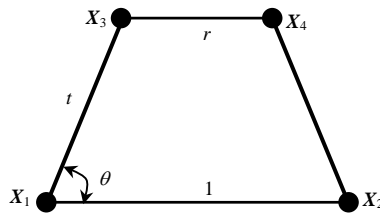


Fig.1 Trapezium and its similarity invariants

图 1 梯形及其相似不变量

令

$$t = \frac{\|X_3 - X_1\|}{\|X_2 - X_1\|}, \quad \cos\theta = \frac{(X_3 - X_1)^T (X_2 - X_1)}{\|X_3 - X_1\| \cdot \|X_2 - X_1\|}, \quad r = \frac{\|X_4 - X_3\|}{\|X_2 - X_1\|} \quad (1)$$

由于相似变换保持线段长度和夹角不变,因此,参数  $\{t, \theta, r\}$  均为梯形的相似不变量.因仿射变换保持平行线段的长度比,所以参数  $r$  还是梯形的一个仿射不变量.下面,从仿射不变量  $r$  导入梯形的另一个重要仿射不变量.

从  $\overrightarrow{X_1X_2} \parallel \overrightarrow{X_3X_4}$  和  $r$  的定义,我们有  $X_4 = rX_2 - rX_1 + X_3 = [X_1, X_2, X_3][-r, r, 1]^T$ .记  $X=[X_1, X_2, X_3]$ , 则有

$$X^{-1}X_4 = [-r, r, 1]^T \quad (2)$$

由于  $r$  是梯形的仿射不变量,因此,式(2)也是仿射不变量.

1.2 梯形的射影

利用仿射不变量式(2),我们能给出梯形的射影性质以及摄像机内参数与相似不变量  $\{t, \theta, r\}$  之间的关系.

命题 1. 假定  $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$  为梯形的 4 个顶点,其图像点为  $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ , 则

1) 在摄像机坐标系下,我们有

$$X_j = \frac{\alpha_4 q_j}{r} K^{-1} m_j, j=1,2; \quad X_j = \alpha_4 q_j K^{-1} m_j, j=3,4 \tag{3}$$

2) 相似不变量  $\{t, \theta, r\}$  与摄像机内参数有下述关系:

$$t^2 = \frac{(rq_3 m_3 - q_1 m_1)^T \varpi (rq_3 m_3 - q_1 m_1)}{(q_2 m_2 - q_1 m_1)^T \varpi (q_2 m_2 - q_1 m_1)} \tag{4}$$

$$\frac{\cos \theta}{t} = \frac{(rq_3 m_3 - q_1 m_1)^T \varpi (rq_2 m_2 - q_1 m_1)}{(rq_3 m_3 - q_1 m_1)^T \varpi (rq_3 m_3 - q_1 m_1)} \tag{5}$$

其中,  $\alpha_4$  是空间点  $X_4$  的深度,  $\varpi = K^{-T} K^{-1}, [q_1, q_2, q_3]^T = [-m_1, m_2, m_3]^{-1} m_4, q_4 = 1^*$ .

证明:在摄像机坐标系下,我们有  $\alpha_j m_j = K X_j, j=1,2,3,4$ , 即

$$X_j = \alpha_j K^{-1} m_j, j=1,2,3,4 \tag{6}$$

所以,  $X = [X_1, X_2, X_3] = K^{-1} [m_1, m_2, m_3] \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], X^{-1} = \text{diag}[1/\alpha_1, 1/\alpha_2, 1/\alpha_3] [m_1, m_2, m_3]^{-1} K$ . 因此,

$$\begin{aligned} X^{-1} X_4 &= \text{diag}[1/\alpha_1, 1/\alpha_2, 1/\alpha_3] [m_1, m_2, m_3]^{-1} K (\alpha_4 K^{-1} m_4) \\ &= \text{diag}[\alpha_4/\alpha_1, \alpha_4/\alpha_2, \alpha_4/\alpha_3] [m_1, m_2, m_3]^{-1} m_4 \\ &= \text{diag}[\alpha_4/\alpha_1, \alpha_4/\alpha_2, \alpha_4/\alpha_3] [-q_1, q_2, q_3]^T \\ &= \text{diag}[-\alpha_4 q_1/\alpha_1, \alpha_4 q_2/\alpha_2, \alpha_4 q_3/\alpha_3]^T. \end{aligned}$$

根据式(2),我们有

$$\alpha_j = \frac{\alpha_4 q_j}{r}, j=1,2; \quad \alpha_j = \alpha_4 q_j, j=3,4.$$

将上式代入式(6),得到式(3),将式(3)代入式(1)可得到式(4)和式(5).

推论 1. 假定梯形  $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$  的参数  $r$  是已知的,则从图像点  $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$  能恢复梯形相似形状,即我们能恢复梯形的另外两个相似不变量  $\{t, \theta\}$ .

1.3 空间共底梯形的射影

空间共底梯形是由共一条平行边的两个不共面梯形所构成的空间几何体,如图 2 所示.其中

$$\overrightarrow{X_1 X_2} \parallel \overrightarrow{X_3 X_4} \parallel \overrightarrow{X_5 X_6}.$$

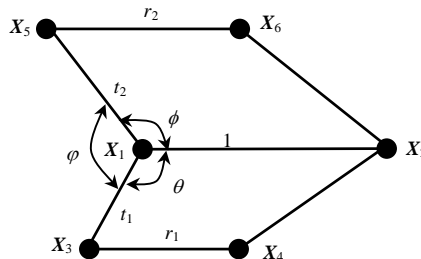


Fig.2 Spatial co-hemline trapezium and its similarity invariants

图 2 空间共底梯形及其相似不变量

\* 在本文中,约定  $q_4=1$ .

令

$$t_1 = \frac{\|X_3 - X_1\|}{\|X_2 - X_1\|}, t_2 = \frac{\|X_5 - X_1\|}{\|X_2 - X_1\|}, r_1 = \frac{\|X_4 - X_3\|}{\|X_2 - X_1\|}, r_2 = \frac{\|X_5 - X_6\|}{\|X_2 - X_1\|} \quad (7)$$

$$\cos \theta = \frac{(X_3 - X_1)^T (X_2 - X_1)}{\|X_3 - X_1\| \cdot \|X_2 - X_1\|}, \cos \phi = \frac{(X_5 - X_1)^T (X_2 - X_1)}{\|X_5 - X_1\| \cdot \|X_2 - X_1\|}, \cos \varphi = \frac{(X_3 - X_1)^T (X_5 - X_1)}{\|X_3 - X_1\| \cdot \|X_5 - X_1\|} \quad (8)$$

则参数  $\{t_1, t_2, r_1, r_2, \theta, \phi, \varphi\}$  是空间共底梯形相似不变量,它确定了共底梯形的相似形状.显然,  $\{r_1, r_2\}$  也是仿射不变量.

记

$$[q_1, q_2, q_3]^T = [-m_1, m_2, m_3]^{-1} m_4, [q_5, q_6, \tilde{q}_3]^T = [-m_5, m_6, m_3]^{-1} m_4.$$

根据命题 1,我们有  $\alpha_4 q_3 K^{-1} m_3 = X_3 = \alpha_4 \tilde{q}_3 K^{-1} m_3$ , 所以必有  $q_3 = \tilde{q}_3$ . 于是,

$$[q_1, q_2, q_3, q_5, q_6]^T = (A^T A)^{-1} A^T \begin{bmatrix} m_4 \\ m_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{bmatrix} -m_1 & m_2 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & -m_5 & m_6 \end{bmatrix} \quad (10)$$

因此,在摄像机坐标系下,空间共底梯形的顶点可表示为

$$X_j = \frac{\alpha_4 q_j}{r_1} K^{-1} m_j, j=1,2; X_j = \alpha_4 q_j K^{-1} m_j, j=3,4; X_j = \frac{\alpha_4 r_2 q_j}{r_1} K^{-1} m_j, j=5,6 \quad (11)$$

令

$$X = [X_2 - X_1, X_3 - X_1, X_5 - X_1] \quad (12)$$

$$M(r_1, r_2) = \frac{1}{r_1} [q_2 m_2 - q_1 m_1, r_1 q_3 m_3 - q_1 m_1, r_2 q_5 m_5 - q_1 m_1] \quad (13)$$

根据式(11),我们有

$$X = \alpha_4 K^{-1} M(r_1, r_2) \quad (14)$$

由于  $X$  是可逆矩阵,所以  $M(r_1, r_2)$  也是可逆矩阵,因此我们有

$$(M(r_1, r_2))^{-T} X^T X (M(r_1, r_2))^{-1} = \alpha_4^2 K^{-T} K^{-1} \quad (15)$$

且

$$X^T X = \|X_2 - X_1\|^2 \begin{bmatrix} 1 & t_1 \cos \theta & t_2 \cos \phi \\ t_1 \cos \theta & t_1^2 & t_1 t_2 \cos \varphi \\ t_2 \cos \phi & t_1 t_2 \cos \varphi & t_2^2 \end{bmatrix} \stackrel{A}{=} \|X_2 - X_1\|^2 \mu \quad (16)$$

于是,

$$(M(r_1, r_2))^{-T} \mu (M(r_1, r_2))^{-1} = \frac{\alpha_4^2}{\|X_2 - X_1\|^2} \varpi \quad (17)$$

综上所述,我们有下述命题:

命题 2. 设空间共底梯形  $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$  的图像为  $\{m_1, m_2, \dots, m_6\}$ , 则

- 1) 在摄像机坐标系下,顶点  $X_i$  可表示为式(11);
- 2) 相似不变量与摄像机内参数矩阵有关系式(17).

推论 2. 已知共底梯形平行边的长度比,则从图像点确定摄像机内参数矩阵与确定相似不变量  $\{t_1, t_2, \theta, \phi, \varphi\}$  是等价的.

当  $r_1=r_2=1$  时,空间共底梯形的图像就可以看作是一个平行六面体的图像.对于平行六面体,称矩阵  $\mu$  为平行六面体的参数矩阵.式(17)说明,平行六面体的参数矩阵与摄像机内参数矩阵是互为对偶的,对偶关系由矩阵  $M$  来刻画.文献[14,15]也给出了类似的结论.

## 2 摄像机标定与 3D 重构

### 2.1 单个梯形

命题 3. 已知梯形 $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ 的参数  $r$  和它的  $N$  幅图像  $\{m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, m_3^{(j)}, m_4^{(j)}\}, j=1, 2, \dots, N$ , 记

$$[q_1^{(j)}, q_2^{(j)}, q_3^{(j)}]^T = [-m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, m_3^{(j)}]^{-1} m_4^{(j)},$$

则我们有内参数的  $2(N-1)$  个 2 次约束方程:

$$\frac{(rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_1 (rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})}{(q_2^{(j)} m_2^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_1 (q_2^{(j)} m_2^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})} = \frac{(rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_j (rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})}{(q_2^{(j)} m_2^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_j (q_2^{(j)} m_2^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})} \quad (18)$$

$$\frac{(rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_1 (rq_2^{(j)} m_2^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})}{(rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_1 (rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})} = \frac{(rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_j (rq_2^{(j)} m_2^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})}{(rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_j (rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})} \quad (19)$$

特别地,

1) 对于直角梯形, 即  $\theta = \pi/2$ , 有内参数的  $(N-1)$  个二次约束方程(18)和如下的  $N$  个线性约束方程:

$$(rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_j (q_2^{(j)} m_2^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)}) = 0 \quad (20)$$

2) 对于等腰梯形, 有内参数的  $(N-1)$  个 2 次约束方程(18)和如下的  $N$  个线性约束方程:

$$\frac{(rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_j (rq_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})}{(rq_4^{(j)} m_4^{(j)} - q_2^{(j)} m_2^{(j)})^T \varpi_j (rq_4^{(j)} m_4^{(j)} - q_2^{(j)} m_2^{(j)})} = 1 \quad (21)$$

其中,  $\varpi_j = K_j^{-T} K_j^{-1}$ ,  $K_j$  是第  $j$  个摄像机的内参数.

证明: 直接根据命题 1 推出.

注 1: 利用式(21), 我们可以直接写出文献[4]中所给出的基于一维运动物体的标定约束方程, 因为基于一维物体绕固定点的两次旋转运动等价于已知参数  $r$  的等腰梯形约束.

推论 3. 给定矩形 $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ 的  $N$  幅图像, 我们有内参数的  $(N-1)$  个二次约束方程(18)和  $N$  个线性约束方程:

$$(q_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_j (q_2^{(j)} m_2^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)}) = 0 \quad (22)$$

推论 4. 给定菱形 $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ 的  $N$  幅图像, 我们有内参数的  $(N-1)$  个二次约束方程(19)和  $N$  个线性约束方程:

$$\frac{(q_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_j (q_3^{(j)} m_3^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})}{(q_2^{(j)} m_2^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})^T \varpi_j (q_2^{(j)} m_2^{(j)} - q_1^{(j)} m_1^{(j)})} = 1 \quad (23)$$

注 2: 从菱形对角线的正交性, 可以得到另一个线性约束方程. 但是可以证明, 正交性所得到的线性约束方程与约束方程(23)是等价的.

### 2.2 空间共底梯形

在本节中, 我们根据  $m$  个空间共底梯形的  $n$  幅图像确定摄像机内参数、运动参数和相似不变量, 所得到的结果可直接应用于平行六面体.

假定已知第  $k$  个共底梯形 $\{X_{k1}, X_{k2}, X_{k3}, X_{k4}, X_{k5}, X_{k6}\}$ 平行边的长度比, 即已知参数 $\{r_{k1}, r_{k2}\}$ , 它的  $n$  幅图像为 $\{m_{k1}^{(j)}, m_{k2}^{(j)}, m_{k3}^{(j)}, m_{k4}^{(j)}, m_{k5}^{(j)}, m_{k6}^{(j)}\}, j=1, 2, \dots, n$ , 并记第 1 幅图像到第  $j$  幅图像的摄像机运动为 $(R_j, t_j)$ , 即第 1 个摄像机坐标系到第  $j$  个摄像机坐标系之间的变换为

$$X^{(j)} = R_j X^{(1)} + t_j \quad (24)$$

根据命题 2, 在第  $j$  个摄像机坐标系下, 第  $k$  个共底梯形各顶点  $X_{ki}$  的坐标为

$$X_{ki}^{(j)} = \frac{\alpha_{k4}^{(j)} q_{ki}^{(j)}}{r_{k1}} K_j^{-1} m_{ki}^{(j)}, i=1, 2; \quad X_{ki}^{(j)} = \alpha_{k4}^{(j)} q_{ki}^{(j)} K_j^{-1} m_{ki}^{(j)}, i=3, 4; \quad X_{ki}^{(j)} = \frac{\alpha_{k4}^{(j)} r_{k2} q_{ki}^{(j)}}{r_{k1}} K_j^{-1} m_{ki}^{(j)}, i=5, 6 \quad (25)$$

令

$$X_{kj} = [X_{k2}^{(j)} - X_{k1}^{(j)}, X_{k3}^{(j)} - X_{k1}^{(j)}, X_{k5}^{(j)} - X_{k1}^{(j)}] \quad (26)$$

$$M_{kj} = M_{kj}(r_{k1}, r_{k2}) = \frac{1}{r_{k1}} \cdot [q_{k2}^{(j)} m_{k2}^{(j)} - q_{k1}^{(j)} m_{k1}^{(j)}, r_{k1} q_{k3}^{(j)} m_{k3}^{(j)} - q_{k1}^{(j)} m_{k1}^{(j)}, r_{k2} q_{k5}^{(j)} m_{k5}^{(j)} - q_{k1}^{(j)} m_{k1}^{(j)}] \quad (27)$$

由于

$$\det(X_{kj}) = \det(X_{k1}), k=1, 2, \dots, m; j=2, \dots, n \quad (28)$$

根据式(14),我们有

$$X_{kj} = \alpha_{k4}^{(j)} K_j^{-1} M_{kj} \quad (29)$$

所以,由式(28)得到

$$\alpha_{k4}^{(j)} = \alpha_{k4}^{(1)} \underbrace{\det^{1/3}(M_{k1} M_{kj}^{-1})}_{\beta_{kj}} \cdot \underbrace{\det^{1/3}(K_1^{-1} K_j)}_{\gamma_j} = \alpha_{k4}^{(1)} \beta_{kj} \gamma_j \quad (30)$$

于是,根据命题 2,

$$M_{kj}^{-T} \mu_k M_{kj}^{-1} = \frac{(\alpha_{k4}^{(1)})^2 \beta_{kj}^2 \gamma_j^2}{\|X_{k2}^{(j)} - X_{k1}^{(j)}\|^2} \omega_j, j=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, m \quad (31)$$

因为  $\|X_{k2}^{(j)} - X_{k1}^{(j)}\| = \|X_{k2}^{(1)} - X_{k1}^{(1)}\|$ , 所以方程(31)可以写为

$$\hat{M}_{kj}^{-T} \tilde{\mu}_k \hat{M}_{kj}^{-1} = \tilde{\omega}_j, j=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, m \quad (32)$$

其中,  $\hat{M}_{kj} = \beta_{kj} M_{kj}, \tilde{\mu}_k = \frac{\|X_{k2}^{(1)} - X_{k1}^{(1)}\|^2}{(\alpha_{k4}^{(1)})^2} \mu_k, \tilde{\omega}_j = \gamma_j^2 \omega_j$ .

在第  $j$  个摄像机坐标系下,第  $k$  个共底梯形各顶点  $X_{ki}$  的坐标可以表示为

$$X_{ki}^{(j)} = \frac{\alpha_{k4}^{(1)} \beta_{kj} \gamma_j q_{ki}^{(j)}}{r_{k1}} K_j^{-1} m_{ki}^{(j)}, i=1, 2; X_{ki}^{(j)} = \alpha_{k4}^{(1)} \beta_{kj} \gamma_j q_{ki}^{(j)} K_j^{-1} m_{ki}^{(j)}, i=3, 4; X_{ki}^{(j)} = \frac{\alpha_{k4}^{(1)} \beta_{kj} \gamma_j r_{k2} q_{ki}^{(j)}}{r_{k1}} K_j^{-1} m_{ki}^{(j)}, i=5, 6 \quad (33)$$

命题 4. 方程(32)对摄像机内参数最多能提供  $5n-5$  个独立约束.

证明:通过消去方程(32)中的相似参数矩阵  $\tilde{\mu}_k$ , 可以得到

$$\hat{M}_{kj}^{-T} \tilde{\omega}_j \hat{M}_{kj} = \hat{M}_{k1}^{-T} \tilde{\omega}_1 \hat{M}_{k1}, k=1, 2, \dots, m; j=2, 3, \dots, n,$$

因此,

$$\tilde{\omega}_j = \hat{M}_{kj}^{-T} \hat{M}_{k1}^{-T} \tilde{\omega}_1 \hat{M}_{k1} \hat{M}_{kj}^{-1} = \beta_{kj}^{-2} \beta_{k1}^2 M_{kj}^{-T} M_{k1}^T \tilde{\omega}_1 M_{k1} M_{kj}^{-1}, k=1, 2, \dots, m; j=2, 3, \dots, n \quad (34)$$

由于

$$\beta_{k1} M_{k1} = \det^{1/3}(M_{k1} M_{k1}^{-1}) M_{k1} = \det^{1/3}(M_{k1}) \cdot \tilde{M}_{k1},$$

$$\beta_{kj}^{-1} M_{kj}^{-1} = \det^{-1/3}(M_{k1} M_{kj}^{-1}) M_{kj}^{-1} = \det^{-1/3}(M_{k1}) \cdot \tilde{M}_{kj}^{-1}, j=2, 3, \dots, n,$$

因此,方程(34)可以写为

$$\tilde{\omega}_j = \tilde{M}_{kj}^{-T} \tilde{M}_{k1}^T \tilde{\omega}_1 \tilde{M}_{k1} \tilde{M}_{kj}^{-1}, j=2, 3, \dots, n; k=1, 2, \dots, m \quad (35)$$

其中,  $\tilde{M}_{kj} = \det^{-1/3}(M_{kj}) \cdot M_{kj}$ . 注意,  $\forall k, H_k = \tilde{M}_{k1} \tilde{M}_{kj}^{-1}$  是从第  $j$  个摄像机到第 1 个摄像机的无穷远单应, 并且  $\det(\tilde{M}_{k1} \tilde{M}_{kj}^{-1}) = 1$ , 因此,

$$\tilde{M}_{k1} \tilde{M}_{kj}^{-1} = \tilde{M}_{11} \tilde{M}_{1j}^{-1}, k=1, 2, \dots, m; j=2, 3, \dots, n \quad (36)$$

所以,方程(35)等价于下面的方程:

$$\tilde{\omega}_j = \tilde{M}_{1j}^{-T} \tilde{M}_{11}^T \tilde{\omega}_1 \tilde{M}_{11} \tilde{M}_{1j}^{-1}, j=2, 3, \dots, n \quad (37)$$

由于 IAC 有 5 个自由度,因此该方程对摄像机内参数最多能提供  $5n-5$  个独立约束.

### 2.2.1 内参数矩阵与相似不变量

由命题 4 可知,如果没有关于摄像机内参数或共底梯形的先验知识,就无法确定摄像机内参数和共底梯形的相似参数.应用摄像机内参数或共底梯形的先验知识,根据方程(32)和方程(37),我们可以得到关于 IACs 或共

底梯形相似参数的线性约束方程(见表 1 和表 2),从而可以线性确定  $\omega_j$  和共底梯形的相似参数  $\mu_k$ .

**Table 1** Linear constraints from prior information of the trapezia  
**表 1** 共底梯形的先验知识提供的线性约束

Prior information on the trapezium	Linear constraints on $\omega$
$\theta_k=\pi/2$	$(\hat{M}_{kj}^T \tilde{\omega}_j \hat{M}_{kj})_{12} = 0$
$\phi_k=\pi/2$	$(\hat{M}_{kj}^T \tilde{\omega}_j \hat{M}_{kj})_{13} = 0$
$\varphi_k=\pi/2$	$(\hat{M}_{kj}^T \tilde{\omega}_j \hat{M}_{kj})_{23} = 0$
$t_{k1}=1$	$(\hat{M}_{kj}^T \tilde{\omega}_j \hat{M}_{kj})_{11} = (\hat{M}_{kj}^T \tilde{\omega}_j \hat{M}_{kj})_{22}$
$t_{k2}=1$	$(\hat{M}_{kj}^T \tilde{\omega}_j \hat{M}_{kj})_{11} = (\hat{M}_{kj}^T \tilde{\omega}_j \hat{M}_{kj})_{33}$
$t_{k1}=t_{k2}$	$(\hat{M}_{kj}^T \tilde{\omega}_j \hat{M}_{kj})_{22} = (\hat{M}_{kj}^T \tilde{\omega}_j \hat{M}_{kj})_{33}$

**Table 2** Linear constraints from prior information of camera  
**表 2** 摄像机的先验知识提供的线性约束

Prior information on camera	Linear constraints on $\mu_k$	Linear constraints on $\omega_1$
Zero skew	$(M_{kj}^{-T} \tilde{\mu}_k M_{kj}^{-1})_{12} = 0$	$(\tilde{M}_{1j}^{-T} \tilde{M}_{11}^T \tilde{\omega}_1 \tilde{M}_{11} \tilde{M}_{1j}^{-1})_{12} = 0$
Principal point at origin	$(M_{kj}^{-T} \tilde{\mu}_k M_{kj}^{-1})_{13} = (M_{kj}^{-T} \tilde{\mu}_k M_{kj}^{-1})_{23} = 0$	$(\tilde{M}_{1j}^{-T} \tilde{M}_{11}^T \tilde{\omega}_1 \tilde{M}_{11} \tilde{M}_{1j}^{-1})_{13} = 0$ $(\tilde{M}_{1j}^{-T} \tilde{M}_{11}^T \tilde{\omega}_1 \tilde{M}_{11} \tilde{M}_{1j}^{-1})_{23} = 0$
Known aspect ratio $\tau=f/f_u$	$\tau^2(M_{kj}^{-T} \tilde{\mu}_k M_{kj}^{-1})_{22} - (M_{kj}^{-T} \tilde{\mu}_k M_{kj}^{-1})_{11} = 0$	$(\tilde{M}_{1j}^{-T} \tilde{M}_{11}^T \tilde{\omega}_1 \tilde{M}_{11} \tilde{M}_{1j}^{-1})_{11} = \tau^2(\tilde{M}_{1j}^{-T} \tilde{M}_{11}^T \tilde{\omega}_1 \tilde{M}_{11} \tilde{M}_{1j}^{-1})_{22}$

2.2.2 3D 重构与运动恢复

由于  $X_{ki}^{(j)} = R_j X_{ki}^{(1)} + t_j, \beta_{k1}=1, \gamma_1=1$ , 根据方程(33), 我们有

$$\alpha_{k4}^{(1)} \beta_{kj} \gamma_j q_{ki}^{(j)} K_j^{-1} m_{ki}^{(j)} = \alpha_{k4}^{(1)} q_{ki}^{(1)} R_j K_1^{-1} m_{ki}^{(1)} + t_j, i = 1, 2, \dots, 6; k = 1, 2, \dots, m \tag{38}$$

从而,

$$R_j K_1^{-1} (q_{ki}^{(1)} m_{ki}^{(1)} - q_{k1}^{(1)} m_{k1}^{(1)}) = K_j^{-1} (\beta_{kj} \gamma_j q_{ki}^{(j)} m_{ki}^{(j)} - \beta_{kj} \gamma_j q_{k1}^{(j)} m_{k1}^{(j)}), i = 1, 2, \dots, 6; k = 1, 2, \dots, m \tag{39}$$

令

$$B_{kj} = [q_{k2}^{(1)} m_{k2}^{(1)} - q_{k1}^{(1)} m_{k1}^{(1)}, q_{k3}^{(1)} m_{k3}^{(1)} - q_{k1}^{(1)} m_{k1}^{(1)}, \dots, q_{k6}^{(1)} m_{k6}^{(1)} - q_{k1}^{(1)} m_{k1}^{(1)}] \tag{40}$$

$$C_{kj} = \beta_{kj} [q_{k2}^{(j)} m_{k2}^{(j)} - q_{k1}^{(j)} m_{k1}^{(j)}, q_{k3}^{(j)} m_{k3}^{(j)} - q_{k1}^{(j)} m_{k1}^{(j)}, \dots, q_{k6}^{(j)} m_{k6}^{(j)} - q_{k1}^{(j)} m_{k1}^{(j)}] \tag{41}$$

则方程(39)可被写为矩阵形式:

$$R_j K_1^{-1} [B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{mj}] = \gamma_j K_j^{-1} [C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{mj}],$$

因此, 旋转矩阵  $R_j$  为

$$R_j = \gamma_j K_j^{-1} \underbrace{[C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{mj}]}_{D_j} [B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{mj}]^{\dagger} K_1 \tag{42}$$

将式(42)代入式(38), 得到

$$(q_{ki}^{(1)} D_j m_{ki}^{(1)} - \beta_{kj} q_{ki}^{(j)} m_{ki}^{(j)}) \alpha_{k4}^{(1)} + K_j t_j = 0, i = 1, 2, \dots, 6; k = 1, 2, \dots, m; j = 2, 3, \dots, n \tag{43}$$

令

$$E_{kj} = \begin{bmatrix} q_{k1}^{(1)} D_j m_{k1}^{(1)} - \beta_{kj} q_{k1}^{(j)} m_{k1}^{(j)} \\ q_{k2}^{(1)} D_j m_{k2}^{(1)} - \beta_{kj} q_{k2}^{(j)} m_{k2}^{(j)} \\ \vdots \\ q_{k6}^{(1)} D_j m_{k6}^{(1)} - \beta_{kj} q_{k6}^{(j)} m_{k6}^{(j)} \end{bmatrix}, k = 1, 2, \dots, m; j = 2, 3, \dots, n \tag{44}$$

$$E_j = \text{diag}[E_{1j}, E_{2j}, \dots, E_{mj}], j = 2, 3, \dots, n; C = \underbrace{[I_3, I_3, \dots, I_3]}_{18m}^T \quad (I_3 \text{ 是 } 3 \text{ 阶单位阵}) \tag{45}$$

则方程(43)可以被写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} E_2 & CK_2 & & & \\ E_3 & & CK_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ E_n & & & & CK_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \tau \end{bmatrix} = 0 \quad (46)$$

其中,  $\alpha = [\alpha_{14}^{(1)}, \alpha_{24}^{(1)}, \dots, \alpha_{m4}^{(1)}]^T, \tau = [t_2^T, t_3^T, \dots, t_n^T]^T$ .

令方程(46)的解为

$$\tilde{\alpha} = [\tilde{\alpha}_{14}^{(1)}, \tilde{\alpha}_{24}^{(1)}, \dots, \tilde{\alpha}_{m4}^{(1)}]^T, \tilde{\tau} = [\tilde{t}_2^T, \tilde{t}_3^T, \dots, \tilde{t}_n^T]^T,$$

则根据方程(25),共底梯形在第 1 个摄像机坐标系的欧氏重构为

$$X_{ki}^{(1)} = \frac{\tilde{\alpha}_{k4}^{(1)} q_{ki}^{(1)}}{r_{k1}} K_1^{-1} m_{ki}^{(1)}, i = 1, 2; X_{ki}^{(1)} = \tilde{\alpha}_{k4}^{(1)} q_{ki}^{(1)} K_1^{-1} m_{ki}^{(1)}, i = 3, 4; X_{ki}^{(1)} = \frac{\tilde{\alpha}_{k4}^{(1)} r_{k2} q_{ki}^{(1)}}{r_{k1}} K_1^{-1} m_{ki}^{(1)}, i = 5, 6, k = 1, 2, \dots, m \quad (47)$$

### 2.2.3 完整的算法

已知  $m$  个共底梯形  $\{X_{ki}; i=1, 2, \dots, 6\}$  的  $n$  幅图像为  $\{m_{ki}^{(j)}; i=1, 2, \dots, 6, j=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, m\}$ , 求解摄像机内参数矩阵  $K_j$ , 运动参数  $(R_j, t_j)$  和共底梯形的相似不变量  $\{t_{k1}, t_{k2}, \theta_k, \phi_k, \varphi_k\}$  及欧氏重构:

计算:

$$1) A_{kj} = \begin{bmatrix} -m_{k1}^{(j)} & m_{k2}^{(j)} & m_{k3}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{k3}^{(j)} & -m_{k5}^{(j)} & m_{k6}^{(j)} \end{bmatrix}; [q_{k1}^{(j)}, q_{k2}^{(j)}, q_{k3}^{(j)}, q_{k5}^{(j)}, q_{k6}^{(j)}]^T = (A_{kj}^T A_{kj})^{-1} A_{kj}^T \begin{bmatrix} m_{k4}^{(j)} \\ m_{k4}^{(j)} \end{bmatrix};$$

$$2) \text{按式(27)计算 } M_{kj}; \tilde{M}_{kj} = \det^{-1/3}(M_{kj}) \cdot M_{kj}, \beta_{kj} = \det^{1/3}(M_{k1} M_{kj}^{-1}), \hat{M}_{kj} = \beta_{kj} M_{kj}.$$

内参数矩阵  $K_j$  与相似不变量  $\{t_{k1}, t_{k2}, \theta_k, \phi_k, \varphi_k\}$ :

- 1) 构造  $(\tilde{\mu}_k, \tilde{\omega}_j)$  的线性方程组(32);
- 2) 利用摄像机内参数或共底梯形的先验知识确定  $\tilde{\mu}_k, \tilde{\omega}_j$ ;
- 3) 对  $\tilde{\mu}_k$  的第 1 个元素归一化得到相似不变量  $\{t_{k1}, t_{k2}, \theta_k, \phi_k, \varphi_k\}$ ; 对  $\tilde{\omega}_j$  进行 Cholesky 分解得到第  $j$  个摄像机的内参数矩阵  $K_j$ .

运动参数  $(R_j, t_j)$  和欧氏重构:

根据公式(42)计算旋转参数  $R_j$ ;

求解线性方程组(46), 确定平移向量  $t_j$  和共底梯形的欧氏重构.

## 3 实验

### 3.1 模拟实验

在模拟实验中我们仅考虑梯形的情况,空间共底梯形的情况可以参见文献[15]中平行六面体的情形.实验中摄像机内参数设定为(1000,1000,0.512,384),图像大小为 1024×768.为了生成空间平面内的梯形,我们首先生成一个平行六面体,然后在平行六面体的两个相邻面上分别随机生成两个梯形,再将这 4 个空间梯形投影到图像平面.为了避免求解非线性的方程组,实验中采用的梯形为直角梯形,摄像机的先验知识是:畸变因子为 0.

我们将本文方法与经典的 DLT 方法<sup>[1]</sup>进行了比较.DLT 利用 4 个梯形的 16 个顶点估计投影矩阵,然后通过 QR 分解投影矩阵的 3×3 子阵确定摄像机的内参数.我们对每个梯形图像的 4 个端点位置分别加上均值为 0,方差为  $\sigma$  的高斯白噪声,其中,  $\sigma$  的变化范围为 0~2.0 个像素.在每种噪声水平下做 100 次独立的随机实验.图 3 是两种方法估计出的摄像机各个内参数的相对误差随噪声变化的曲线,曲线上的值是 100 次实验结果的平均.由图中可以看出:相对误差随噪声水平的增大基本上呈线性增长,本文方法优于 DLT 方法.



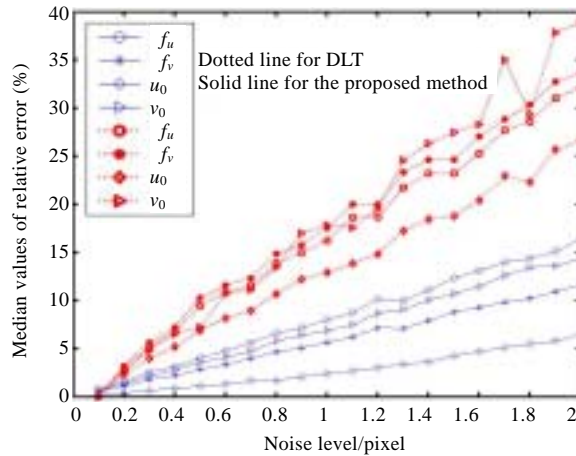


Fig.3 The relative error of the intrinsic parameters estimated by the two methods under different noise level

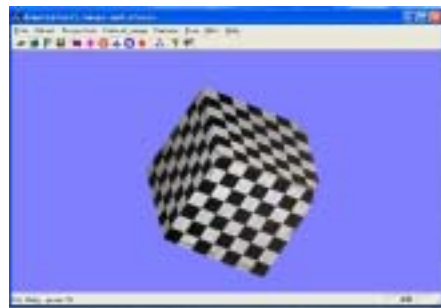
图3 两种方法估计出的摄像机各个内参数的相对误差随不同噪声水平的变化曲线

### 3.2 真实图像实验

标定块实验.图 4(a)显示了采用的标定块图像和梯形,摄像机的先验信息是倾斜因子为 0.采用本文方法和直接线性法 DLT 标定的结果分别为(2118.8,2144.8,0,534.1,386.5),(2136.6,2183.3,0,507.3,391.2).可以看出,两种方法的结果比较接近.我们利用共面性约束对整个标定块进行重构,图 4(b)显示了一个不同的视点对重构出的标定块进行纹理映射的结果.



(a) Image of calibration object and trapezia  
(a) 标定块图像和梯形



(b) Texture mapping result from a different view  
(b) 不同视点下的贴纹理的重构结果

Fig.4 Reconstruction of calibration object

图4 标定块重构

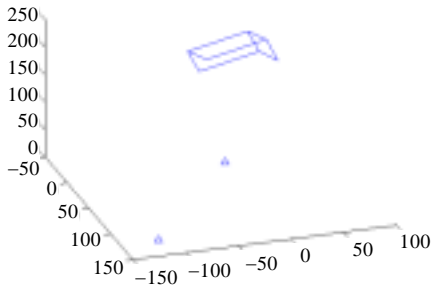
建筑物实验.我们采用了两幅图像进行标定和重构.图 5(a)和图 5(b)显示了采用的两幅图像和平行六面体,利用的先验信息是:平行六面体有 3 个直角,摄像机的倾斜因子为 0.采用本文方法恢复出的两个摄像机的内参数分别为(1469.9,1463.9,0,534.8,374.4),(1429.7,1419.8,0,526.4,386.0),获得的平行六面体的相似参数为 $(t_1, t_2) = (2.08, 1.13)$ , $(t_1/t_2) = 1.84$ ,而 $t_1/t_2$ 的真实值为 1.83.图 5(c)显示了重构出的平行六面体以及摄像机的位置.同样,我们利用共面性约束对整个建筑物进行重构,图 5(d)显示了一个不同的视点对重构出的场景进行纹理映射的结果.我们也采用了文献[14]中的因子化分解方法进行估计,得到的两个摄像机的内参数分别为(1441.3,1511.8,0,543.3,316.3),(1430.4,1493.8,0,541.9,335.9),获得的平行六面体的相似参数为 $(t_1, t_2) = (2.19, 1.20)$ , $(t_1/t_2) = 1.825$ .这两种方法在原理上是相似的,但因子化方法需要进行多次因子化分解,有可能会产生数值计算上的误差传播.由于摄像机的内参数是未知的,因此,我们无法直接断定哪种方法得到的结果更可靠,但通过平行六面体的相似参数的比较可以得出,利用本文方法恢复出的参数更加接近真实值.



(a) The first image of the building and parallelepiped  
(a) 建筑物和平行六面体的第 1 幅图像



(b) The second image of the building and parallelepiped  
(b) 建筑物和平行六面体的第 2 幅图像



(c) The recovered camera location and parallelepiped  
(c) 摄像机位置和重构出的平行六面体



(d) Texture mapping result from a different view  
(d) 不同视点下贴纹理的重构结果

Fig.5 Reconstruction of the building

图 5 建筑物的重构

## 4 结束语

本文引入了梯形的一个仿射不变量,并从这个不变量导出了梯形的射影性质以及梯形的相似不变量与摄像机内参数之间的约束关系.利用这个约束关系,我们给出了利用平行性约束线性确定摄像机的内参数、运动参数和梯形的相似不变量的方法和过程.本文的工作提供了一个基于平行性约束的框架,以往的基于平行四边形、平行六面体的方法都可以纳入到这个框架中.

## References:

- [1] Hartley R, Zisserman A. Multiple View Geometry in Computer Vision. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 71–76.
- [2] Zhang ZY. Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations. In: Proc. of the IEEE ICCV99. 1999. 666–673.
- [3] Sturm P, Maybank SJ. On plane-based camera calibration: A general algorithm, singularities, applications. In: Proc. of the IEEE CVPR99. 1999. 432–437.
- [4] Zhang ZY. Camera calibration with one-dimensional objects. IEEE-T PAMI, 2004,26(7):892–899.
- [5] Hartley R, Zisserman A. Multiple View Geometry in Computer Vision. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 454–456.
- [6] Hartley RI. An algorithm for self-calibration from several views. In: Proc. of the IEEE CVPR94. 1994. 908–912.
- [7] Pollefeys M, Gool LV. A stratified approach to metric self-calibration. In: Proc. of the IEEE CVPR97. 1997. 407–412.
- [8] Hartley RI, Agapite LD, Hayman E, Reid I. Camera calibration and search for infinity. In: Proc. of the IEEE ICCV99. 1999. 510–517.
- [9] Sturm P. Critical motion sequences for monocular self-calibration and uncalibrated Euclidean reconstruction. In: Proc. of the IEEE CVPR97. 1997. 1100–1105.

- [10] Hartley RI. Self-Calibration of stationary cameras. *International Journal of Computer Vision*, 1997,22(1):5–23.
- [11] Hartley R, Zisserman A. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 209–212.
- [12] Zhu HJ, Wu FC, Hu ZY. Camera calibration based on two parallel line segments. *Acta Automatica Sinica*, 2005,31(6):853–864 (in Chinese with English abstract).
- [13] Chen C, Yu C, Hung Y. New calibration-free approach for augmented reality based on parameterized cuboid structure. In: *Proc. of the IEEE ICCV99*. 1999. 30–37.
- [14] Wilczkowiak M, Sturm P, Boyer E. Using geometric constraints through parallelepipeds for calibration and 3D modeling. *IEEE-T PAMI*, 2005,27(2):194–207.
- [15] Wu FC, Duan FQ, Hu ZY. An affine invariant of parallelograms and its application to camera calibration and 3D reconstruction. In: *Proc. of the ECCV 2006*. LNCS 3952, Springer-Verlag, 2006. 191–204.

#### 附中文参考文献:

- [12] 祝海江,吴福朝,胡占义.基于两条平行线段的摄像机标定. *自动化学报*,2005,31(6):853–864.



段福庆(1973 - ),男,陕西大荔人,博士,讲师,主要研究领域为模式识别,计算机视觉,信号处理.



胡占义(1961 - ),男,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为计算机视觉.



吴福朝(1957 - ),男,研究员,博士生导师,主要研究领域为计算机视觉.