

# 实平面奇异代数曲线的全局 B 样条逼近\*

方美娥<sup>1+</sup>, 汪国昭<sup>1</sup>, 贺志民<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(浙江大学 数学系 计算机图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

<sup>2</sup>(浙江林学院 理学院, 浙江 杭州 311300)

## Global B-Spline Approximations of Singular Real Algebraic Plane Curves

FANG Mei-E<sup>1+</sup>, WANG Guo-Zhao<sup>1</sup>, HE Zhi-Min<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(Institute of Computer and Image Processing, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

<sup>2</sup>(College of Science, Zhejiang Forestry University, Hangzhou 311300, China)

+ Corresponding author: Phn: 013968028429, E-mail: fangmeie@163.com

Fang ME, Wang GZ, He ZM. Global B-spline approximations of singular real algebraic plane curves. *Journal of Software*, 2006,17(10):2173-2180. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/2173.htm>

**Abstract:** This paper proposes an algorithm for globally approximating real algebraic plane curves of degree  $k$  with B-spline curves of the same degree. Each connected component is approximated with a B-spline curve. It is suitable for all irreducible real plane algebraic curves with arbitrary genus (including singular curves). This method is based on our blowup sampling method of algebraic curves, which solves the difficult problem of sampling around singular points in essence. The experimental results show that the algorithm achieves better accuracy than the existed methods.

**Key words:** real algebraic curve; approximation; sampling; singular point; blowup; B-spline

**摘要:** 提出了一种用  $k$  次 B 样条曲线全局逼近实平面  $k$  次代数曲线的算法, 每个连通部分用一条 B 样条曲线逼近. 它适合于任意亏格的不可约的实平面代数曲线(包括含奇异点的曲线). 这种逼近建立在所提出的代数曲线胀开采样的基础上, 这种胀开采样算法从本质上解决了奇异点周围采样难的问题. 实验结果表明, 该方法的逼近精度高于已有算法.

**关键词:** 实代数曲线; 逼近; 采样; 奇异点; 胀开; B 样条

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

方程  $f(x,y)=0$  定义了一条实平面代数曲线, 其中  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f$  是关于  $x$  和  $y$  的实系数多项式. 当  $f$  不能分解成两个低次多项式的乘积时, 由它定义的曲线为不可约曲线. 隐式定义的代数曲线提供了判断点与曲线位置关系的简单标准, 但参数曲线用于显示以及交互设计则更为方便. 因此, 在几何设计与图形学领域, 常期望得到曲线的两种表示形式. 本文致力于实平面代数曲线的 B 样条参数表示. 众所周知, 只有亏格为 0 的代数曲线能用参数

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60473130 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.G2004CB318000 (国家重点基础研究发展规划(973)); the Foundation of the Department of Education of Zhejiang Province of China under Grant No.20060676 (浙江省教育厅基金)

Received 2006-01-12; Accepted 2006-03-09

形式精确表示,而对亏格非 0 的代数曲线就只能考虑逼近的参数化方法了.许多国、内外学者在这方面都进行了研究,但在 1997 年以前提出的方法<sup>[1]</sup>仅限于研究非奇异的代数曲线或某些简单的奇异曲线.1997 年,文献[2]第一次将这些方法推广到能够处理实平面内的奇异代数曲线,得到给定曲线  $C^1$  连续(除奇异点外)的分段有理参数逼近,但这种方法的逼近精度不高.文献[3]用  $C^1$  连续的分段二次有理 Bézier 曲线逼近任意亏格的代数曲线,逼近精度有较大改善.但由于采用了二次有理 Bézier 曲线,因此只能做到  $C^1$  连续分段逼近.这两种方法的实质都是不断地计算给定曲线的采样点,然后在采样点附近或两采样点之间构造参数曲线,分段逼近给定的代数曲线.文献[2]首先计算给定曲线的奇异点,在这些点幂级数展开,用 Páde 逼近的方法产生一段有理参数曲线,逼近已求得的每个奇异点附近曲线段;然后计算这些逼近的收敛域端点参数对应的给定曲线上的简单点,进一步地,在简单点处用类似方法求得参数逼近曲线段.文献[3]先计算特殊点(包括奇异点、拐点和  $x$  轴方向上的极值点),用有理二次 Bézier 曲线插值两相邻特殊点,逼近两点间曲线段,通过在每段曲线肩点处递归细分曲线重新逼近以提高精度.两种方法本质上都属于分段逼近,只能达到  $C^1$  连续,而且逼近过程中需要较多复杂的符号计算.

本文先用一种高精度快速的采样方法对给定平面代数曲线采样,得到大量高精度的采样点(足以显示曲线的形状).对于非奇异的代数曲线,我们用动态分裂采样方法可以获得满意的结果.动态分裂采样方法是一种微分方程采样方法.当曲线含奇异点,且奇异点为非一般奇异点或奇异点的重数较高时,这些点周围采样有较大误差.实际上,由于奇异点处曲线形状复杂,其他采样方法在这些点处采样也很困难.我们为此提出了胀开采样方法.在奇异点处胀开曲线,分解奇异点,将一条奇异曲线转化为若干非奇异曲线,然后用动态分裂方法对这些非奇异曲线进行采样,从本质上解决了奇异点处采样难的问题.在采样的基础上,我们对采样点排序得到给定曲线各连通部分的有序采样点列,再用一条 B 样条曲线全局逼近每个有序点列.理论上,B 样条曲线次数可选取与给定曲线相同的次数,实现  $C^{k-1}$  阶( $k$  为代数曲线次数)连续.但实际应用中,曲线次数太高反而会给某些操作(如求交运算等)造成困难.因此,我们统一选用 3 次 B 样条实现  $C^2$  连续.实验结果表明,该算法精度也优于以往所有算法.

本文第 1 节描述采样非奇异曲线的动态分裂方法和奇异曲线的胀开采样方法.第 2 节给出采样点的排序和 B 样条逼近方法.第 3 节给出实验结果并进行误差分析和比较.

## 1 平面代数曲线采样方法

一般隐式曲线曲面(包括代数曲线曲面)的采样方法可分为 3 类:光线跟踪法、枚举法<sup>[4]</sup>和微分方程方法<sup>[5,6]</sup>.Taubin<sup>[7]</sup>专门针对代数曲线曲面提出了一种空间递归细分的采样方法,实际上这也属于枚举法.前两种方法常用于隐式曲线曲面的绘制,但它们的精度受到光线密度或细分单元的限制,要想得到高精度的采样点非常耗时;而第 3 种方法通过迭代求解一个微分方程(方程的解约束在隐式曲线曲面上)来获得采样点,精度较高且速度快.另外,代数曲线的微分计算简单、精确,因此,我们采用动态分裂方法采样平面代数曲线.算法 1 给出了动态分裂算法的主要步骤.动态分裂方法属于微分方程方法,类似于文献[6,8]的随机微分方程采样方法(stochastic sampling method,简称 SSM).为了使它更适合于代数曲线,尤其是多连通多拐点的代数曲线,我们对 SSM 方法作了一些改进,主要体现在两个方面:

- (1) 文献[8]在处理开放式采样对象时,为了使迭代解约束在采样包围盒内,采用反复试探的方法.这样既耗时又损害了算法的稳定性.我们在算法 1 的第(3)步建立一个映射使每次参与迭代的解约束在包围盒内,这样所有迭代解都有效;
- (2) 在第 5 步我们引入了动态分裂机制强制迭代解尽可能在整个包围盒内“跳跃”,避免大量的采样点过早地聚集在某一个小区域.

算法 1. 动态分裂采样.

输入:实平面代数曲线  $C:f(x_1,x_2)=0$  以及采样包围盒  $B=\{(x_1,x_2)|a_i \leq x_i \leq b_i, i=1,2\}$ ;

输出:曲线  $C$  的采样点集  $P_{set}$ .

- (1) 取初值  $P_{set}=\emptyset, x(0)=(x_1(0), x_2(0))$ ;

(2) 按变量  $t$  离散,用数值迭代法求解微分方程(1),得到一个迭代解  $x(t)$ ;

(3) 
$$dx_i(t) = dx_i^{(T)}(t) + dx_i^{(N)}(t) + dx_i^{(S)}(t) \tag{1}$$

(4) 利用映射  $U$  将  $x(t)$ 映射到包围盒  $B$  内得到  $ux(t)$

(5) 
$$U: \mathbb{R}^2 \rightarrow B, u(x_i) = \frac{b_i - a_i}{2} \cdot \sin(ax_i) + \frac{b_i + a_i}{2}, i = 1, 2 \tag{2}$$

(6) 对  $ux(t)$ 用牛顿矫正法得到更精确的靠近曲线  $C$ ,假定矫正后的解为  $x^*(t)$ ,则  $P_{set} \leftarrow x^*(t)$ .若采样点足够,算法结束;否则执行第(5)步;

(7) 若  $\|x^*(t) - x^*(t - \Delta t)\| < \delta_t$ ,将  $x^*(t)$ 分裂成两个新的初始值  $x(0) \leftarrow x^*(t) \pm \delta$ ,  $\delta_t \leftarrow \delta_t - \delta_{\min}$  转至第(2)步;否则,  $t \leftarrow t + \Delta t, x(0) \leftarrow x^*(t)$ ,转至第(2)步.

在上述算法中,微分方程(1)的解释详见文献[6],步长  $\Delta t \in (0, 1)$ ,对非奇异曲线采样,取  $\Delta t \in [0.01, 0.1]$ 较适合;映射公式(2)中  $\omega$ 常取 1;  $\delta_t$ 为动态分裂标准,初始值为  $d$ (采样包围盒的对角线长度),其值随着迭代次数的增加而逐渐减小,扰动  $\delta \in \left[ \min_{i=1,2}\{a_i\}, \min_{i=1,2}\{b_i\} \right], \delta_{\min}$  预先给定的常数,可视为采样密度.

微分方程(1)中某些项含有因式  $1/|\nabla f(x)|$ ,因此,当采样对象为奇异曲线时,奇异点附近  $|\nabla f(x)|$ 的值趋近于 0.这个值的微小偏差可能导致迭代解的较大误差,直接用上述算法采样在奇异点周围得不到满意的效果.为此,我们先胀开曲线分解奇异点,将一条奇异曲线转化为若干条非奇异曲线,在奇异点处胀开曲线实际上是进行一系列的平移变换和二次变换(详见参考文献[8]),如算法 2 所示.

算法 2. 胀开实平面代数曲线分解奇异点的方法.

输入:实平面奇异代数曲线  $C: f(x, y) = 0$ ;

输出:胀开曲线  $C$  分解奇异点得到的非奇异曲线集  $V$ .

1. 计算曲线  $C$  的奇异点,令奇异点集合为  $S_{set} = \{S_i | i = 0, 1, \dots, n-1\}$ ;
2. 设置初始值,  $i = 1, V = \emptyset, x_1^0 = x_2^0 = x, y_1^0 = y_2^0 = y, T_k^{(0)} = I (k = 1, 2), I$  为恒等映射;
3. 选取  $S_{set}$  第 1 个点  $S_0(x^*, y^*)$ ,在该点处胀开曲线  $C$ ,若  $S_0$  不在坐标原点,则作平移变换  $T_p^{(i)}: x^{(i)} = \overline{x^{(i)}} + x^*, y^{(i)} = \overline{y^{(i)}} + y^*$  将其移至原点,再对曲线  $\overline{C}: f(\overline{x^{(i)}} + x^*, \overline{y^{(i)}} + y^*) = 0$  作两个对称的二次变换  $Q_1^{(i)}: x_1^{(i)} = \overline{x^{(i)}}, y_1^{(i)} = \overline{y^{(i)}} \cdot \overline{x^{(i)}}, Q_2^{(i)}: x_2^{(i)} = \overline{y^{(i)}}, y_2^{(i)} = \overline{x^{(i)}} \cdot \overline{y^{(i)}}$ ,分别除去例外直线  $\overline{x^{(i)}} = 0, \overline{y^{(i)}} = 0$ ,得到平面代数曲线  $C_1^{(i)}: f_1^{(i)}(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}) = 0, C_2^{(i)}: f_2^{(i)}(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}) = 0$ ,记下这两条曲线及其相应的坐标变换  $T_k^{(i)} = T_k^{(i-1)} \circ (T_p^{(i)} \circ Q_k^{(i)})$  (从  $(x, y)$  到  $(x_k^{(i)}, y_k^{(i)})$ ,  $k = 1, 2$  所进行的坐标变换的复合变换).同时分别计算例外直线与各自对应代数曲线的交点,并直接根据奇异点的定义判断交点是否对应代数曲线的交点,若是,说明当前处理的奇异点  $S_0$  是当前曲线  $C$  的非一般奇异点,一次胀开不能完全分解(一般奇异点一次胀开即可完全分解),而会产生新的奇异点(即无限邻近点),它是例外直线与对应胀开所得曲线的交点,此时则将两条代数曲线对应的无限邻近点分别记为  $S_{c_1}, S_{c_2}$ ;
4. 更新  $S_{set}$ ,即  $S_{set} \leftarrow S_{set} \cup S_0, n \leftarrow n + 1$ ;
5. 对两条曲线  $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}$  分别进行如下操作:计算当前  $S_{set}$  中每个点经相应坐标变换  $T_k^{(i)}, k = 1, 2$  转换成新坐标系下的坐标,删除无穷远点,并将第 3 步中求得的无限邻近点添加到  $S_{set}$  中,此时,若  $S_{set}$  为空,则  $V \leftarrow V \cup C_k^{(i)}$ ;否则,  $C \leftarrow C_k^{(i)}, i \leftarrow i + 1$ ,转至第 3 步.

算法 2 的第 1 步中奇异点的计算参照文献[2]中奇异点的计算方法,我们知道:一般奇异点只需一次胀开就被完全分解了,而非一般奇异点处胀开时可能产生新的奇异点,但每次胀开曲线的亏格都会降低.定理 1 保证了算法 2 在胀开有限次后结束.

定理 1<sup>[9]</sup>. 不可约平面代数曲线只有有限多个奇异点,而且能通过有限次胀开完全分解.

在算法 1 和算法 2 的基础上,算法 3 给出了奇异曲线胀开采样的整体框架.胀开采样实际上是先将奇异曲线分解成非奇异曲线集,然后对每条奇异曲线采样,这样就能避开奇异点,获得高精度的采样点.算法的第 3 步给出了分

解后非奇异曲线采样包围盒的确定方法及理由.

算法 3. 奇异平面代数曲线的胀开采样方法.

输入:实平面奇异代数曲线  $C: f(x,y)=0$  以及采样包围盒  $B_0=\{(x,y)|a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\}$ ;

输出:曲线  $C$  的采样点集  $SP$ .

1. 取初始值  $SP=\emptyset$ ;
2. 用算法 2 胀开曲线  $C$  分解所有奇异点得到非奇异曲线集  $V=\{C_i|i=0,1,\dots,m\}$ ,  $C_i: f_i(x^{(i)}, y^{(i)})=0$  且  $(x^{(i)}, y^{(i)})=T^{(i)}(x, y)$ ;
3. 用算法 1 分别对  $C_i(i=0,1,\dots,m)$  采样,采样前须确定包围盒  $B_i=\{(x^{(i)}, y^{(i)})| a_1^{(i)} \leq x^{(i)} \leq b_1^{(i)}, a_2^{(i)} \leq y^{(i)} \leq b_2^{(i)}\}$ ,实际上,除原坐标变量  $x$  和  $y$  按给定的范围取值以外,其他胀开过程中产生的新变量全部在  $[-1,1]$  内取值.从算法 2 的第 3 步可知,每次胀开都做两个对称的二次变换,它们所产生的新变量  $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}$  恰好互为倒数,因此二者都在  $[-1,1]$  范围内取值便涵盖了整个实数域,保证了采样的完整性.假定对  $C_i$  的采样点集为  $SP_i^*$ ,对每个点实施逆变换  $T^{(i)-1}$  便可得到曲线  $C$  上的对应点集  $SP_i$ ,则  $SP = \bigcup_{i=0}^m SP_i$ .

图 1 给出了曲线  $C_1: f(x,y)=2y^4-3xy^2+x^2-2x^3+x^4, C_2: f(x,y)=(x^2+y^2)^3-y(x^4+y^4-6x^2y^2)-4x^2y(x^2-y^2)$  分别用胀开采样方法和直接用动态分裂方法采样得到的结果(图 1(a)、图 1(c)为直接用 DFS 方法;图 1(b)、图 1(d)为用胀开采样方法).从图中可以看出,当奇异点为非一般奇异点(图 1(a)、图 1(b)中标有黑框的点)或奇异点重数较高(图 1(c)、图 1(d)中标有黑框的点)时,胀开采样的优势就更加明显.这是因为胀开后奇异点被分解,采样根本不受奇异点的影响所致.

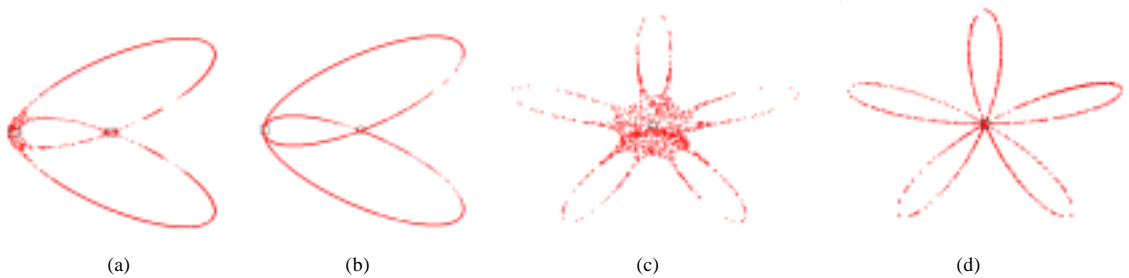


Fig.1 The results of sampling  $C_1$  and  $C_2$

图 1 曲线  $C_1, C_2$  的采样结果

## 2 采样点排序及 B 样条逼近

### 2.1 排序

Bajaj 提出了一种对任意代数曲线上的点的排序算法,详见文献[10].采样点具有一定的误差,结合区间算术<sup>[11]</sup>等手段也可以对采样点排序,但算法比较复杂.本文针对单连通奇异曲线给出一种简单的排序方法(非奇异曲线只需从第 3 步开始),步骤如下:

(1) 假设曲线经算法 2 胀开得到非奇异曲线集合  $V = \bigcup_{i=1}^N (C_i^{(1)} \cup C_2^{(i)})$ ,其中得到第  $i_0$  对曲线经过的胀开次数(设为  $M$ )最多,且产生的变量序列为  $(x, y) \xrightarrow{T_k^{(1)}} (x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) \dots \xrightarrow{T_k^{(i)}} (x_k^{(i)}, y_k^{(i)}) \dots \xrightarrow{T_k^{(M)}} (x_k^{(M)}, y_k^{(M)}) (k=1,2)$ ,该曲线经算法 3 采样得到的采样点集为  $SP$ .

(2) 将  $SP$  中点的坐标转化为关于变量  $(x_k^{(M)}, y_k^{(M)})$  的坐标值.在该坐标系下,点集一般是关于  $y_k^{(M)}$  单调的或凸的(点集关于  $y_k^{(M)}$  单调或点集为凸分别是指存在一条关于  $y_k^{(M)}$  单调的曲线段或一段凸的曲线段通过点集中每一点,而一条曲线关于  $y_k^{(M)}$  单调是指垂直于  $y_k^{(M)}$  轴的直线与它有且只有一个交点).即使不然,也很容易根据

胀开采样结果将其划分为关于  $y_k^{(M)}$  单调或凸的子集.如图 2 所示:图 2(a)中采样点对应原曲线胀开一次奇异点被完全分解,所有采样点在  $xy_1^{(1)}$  坐标平面内关于  $y_1^{(1)}$  单调(如图 2(a')所示);图 2(b)中采样点对应原曲线奇异点经两次胀开被分解,所有采样点在  $x_1^{(2)}y_1^{(2)}$  坐标平面内是凸的(如图 2(b')所示);图 2(c)中采样点对应原曲线胀开后的非奇异曲线经历的胀开次数最多为 3 次,该曲线坐标变量为  $(x_1^{(3)}, y_1^{(3)})$ ,所有采样点在该坐标平面内按  $y_1^{(3)}$  正负性可分成两个单调点集(如图 2(c')所示),而对关于  $y_k^{(M)}$  单调的点集只需按  $y_k^{(M)}$  的值的大小升序或降序排列即可,凸点集的排序也很简单,将坐标原点移至点集中的某一点(避免与  $y$  轴相交),按各点与原点连线的斜率排序即可.

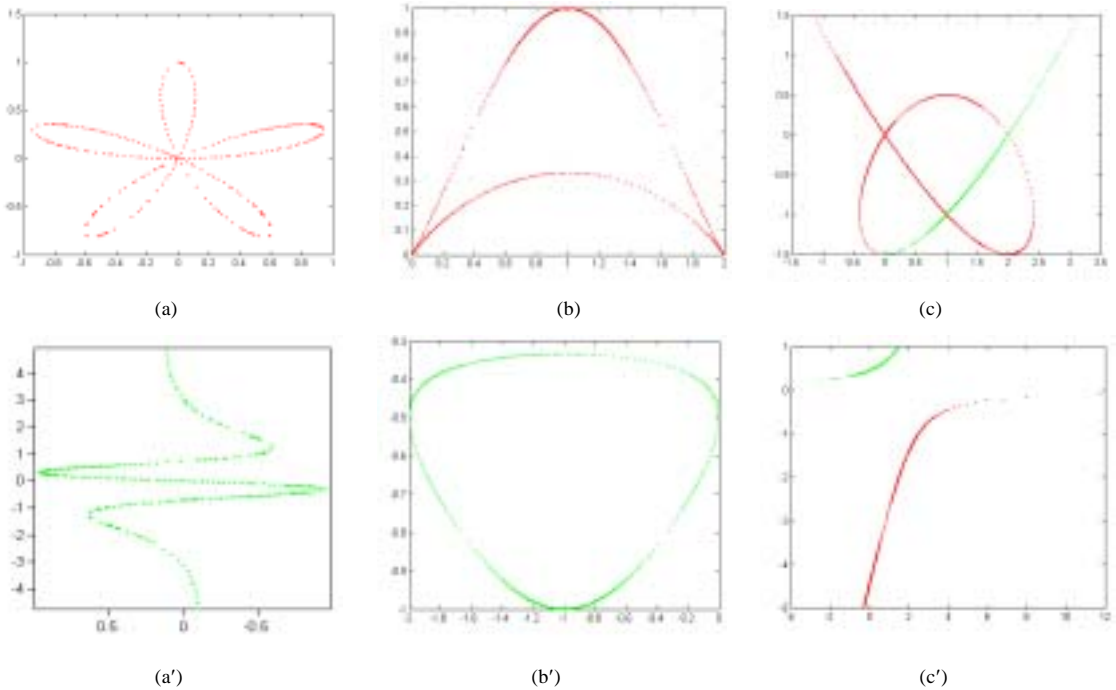


Fig.2 The sample points of three algebraic plane curves in (a), (b), (c) and corresponding points on  $x_k^{(M)}y_k^{(M)} - plane$  in (a'), (b'), (c').

图 2 3 条平面代数曲线的采样点集(a), (b), (c)及其在  $x_k^{(M)}y_k^{(M)}$  坐标平面内的对应点集(a'), (b'), (c')

(3) 若由以上步骤我们得到一个有序点列,则排序结束;若得到若干有序点列,还要进一步确定各点列的连接关系.对闭曲线而言,可任选一个作为起始点列;而对开放式曲线,需按曲线的形状(容易从采样结果中得到)选定起始点列,各点列的连接顺序只需按各点列首末端点在  $XY$  坐标系内的距离来确定:假设第  $i$  个点列已经确定,则比较该点列末端点与未确定顺序的点列的首末端点的距离,选择与它距离最近的点所在点列为第  $i+1$  个点列;若与首端点距离最近,则该点列排序不变;若与末端点距离最近,则将它倒序排列后与第  $i$  个点列相连.这样便得到所有采样点的一个有序点列.

### 2.2 全局B样条逼近

在采样和排序的基础上,平面代数曲线的逼近问题转化为有序点列的逼近问题.不失一般性,我们只考虑单连通曲线的逼近.对于多连通曲线,经排序后,每个连通部分对应一个有序点列,每个有序点列分别用一条曲线逼近即可.本文采用 B 样条曲线逼近,B 样条的次数  $k$  若选为给定代数曲线的次数,则可实现  $C^{-1}$  阶连续.为了简单起见,我们的例子均采用常用的 3 次多项式非均匀 B 样条.由于采样点较多且精度较高,我们从点列中依次抽取适当数量的点,求一条 B 样条插值曲线作为初始逼近曲线,并根据给定的误差要求删除或添加采样点,最终得

到一条在给定误差范围内逼近给定平面代数曲线,且选取的采样点尽量少的 B 样条参数曲线.为了方便与文献[2,3]的结果进行比较,我们采用与文献[3]相同的误差函数.若给定平面代数曲线  $C: f(x,y)=0$ ,逼近的参数曲线  $P(t)=(x(t),y(t))$ ,则误差函数为  $e(t) = \frac{f(x(t), y(t))}{[f_x^2(x(t), y(t)) + f_y^2(x(t), y(t))]^{1/2}}$ , 参数曲线的逼近误差定义为  $\max_i e(t_i)$ ,  $t_i=i/N, N$  取一合适的整数.从误差函数可以看出,它是相对曲线  $C$  的误差,而不仅仅是逼近采样点列的误差,它包含了采样误差,因而是本文代数曲线逼近的全局误差.

算法 4. 有序点列的 B 样条逼近.

输入:  $k$  次平面代数曲线  $C: f(x,y)=0, (x \in [a_1, b_1])$  以及它的采样点集的有序点列  $\{P_i\}_{i=1}^n$ , 正常数  $\varepsilon$ ;

输出: 一条曲线  $C$  的 B 样条逼近曲线, 插值  $\{P_i\}_{i=1}^n$  中的一些点, 但选取的采样点尽量少, 且逼近误差不超过  $\varepsilon$ .

- (1) 用数值方法计算曲线  $C$  的弧长  $l = \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{1 + f_x^2} dx$ , 用来大致确定初始逼近曲线插值采样点数目  $m$  (通常, 若采样面积为单位面积时, 每单位弧长选取 20 个采样点比较合适);
- (2) 若曲线  $C$  为闭曲线, 将第一个点重置到  $\{P_i\}_{i=1}^n$  的末位置. 从点列  $\{P_i\}_{i=1}^n$  中均匀地抽取大约  $m$  个点, 其中首末两点在整个逼近过程中都必须保留, 这  $m$  个点仍然构成有序点列  $\{Q_i\}_{i=1}^m$ ;
- (3) 计算曲线  $C$  在两端点(闭曲线为同一个点)处的一阶导数(两端点处仅  $C^1$  连续), 添加为 B 样条曲线端点处的插值条件;
- (4) 利用插值算法求得插值  $\{Q_i\}_{i=1}^m$  的  $k$  次 B 样条曲线  $P(t)$ , 详见文献[12];
- (5) 计算  $N$  个参数值对应点的误差  $e(t_i), t_i=i/N (i=1, \dots, N-1)$ , 本文例子中取  $N$  为 20. 若  $e(t_i) > \varepsilon$ , 则在该点所处的两个采样点间按正确位置插入一个新的采样点(从  $\{P_i\}_{i=1}^n$  中选取)至  $\{Q_i\}_{i=1}^m$  中; 若  $e(t_i) < \varepsilon \times 10^{-3}$ , 则从  $e(t_i) > \varepsilon$  删除该点两旁的两个采样点. 若没有点可添加或删除, 则算法结束; 否则执行下一步;
- (6) 令修改后的点列为  $\{Q_i\}_{i=1}^m$ , 则  $\{Q_i\}_{i=1}^m \leftarrow \{Q_i\}_{i=1}^{m-2}$ , 转至第(4)步, 直到第(4)步被调用预定次数, 算法结束.

### 3 实验结果及误差分析

图 3 分别给出了逼近平面代数曲线  $C_1, C_3: x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0, C_4: (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0, C_5: (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0, C_6: (x^2 + y^2)^5 - 16x^2y^2(x^2 - y^2)^2 = 0, C_7: (x^2 - 2x)^2 - y^2(3 + 2y) = 0$  的 B 样条曲线及其误差分析图, 逼近曲线为 3 次 B 样条插值曲线. 图 3(a) 还标出了  $C_1$  的最终逼近曲线插值的 42 个采样点(初始 B 样条曲线选择 190 个采样点插值), 逼近误差为  $8.995 \times 10^{-5}$ . 从图 3 的误差分析图可以看出: 除个别点外, 各点误差一般不超过  $1 \times 10^{-5}$ . 表 1 将本文与文献[2]及文献[3]对  $C_i (i=1, 3, 4, 5)$  的逼近结果进行了比较: a-deg 表示给定代数曲线的次数; p-deg 表示逼近的参数曲线次数. 文献[2,3]为有理逼近曲线  $P_1(t)/P_2(t), (m,n)$  分别表示  $P_1(t), P_2(t)$  的次数. 显然, 本文结果有以下优势: (1) 对奇异曲线设计了胀开采样算法, 从本质上解决了奇异点周围采样难的问题, 从而易获得大量高精度的采样点; (2) 在对采样点排序的基础上用一条 B 样条曲线逼近给定曲线, 因而是全局逼近而非分段逼近; (3) 逼近的 B 样条曲线次数可选为代数曲线的次数  $k$  实现  $C^k$  连续, 而相比较的两种方法只能使用二次 Bézier 曲线实现  $C^1$  连续; (4) 逼近精度比其他算法高得多.

Table 1 Comparison of our results with results in Refs.[2,3]

表 1 本文与文献[2,3]中结果比较

Algebraic curves		$C_1$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
a-deg		4	4	4	6
p-deg	Ref.[2]	(2,1)	(3,3)	(2,1)	(2,1)
	Ref.[3]	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)
	Our paper	3	3	3	3
error	Ref.[2]	0.1	0.1	0.09	0.1
	Ref.[3]	0.003	0.005	0.005	0.003
	Our paper	$8.995 \times 10^{-5}$	$9.832 \times 10^{-4}$	$5.207 \times 10^{-5}$	$9.832 \times 10^{-3}$

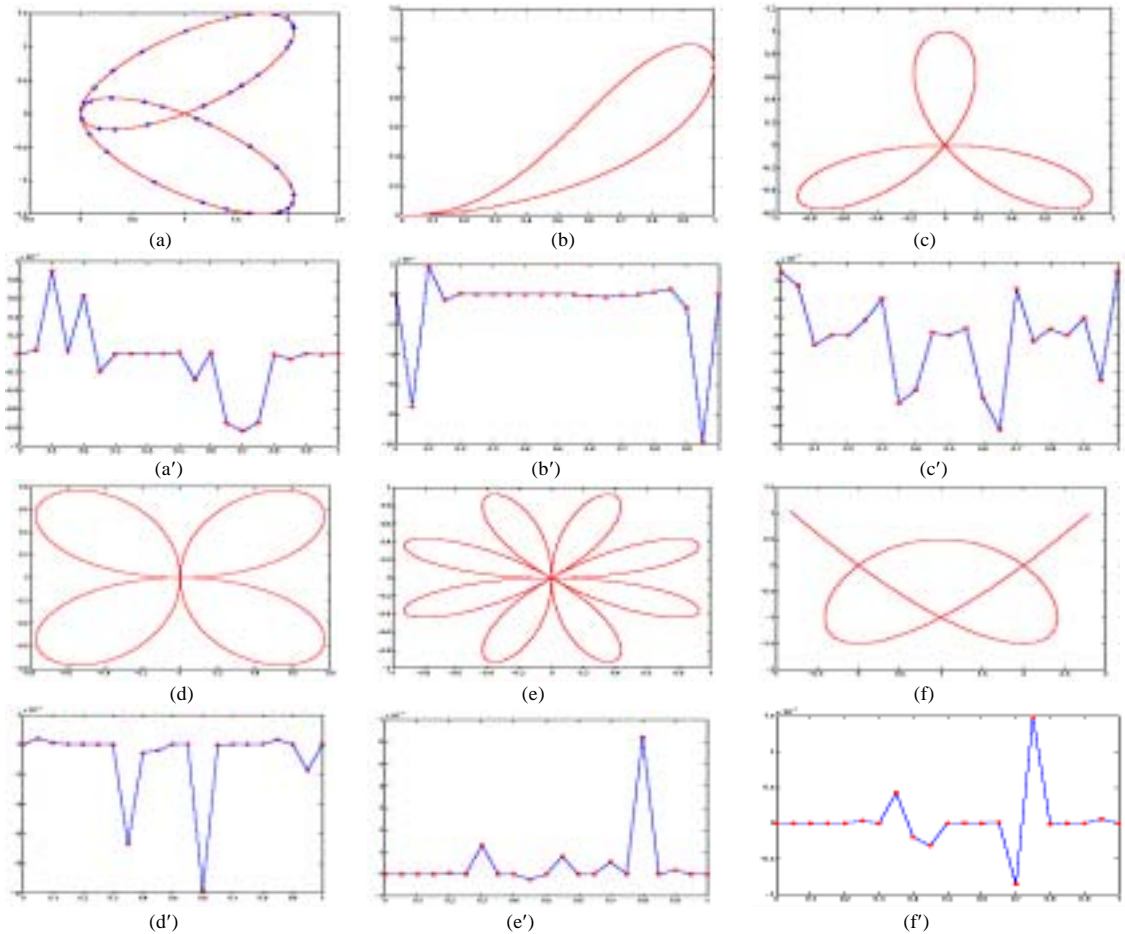


Fig.3 The results of globally approximating  $C_i$  ( $i=1,3,4,5,6,7$ ) with B-spline curves respectively in (a),(b),(c),(d),(e),(f) and corresponding graphs of error analysis in (a'),(b'),(c'),(d'),(e'),(f')

图 3 用 B 样条曲线全局逼近  $C_i(i=1,3,4,5,6,7)$  的结果(a),(b),(c),(d),(e),(f) 及其误差分析图(a'),(b'),(c'),(d'),(e'),(f')

**References:**

- [1] Montaudouin Y, Tiller W, Vold H. Application of power series in computational geometry. Computer Aided Design, 1986,18(10): 514-524.
- [2] Bajaj C, Xu GL. Piecewise rational approximations of real algebraic curves. Journal of Computational Mathematics, 1997,15(1): 55-71.
- [3] Gao XS, Li M. Rational quadratic approximation to real algebraic curves. Computer Aided Geometric Design, 2004,21(10): 805-828.
- [4] de Figueiredo LH, Stolfi J. Adaptive enumeration of implicit surfaces with affine arithmetic. Computer Graphics Forum, 1996, 15(5):287-296.
- [5] Witkin A, Heckbert P. Using particles to sample and control implicit surfaces. Computer Graphics, 1994,28(5):269-277.
- [6] Tanaka S, Morisaki A, Nakata S, Fukuda Y, Yamamoto H. Sampling implicit surfaces based on stochastic differential equations with converging constraint. Computers & Graphics, 2000,24(3):419-431.
- [7] Taubin G. An accurate algorithm for rasterizing algebraic curves. Solid Modeling and Applications, 1993(2):221-230.
- [8] Tanaka S, Shibata A, Yamamoto H, Kotsuru H. Generalized stochastic sampling method for visualization and investigation of implicit surfaces. Computer Graphics Forum, 2001,20(3):359-367.
- [9] Hartshorne R; Feng KG, Liu ML, Xu MW, Trans. Algebraic Geometry. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese).
- [10] Bajaj C, Jonestone K. Sorting points along an algebraic curve. SIAM Journal on Computing, 1990,19(5):925-967.

- [11] de Cusatis Junior A, de Figueiredo LH, Gattass M. Interval methods for ray casting implicit surfaces with affine arithmetic. In: Proc. of the SIBGRAP'99. IEEE Press, 1999. 65-72.
- [12] Fang ME, Man JJ, Wang GZ, Quan HY. Unilingual algorithm of solving control vertexes of multiple knots matrix. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2006,21(1):95-104 (in Chinese).

#### 附中文参考文献:

- [9] 哈茨霍恩,著;冯克勤,刘木兰,胥鸣伟,译.代数几何.北京:科学出版社,2001.
- [12] 方美娥,满家巨,汪国昭,全惠云.重型值点阵的样条插值统一求解算法.高校应用数学学报,2006,21(1):95-104.



方美娥(1974 - ),女,博士生,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.



贺志民(1966 - ),男,副教授,主要研究领域为智能计算,计算机图形学.



汪国昭(1944 - ),男,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.



### 《软件学报》面向互联网资源共享的虚拟计算环境专刊 征文通知

面向互联网资源共享的虚拟计算环境是网络计算技术与软件技术的交叉研究领域。资源虚拟化是计算机技术的经典概念。进入网络计算时代,网络资源的战略价值日益突显,人们自然希望将资源虚拟化概念拓展到网络资源的管理和利用中。自1980年代初“网络就是计算机”的概念提出以来,围绕网络资源虚拟化的努力就一直没有停止。经过20多年的研究与实践,人们认识到,互联网环境与传统计算机环境存在本质差别,对成长、自治和多样的网络资源,难以沿用传统的资源虚拟化概念和全局集中控制式的资源管理,必须在虚拟计算环境的概念、方法和机理上寻求新的突破。推出“面向互联网资源共享的虚拟计算环境”专刊,总结国内外在该研究领域取得的重要研究成果,特别是我国863计划、973计划和自然科学基金重大研究计划在该领域的最新研究成果,展望发展趋势,探讨互联网这一战略资源的深度利用,具有重要的现实意义和学术价值。本专刊将在《软件学报》2007年第8期出版,现特向国内外虚拟计算环境相关的研究人员和实践人员公开征集稿件。本专刊将收录国内外在互联网资源虚拟化及其管理新机理方面的创新性、突破性研究成果,展示虚拟计算环境在国家信息化中的应用前景。读者群体包括分布计算领域的研究者和专业软件架构师,以及软件企业的工程师等。

专刊题目:面向互联网资源共享的虚拟计算环境

特约编辑:卢锡城(国防科学技术大学) 怀进鹏(北京航空航天大学)

#### 一、征文范围

- (1) 互联网资源管理的基础理论和新型模型,如互联网资源管理的分析评估理论及其计算性质、网络资源的社会管理模型等。
- (2) 虚拟计算环境的体系结构,如面向服务的体系结构、面向主体的体系结构等。
- (3) 网络资源虚拟化与表示技术,如基于Web服务的资源虚拟化与发布/发现技术、基于的主体资源虚拟化与资源主体设计技术、网络资源的语义表述等。
- (4) 互联网资源管理新机理,如网络资源的语义聚合、协同和信任等管理机理等。
- (5) 虚拟计算环境的实验与应用。

上述各项仅属举例性的,也非优选题目。论文内容并不仅限于此,所有与虚拟计算环境相关的内容均可投稿。

#### 二、投稿要求

1. 投稿方式:采用“软件学报在线投稿系统”(http://www.jos.org.cn:8080/jos/jsp/index.jsp)投稿。注意事项:请在投稿时,在投稿类型中选择“专刊”类型,“虚拟计算环境专刊”字样。
2. 稿件格式:参照《软件学报》论文格式(学报网站上提供了论文模版http://www.jos.org.cn/download.htm,可下载)。
3. 投稿文章未在正式出版物上发表过,也不在其他刊物或会议的审稿过程中,不存在一稿多投现象;保证投稿文章的合法性(无抄袭、剽窃、侵权等不良行为)。
4. 其他投稿须知请参阅《软件学报》投稿指南http://www.jos.org.cn/directory.htm
5. 专刊投稿文章不收审稿费;通过初审的投稿作者需提交投稿声明;录用刊发文章将收取软件学报标准版面费;发表之后,将按软件学报标准支付稿酬,并赠送样刊及单行本。

#### 三、重要时间

截稿日期:2007年3月1日

录用通知发出时间:2007年5月10日

录用修改稿提交日期:2007年6月10日

出版日期:2007年第8期