#### 转化成 $n_{cr}$ 与 a 的关系为

$$n_{\text{cr} \, 1} = 5550 \, 9 - \, 8 \, 725/a$$
 $n_{\text{cr} \, 1} = 64315 - \, 2115/a$ 
 $(0 \, 2 \le a \le 1, \, 0)$  (4)

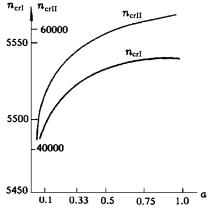


图 3  $n_{crI}$  、  $n_{crII}$  随刚性系数 a 的变化曲线

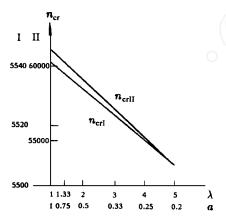


图 4  $n_{\text{cr}}$  [、 $n_{\text{cr}}$  [随  $\lambda$  (1  $\leq$   $\lambda$   $\leq$  5) 的变化

式 (4) 即表示了  $n_{cr}$  刚性系数 a (0  $2 \le a \le 1$  0) 的关系式 3 结 论

- 1) 实测和计算综合分析表明, 螺钉拧紧力矩下降, 连接部位结构刚性下降, 能引起各阶临界转速下降
- 2) 利用式 (2) 和式 (4) 或图 2 和图 4, 可从拧紧 力矩推算刚性系数和临界转速值; 或从临界转速值推 算拧紧力矩, 以便确定使用期间转子的可靠性
- 3) 发动机转子热端部件连接处的应力松弛能引起螺钉拧紧力矩的下降, 严重时, 会引起临界转速下降和转子振动加剧 为此, 在长期使用后, 应分解转子, 再次拧紧螺钉并锁紧
- 4) 本文提供的研究途径,不难对同类型连接按相同方法导出公式,因而本方法对一般发动机也有参考价值

致谢 文中计算所用的支承刚性、盘的惯矩由任平珍同志提供、在此表示感谢!

#### 参考文献

- 1 林永福 螺栓拧紧力矩与轴向力关系及其影响因素研究 西 北工业大学硕士论文,1990
- 2 刘智敏 误差与数据处理 北京: 原子能出版社, 1983: 52 ~ 165
- 3 屈维德 机械振动手册 北京: 机械工业出版社, 1992: 16~ 19

1996年3月20日收到第1稿, 1996年6月3日收到修改稿)

# 双连杆柔性机械臂系统中的 一种实时准静态分离方法

段继承 陆佑方 阎亚坤 麻文焱 王玉臣 史志霞 (吉林工业大学,长春 130025) (中科院机器人学开放研究实验室,沈阳 110015)

摘要 对于在铅垂平面内运动的双连杆柔性机械臂系统,本文提出一种从检测应变信号中,进行实时准静态分离的方法,实现了在端点轨迹跟踪控制中对弹性振动的有效控制

关键词 双连杆柔性机械臂, 准静态分离, 振动控制引 言

我们柔性多体系统动力学与控制课题组研制完成

力学与实践

一台双连杆柔性机械臂动力学与控制试验平台,已进行了大量的性能测试和控制实验,该平台由两个关节直流伺服电机独立驱动,柔性臂为铝合金材料。已实现末端操作器作直线。圆周、圆弧的轨迹跟踪和点位振动控制的实验,并设有实现各种控制策略的接口。图 1 为该试验平台的照片.

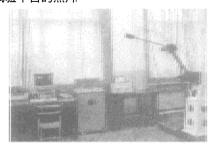


图 1 双连杆柔性机械臂系统动力学与控制试验平台

关于柔性臂变形的实时测量问题,本试验台采用电阻式应变片作为检测元件,应变信号由 4 个应变片组成的应变电桥输出,经动态应变仪。多路转换开关、程控放大器。12 位 A /D 转换芯片后选入计算机,由计算机定时中断采集的信号,给出相应位置处的应变对于在铅垂平面内运动的双连杆柔性臂系统,应变可分解为准静态应变和动态应变,前者是由重力和刚性运动的惯性力引起,后者是由弹性振动引起,为了抑制在端点轨迹跟踪过程中的弹性振动,需要实时地将动态应变与准静态应变分离。根据动态应变的方向和幅值,通过控制算法抑制弹性振动,同时还要对端点用准静态补偿方法进行预修正。本文主要讨论准静态分离问题

#### 1 准静态分离方法的分析

双连杆系统比单连杆的动力学问题要复杂得多现双连杆系统又处于铅垂平面运动,重力的影响使动力学与控制问题的难度大大地增加 因此准静态分离是本试验台能否有效和准确地实现端点轨迹跟踪控制的关键技术问题之一. 总结如下两种准静态分离的方法,并对其可行性作了分析

#### 1.1 理论计算方法

依据端点的期望轨迹,用逆运动学方法计算出关节角度、角速度和角加速度,根据这些运动参数及系统结构参数,考虑重力、刚性运动惯性力,由应变理论公式计算出准静态应变,然后由实时采集到的应变数据减去,就得到动态应变

#### 1.2 实时分离方法

这种方法不基于系统的运动参数和结构参数,而 直接对采集的应变信号进行实时处理,从而在线得到 准静态应变,然后与此时的应变信号相减得到动态应 变

理论计算方法用于实时控制过程中时,其准确性受到如下因素的制约:实际运动参数与规划的完全相同;柔性连杆在自由状态下,每路应变电桥的输出保持恒为零;精确地已知系统的结构参数;应变信号输入通道不存在漂移现象 对于实际的双连杆柔性机械臂及其控制系统,很难满足这些条件 应用实时分离法,能避开上述因素的影响;可在线地求出准静态应变 不过这种方法是对以前的数据作分析和处理,因此如果处理不好,就会出现严重的滞后 不能将准静态分离出来 我们采用滑动平均滤波实现实时准静态分离,并给出减小滞后的依据

#### 2 用滑动平均滤波实现准静态分离的方法

设 a: 为某一采样时刻检测到的应变值, n 为第 n 个采样时刻, l 为滑动平均滤波长度, 则第 n 个采样时 刻的准静态应变值为

$$S_{n} = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i}, & n & l \\ \frac{1}{l} \sum_{i=n-1}^{n} a_{i}, & n > l \end{cases}$$
 (1)

则  $(a_n - S_n)$  为该时刻的动态应变 当n l 时,此时第n 个采集时刻的准静态应变是前n 个采集时刻的准静态应变是前n 个采集时刻的准静态应变是前n 个采集时刻的准静态应变是前n 个采集时刻的应变值的算术平均 因此n 值的大小将直接影响到这个方法引起的滞后大小 如果n 取值过大,实时得到的准静态应变曲线平滑,但信号滞后比较严重,失去了准确性;若n 取值过小,将不能分离出准静态应变 在大量的试验基础上,我们提出如下一种滑动平均滤波长度n 的选取原则,即

$$l = 2 \frac{f_c}{f_0} \tag{2}$$

其中 $f_0$  为系统的基频,  $f_c$  为采样频率, 一般取 $f_c$ = (7- 15)  $f_0$  满足 (2) 式的 l 能实现量佳的分离效果

本试验台的双连杆均处水平位置时,由 SD 380 模态分析仪采用锤击法,测得系统的前 5 阶固有频率如图 2 所示,其中基频 f  $_0=7$   $_$ 

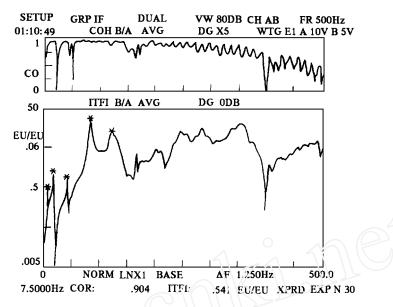


图 2 柔性質系统的固有频率

该系统随双连杆在铅垂平面内运动时、其系统的固有频率是变化,如第 1 杆处于水平,第 2 杆处于铅垂向上时,基频 $f_0=8$  0  $H_Z$ ,但变化并不大。因此仍取 I=42 的分离效果很满意

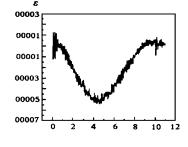
## 3 实验数据分析与控制效果

用这种实时准静态分离方法在试验平台上作了大 量的轨迹跟踪振动控制实验 现以端点在铅垂平面内

> 00001 00001 00003 00005 00007 0 2 4 6 8 10 12(t)

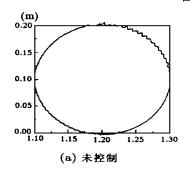
作圆周轨迹为例 令圆心为(1.2 m, 0.1 m), 半径为0.1 m,运动时间为10 s 采用比例微分控制算法, 先用本文方法得到准静态应变、动态应变,并求出关节电机调节角度,根据动态应变的幅值和方向进行控制为避免信号输入通过零点漂移等因素的干扰,规定运动起点的准静态应变为零.

图 3 (a)、(b) 为第 1 杆根部应变曲线, 图 4 (a)、(b) 为端点的运动轨迹曲线



(b) 加控制

图 3 第 1 杆根部应变曲线



(m) 0.20 0.15 0.00 1.10 1.15 1.20 1.25 1.30 (b) 加控制

图 4 机械臂端点轨迹

可见,应用本方法实行振动控制后,将第1杆根部应变值降低60以上,同时端点轨迹跟踪的控制效果明显

#### 参 考 文 献

1 Pfeiffer F, Gebler B. A multistage- approach to the dynamics and control of elasticrobots Proc of

IEEE Robotics and Automation Conference, Washington, D. C. 1988: 2~8

2 费从宇, 邵成勋, 黄文虎等 柔性机械臂点位控制逆动力学 方法的实验研究, 振动与冲击, 1994, 13 (2): 1~5

(1996年1月17日收到第1稿, 1996年5月20日收到修改稿)

# 用加权残数法解具有小参数 摄动的 Duffing 方程

朱昌明

(上海交通大学机械工程系, 上海 200030)

摘要 本文在作参数摄动基础上,应用加权残值法中的配点法解具有小参数的Duffing 方程,把原来多次解具有初值问题的微分方程变成解代数方程组,使解过程更加简单明了.

关键词 加权残值法, 小参数摄动法, Duffing 方程

具有小参数的Duffing 方程的渐进解,可在一般的非线性振动教科书中找到 这种渐近解都是采用小参数摄动方法,将非线性方程逐次线性化后求得 用摄动法求解非线性振动解时,都免不了要多次求解具有初值的微分方程

本文用加权残值法中的配点法,在作参数摄动的基础上,直接解出 Duffing 方程的渐近解 从 Duffing 方程的解过程来看,这种方法简单有效 解的结果与用 Lindstedt-Poincare 法或用两变量法解是完全一致的 通过适当的配点,把多次解具有初值问题的微分方程变成解代数方程的过程 且在解代数方程中,主要是通过比较小参数的系数来获得解

### 1 用配点法解Duffing 方程的基本思想

Duffing 方程的简单形式是

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + u + \epsilon u^3 = 0 \tag{1}$$

$$u(0) = a, \ u(0) = 0$$
 (2)

按摄动的变形参数法, 引进新的坐标变量 s, 设

$$t = s \cdot \omega$$
 (3)

其中 $\omega$ 可认为是频率 再对 $\omega$ 作 Poincare 摄动级数, 即

$$\omega = 1 + \epsilon \omega + \epsilon^2 \omega \omega + \dots$$
 (4)

相应地对时间变量导数变换成

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\omega} \frac{d}{ds}$$

$$\frac{d^{2}}{dt^{2}} = \frac{1}{\omega^{2}} \frac{d}{ds}$$
(5)

由(3)和(5)代入(1)和(2)式,得到新变量下的方程

$$\frac{1}{u^2} \frac{d^2 u}{ds^2} + u + 6u^3 = 0 \tag{6}$$

$$u(0) = a, \ \stackrel{\circ}{u}(0) = 0$$
 (7)

按加权残值法中的内部法并考虑方程的初值条件(7), 设方程(6)的解为

$$u = \sum_{n=0}^{m} A_n \cos(ns)$$
 (8)

则

$$\stackrel{\circ}{u} = -\sum_{n=0}^{m} nA_{n} \sin(ns) \tag{9}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\sum_{n=0}^{\infty} n^{2} A_{n} \cos(ns)$$
 (10)