



缩放喷管内正激波位置的数值模拟

李光正

(华中理工大学力学系, 武汉 430074)

摘要 数值模拟缩放喷管内正激波位置, 需联立迭代求解一组方程。本文利用 5 个独立方程模拟了由背压与入口滞止压力的比值的 变化而形成的不同流动工况。有利于学生对该部分教学内容的深刻理解及促进计算机辅助教学工作。

关键词 缩放喷管, 正激波, 数值模拟

完全气体通过缩放喷管(拉伐尔喷管)流动, 由背压 p_b 与入口滞止压力 p_{01} 的比值的 变化而形成不同流动工况。如图 1 所示, 设正激波发生在拉伐尔管的喉部下游距入口 x 处, 其截面积为 A_x , 激波间断处前后物理量分别以脚标 1、2 标明, A^* 为喉部截面积, A_e 为出口截面积, p_e 为出口压力, 并设 k 为比热比系数。问题是在面积比 A_e/A^* 和压力比 p_e/p_{01} 为已知的条件下, 如何确定缩放喷管内正激波的位置(即求 x 值)。

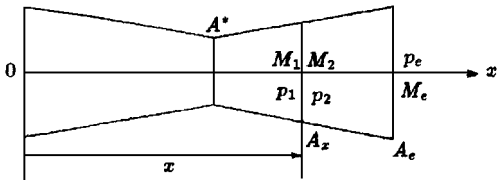


图 1

文献 [1] 给出的

$$\frac{p_e}{p_{01}} \cdot \frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k-1}{2(k-1)}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_e^2}} \quad (1)$$

可制成表。求解方法为由给定的 $\frac{p_e}{p_{01}} \cdot \frac{A_e}{A^*}$ 值, 由表中查出 M_e 及 p_e/p_{02} ; 利用 p_e/p_{02} 及 p_e/p_{01} 计算出 p_{02}/p_{01} ; 由 p_{02}/p_{01} 查正激波表可以得到波前马赫数 M_1 ; 再由 M_1 利用等熵函数表查得 A_x/A^* , 进而求得正激波位置。该方法的优点是简单、清晰, 不足之处是大多数流体力学教学用书中并未附有以上诸表, 求解途径已不能满足学生的求知欲望。为配合计算机辅助教学, 有必要对缩放喷管内正激波位置进行数值计算及显示。

文献 [3] 利用以下 5 个公式联立求解 M_1, M_2, p_1, p_2, M_e 5 个未知数, 即

$$p_1/p_{01} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{-\frac{k}{k-1}} \quad (2)$$

$$p_2/p_1 = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \quad (3)$$

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{k M_1^2 - \frac{k-1}{2}} \quad (4)$$

$$p_2/p_e = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (5)$$

$$p_e/p_{02} = \frac{p_e}{p_{01}} \cdot \frac{p_{01}}{p_{02}} \quad (6a)$$

或

$$1 + \frac{k-1}{2} M_e^2 \left(\frac{p_e}{p_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{p_b}{p_{01}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \left(\frac{p_{01}}{p_{02}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{\left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k-1}{k}} M_1^{\frac{2k}{k-1}}} \quad (6b)$$

式 (6b) 中, p_b 为背压。文献 [1] 推荐以下解法, 即先假定 M_1 , 然后计算其余 4 个未知数, 若由此求出的 p_e/p_{01} 与已给的 p_b/p_{01} 数值不同, 则修改 M_1 , 直到满意为止。

分析以上诸式, 式 (6b) 或 (6a) 完全可由式 (2) 至式 (5) 导出, 推导略。

从推导过程说明式 (2) 至式 (6) 仅有 4 个独立方程, 为求解 5 个未知量还需要补充 1 个独立方程。因正激波前后流动均为等熵流, 将等熵面积比公式应用于 A_x 与 A_e 两个截面, 有

$$\frac{A_x}{A_e} = \frac{M_e}{M_2} \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_e^2} \right]^{\frac{k-1}{2(k-1)}} \quad (7)$$

利用式 (2)、(3)、(4)、(5) 及式 (7), 可求解 5 个未

知量 M_1, M_2, p_1, p_2 及 M_e 。由于 5 个公式均为隐式联立关系, 故需要数值迭代求解。先假设 M_1 值, 则迭代求解过程可设计为:

(1) 将式 (7) 应用于 A_x 与 A^* 两个截面, 由于是初步的 A_x , 不妨设解得的截面为 A_{xx} ;

(2) 利用式 (2) 求得 p_1/p_{01} , 利用式 (3) 解出 p_2/p_{01} ; (3) 利用式 (4) 求得波后马赫数 M_2 , 由给定的 p_e/p_{01} 及求得的 p_2/p_{01} , 则利用式 (5) 解得出口马赫数 M_e ;

(4) 利用式 (7), 由解得的 M_2 与 M_e 求得 A_x , 将 A_x 与步骤 (1) 求得的 A_{xx} 相比较, 看两者差别是否小于某一小量 ϵ , 否则令 $A_{xx} = \frac{1}{2}(A_{xx} + A_x)$, 仍利用式 (7),

即利用 $\frac{A_{xx}}{A^*} = \frac{1}{M_1} \left[\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right) \frac{2}{k+1} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$ 求得 M_1 , 重复步骤 (2) 至 (4), 直到满足为止

算例 1^[4] 已知滞止压力 700kPa, 滞止温度 530K, 喉部截面 5cm^2 , 出口截面 12.5cm^2 , 背压 $p_b = 350\text{kPa}$, 设正激波发生于扩张段, 本文利用所编程序, 计算结果见表 1。

表 1

p_e/p_{01}	M_1	M_2	M_e
0.5	2.3162	0.5325	0.4537
p_1/p_{01}	p_2/p_{01}	A_x/A^*	
0.0780	0.4750	2.2270	

表中所取 $\epsilon = 0.0001$, 迭代次数为 5 次

计算结果与文献 [4] 用查表求得的结果是一致的

算例 2 为一缩放喷管, 其型线为 $A(x) = 1.5 - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)$ 其中 $0 \leq x \leq 10$

首先将式 (7) 应用于出口截面和喉部截面, 在已知 A_x/A^* 条件下可求得两个 M_e 解, $M_e = 0.4303$, 对应整个喷管为亚音速流动; 另一 $M_e = 1.8541$ 对应喉部下游为超音速等熵流

其次利用等熵流关系式及两个 M_e , 可解出正激波发生于喉部下游的范围, 以 p_e/p_{01} 表示为 $0.1602 < p_e/p_{01} < 0.8805$, 本文选择了若干 p_e/p_{01} 值, 计算结果见表 2

表 2

p_e/p_{01}	M_1	M_2	M_e	p_1/p_{01}	p_2/p_{01}	A_x/A^*	x
0.88	1.0800	0.9277	0.4305	0.4801	0.5732	1.0050	5.4502
0.78	1.5429	0.6864	0.4835	0.2559	0.6681	1.2069	8.0058
0.70	1.7104	0.6379	0.5360	0.1994	0.6474	1.3479	9.0159
0.65	1.7977	0.6170	0.5749	0.1747	0.6294	1.4374	9.6003
0.62	1.8464	0.6064	0.6009	0.1621	0.6177	1.4919	9.9486

计算中, 所取 $\epsilon = 0.0001$, 当 $p_e/p_{01} = 0.70$ 时, 迭代次数为 8 次, 当 $p_e/p_{01} = 0.88$ 时为 12 次, 由表中可看出, 随着 p_e/p_{01} 的增大, 正激波逐步向喉部移动, 当 $p_e/p_{01} = 0.8805$ 时, 正激波被喉部“吞没”, 整个缩放喷管为亚音速流动

参 考 文 献

1 童秉纲, 孔祥言, 邓国华. 气体动力学. 北京: 高等教育出版社, 1990. 84~86

2 周光炯, 严宗毅, 许世雄等. 流体力学 (下册). 北京: 高等教育出版社, 1993. 352~356

3 时爱民, 苏铭德, 刘季稔. 气体动力学基础. 北京: 科学出版社, 1988. 123~124

4 Michel A Saad. Compressible fluid flow. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1985. 146~148

(1996 年 3 月 24 日收到第 1 稿, 1996 年 6 月 12 日收到修改稿)

更正 本刊 1996 年第 4 期第 66 页第 2 栏第 9 行“物理学家在 21 世纪又开始关心晶体理论……”中“21 世纪”应改为“20 世纪”