

微分对接条件对临界转速的影响¹⁾

顾致平

(西安工业学院建工系, 西安 710032)

孟光

(西北工业大学振动所, 西安 710072)

摘要 本文用模态综合法并借助二阶非完整约束系统的Routh型方程,建立了考虑全部(包括代数和微分)对接条件下转子系统的运动微分方程,使求临界转速问题由非线性特征值问题转变为线性特征值问题。在此基础上,研究了微分对接条件对临界转速的影响。

关键词 临界转速, 微分对接条件, 模态综合法

引言

在模态综合法的发展中,有很多研究是针对下列两类问题:如何选取子结构的模态集;如何选用子结构间的相容性条件。文献[1]借助二阶非完整约束系统的Routh型方程,研究了对接条件对稳态不平衡响应的影响,指出强化对接条件是必要的。对线性转子系统的固有振动问题,尽管可利用加速度和位移之间的关系: $\ddot{y} = -\Omega^2 y$ (其中 Ω 是系统的转速),将微分对接条件化为代数对接条件,但由于转化来的代数对接条件中含有未知量 Ω ,从而使求临界转速问题变成非线性特征值问题,而对非线性特征值问题没有一般的解法。本文用模态综合法并借助二阶非完整约束系统的Routh型方程,导出了考虑全部对接条件下转子系统的运动微分方程。在此基础上,归结出的计算临界转速问题是线性特征值问题,比较方便地研究了微分对接条件对临界转速的影响。

1 考虑代数对接条件下的临界转速

按照模态综合法^[1]把转子系统分成若干子结构,在所选择的模态集下,取相应的模态坐标集 $\{P_i\}$,由此写出各子结构的动、势能和广义力,并形式组装各子结构的矩阵及模态坐标集。由于每两个子结构间有联系,整个转子系统的模态坐标集 $\{P\}$ 不独立,所以不能将动、势能和广义力代入Lagrange方程。根据子结构间的代数对接条件,可从 $\{P\}$ 中选出独立的广义坐标 $\{q\}$,得

$$\{P\} = [B]\{q\} \quad (1)$$

将式(1)代入系统的动、势能和广义力表达式,再将它们代入Lagrange方程,得只考虑代数对接条件下轴对称单转子系统的运动微分方程

$$[M]\{\ddot{q}\} - i\Omega[G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (2)$$

式中 $[M]$ 、 $[G]$ 、 $[K]$ 、 $[Q]$ 和 i 分别是质量阵、回转阵、刚度阵、广义力和虚数单位。为求临界转速,可令式(2)中 $\{q\} = \{q_0\}e^{i\Omega t}$, $\{Q\} = \{0\}$,得

$$[K - \Omega^2(M - G)]\{q_0\} = 0 \quad (3)$$

由式(3)可求得考虑代数对接条件下,轴对称单转子系统的临界转速 Ω_c 及对应的主模态

2 考虑代数和微分对接条件下的临界转速

首先,把子结构的微分对接条件通过式(1)将其用独立的广义坐标 $\{q\}$ 表示。对轴对称单转子系统,其可表示为

$$[\bar{M}]\{\ddot{q}\} - i\Omega[\bar{G}]\{\dot{q}\} + [\bar{K}]\{q\} - \{\bar{Q}\} = 0 \quad (4)$$

然后,把微分对接条件(方程(4))看作是二阶非完整约束,而把方程(2)看成是未考虑约束的运动微分方程。这样方程(2)和(4)所表述的系统就成为二阶非完整约束系统。据二阶非完整约束系统的Routh型方程^[3],得

$$[M]\{\ddot{q}\} - i\Omega[G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} + [\bar{M}]^T\{\lambda\} \quad (5)$$

方程(5)中 $\{\lambda\}$ 是不定乘子向量,将方程(4)、(5)合并,得

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \bar{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} - i\Omega \begin{bmatrix} G & 0 \\ \bar{G} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \lambda \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ \bar{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q \\ \bar{Q} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

方程(6)就是考虑全部(包括代数和微分)对接条件下轴对称单转子系统的运动微分方程。为求临界转速,可令方程(6)中

$$\begin{Bmatrix} q \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ \lambda_0 \end{Bmatrix} e^{i\Omega t}, \begin{Bmatrix} Q \\ \bar{Q} \end{Bmatrix} = 0$$

¹⁾国家自然科学基金和航空科学基金资助项目。

得

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} K & -[M]^\top \\ \bar{K} & 0 \end{bmatrix} & -\Omega \begin{bmatrix} M & -G & 0 \\ \bar{M} & -\bar{G} & \theta \end{bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} q_0 \\ \lambda_0 \end{Bmatrix} & = 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

从式(7)可求得考虑代数 and 微分对接条件下轴对称单转子系统的临界转速 Ω_c 及对应的主模态

3 算例

图1所示是一单转子系统的分析模型。轴长、圆盘直径已标在图中。其单位是cm。其它参数为：轴直径 $d = 12.7$ cm, 圆盘厚度 $h = 1.27$ cm, 弹性模量 $E = 207$ GPa, 轴质量密度 $\rho = 5.052 \times 10^{-4}$ kg/cm, 弹簧A、B的刚度系数 $k_{Ay} = k_{Az} = k_{By} = k_{Bz} = 26.25 \times 10^4$ N/cm, 3个圆盘同性, 其质量、赤道转动惯量、极转动惯量分别为: $M = 0.2439$ kg, $I_T = 47.62$ kg·cm², $I_p = 95.25$ kg·cm²。用模态综合法分析图1所示转子系统, 首先把该系统分成9个子结构: 轴段1, 2, 3, 4; 圆盘a, b, c; 弹簧A、B。

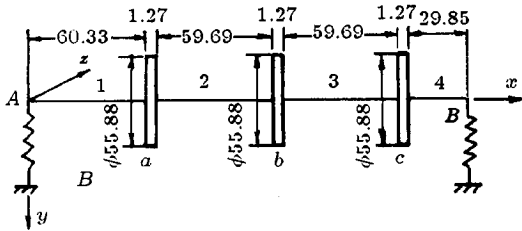


图1 单转子系统分析模型

对轴段, 我们选取了两种模态函数来表示其回转形态。第一种是经常使用的幂级数形式, 轴段的回转形态为

$$y_i(x, t) = P_{y_1}^{(i)}(t) + \left(\frac{x}{l_i}\right) P_{y_2}^{(i)}(t) + \left(\frac{x}{l_i}\right)^2 P_{y_3}^{(i)}(t) + \left(\frac{x}{l_i}\right)^3 P_{y_4}^{(i)}(t) + \left(\frac{x}{l_i}\right)^4 P_{y_5}^{(i)}(t)$$

$$z_i(x, t) = P_{z_1}^{(i)}(t) + \left(\frac{x}{l_i}\right) P_{z_2}^{(i)}(t) + \left(\frac{x}{l_i}\right)^2 P_{z_3}^{(i)}(t) + \left(\frac{x}{l_i}\right)^3 P_{z_4}^{(i)}(t) + \left(\frac{x}{l_i}\right)^4 P_{z_5}^{(i)}(t)$$

第二种是由刚体模态和简支梁模态组成的复合模态, 它是根据分枝模态法^[4]的基本思想提出来的。轴段的回转形态为

$$y_i(x, t) = P_{y_1}^{(i)}(t) + \left(\frac{x}{l_i}\right) P_{y_2}^{(i)}(t) + \left(\sin \frac{\pi x}{l_i}\right) P_{y_3}^{(i)}(t) +$$

$$\left(\sin \frac{2\pi x}{l_i}\right) P_{y_4}^{(i)}(t) + \left(\sin \frac{3\pi x}{l_i}\right) P_{y_5}^{(i)}(t)$$

$$z_i(x, t) = P_{z_1}^{(i)}(t) + \left(\frac{x}{l_i}\right) P_{z_2}^{(i)}(t) + \left(\sin \frac{\pi x}{l_i}\right) P_{z_3}^{(i)}(t) + \left(\sin \frac{2\pi x}{l_i}\right) P_{z_4}^{(i)}(t) + \left(\sin \frac{3\pi x}{l_i}\right) P_{z_5}^{(i)}(t)$$

按照前面的陈述, 可写出系统的质量阵、回转阵和刚度阵。子结构间的代数对接条件的若干类型如下:

(1) 轴与弹簧的联接(图2) 设弹簧的模态坐标 $P_y^{(A)} = y_A, P_z^{(A)} = z_A, P_y^{(B)} = y_B, P_z^{(B)} = z_B$ 。刚度系数 $k_y = k_z = k$, 则代数对接方程为

$$y_j(0, t) = y_A, \quad E_j I_j \frac{\partial^2 y_j(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0,$$

$$E_j I_j \frac{\partial^3 y_j(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = -k_j y_A$$

$$y_i(l_i, t) = y_B, \quad E_i I_i \frac{\partial^2 y_i(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i} = 0,$$

$$E_i I_i \frac{\partial^3 y_i(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=l_i} = k_i y_B$$

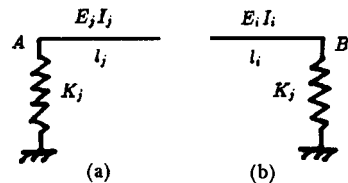


图2

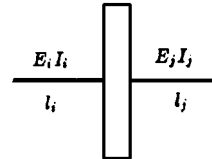


图3

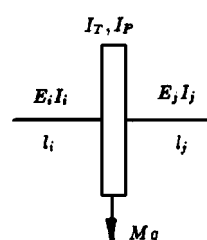


图4

(2) 轴段—圆盘—轴段位移的联接(图 3) 设圆盘的模态坐标集为 $\{P_y\} = \{y, \alpha\}^T$, $\{P_z\} = \{z, \beta\}^T$, 则代数对接方程为

$$y_i(l_i, t) = y = y_j(0, t)$$

$$\left. \frac{\partial y_i(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l_i} = \alpha = \left. \frac{\partial y_j(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

z 方向的对接方程与上述 y 方向的完全类似, 只须将 y 改写为 z , β 改写为 α 即得

(3) 轴段—圆盘—轴段力的联接(图 4)

$$I_T \ddot{\alpha} + I_P \Omega \dot{\beta} = E_j I_j \left. \frac{\partial^2 y_j(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} -$$

$$E_i I_i \left. \frac{\partial^2 y_i(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l_i}$$

$$I_T \ddot{\beta} - I_P \Omega \dot{\alpha} = E_j I_j \left. \frac{\partial^2 z_j(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} -$$

$$E_i I_i \left. \frac{\partial^2 z_i(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l_i}$$

$$M \ddot{y} + E_j I_j \left. \frac{\partial^3 y_j(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=0} -$$

$$E_i I_i \left. \frac{\partial^3 y_i(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=l_i} = M e \Omega^2 \cos \Omega t + M g$$

$$M \ddot{z} + E_j I_j \left. \frac{\partial^3 z_j(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=0} -$$

$$E_i I_i \left. \frac{\partial^3 z_i(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=l_i} = M e \Omega^2 \sin \Omega t$$

式中, e 为圆盘的偏心矩

从(3)式求得只考虑代数对接条件下系统的前五阶临界转速, 如表 1 所示

表 1

	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
幂级数模态	465.3	1307.7	2963.8	8526.0	29123.5
复合模态	476.4	1351.8	3344.7	9398.2	33221.0
相对偏差	2.40%	3.40%	12.9%	10.2%	14.1%

选用幂级数模态, 从(7)式求得考虑全部对接条件下系统的前五阶临界转速, 如表 2 所示

从表 1 可以看出, 在只考虑代数对接条件下, 分别选用幂级数模态和复合模态所得前二阶临界转速相

差较小(在 3.4% 以内), 后三阶临界转速相差较大, 偏差在 10.2% 至 14.1% 之间, 而且复合模态的结果较幂级数模态的结果偏大

表 2

	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
代数对接条件	465.3	1307.7	2963.8	8526.0	29123.5
全部对接条件	454.5	1313.4	2997.1	8597.2	29294.4
相对偏差	2.40%	0.40%	1.1%	0.8%	0.6%

从表 2 可以看出, 在选用幂级模态, 分别考虑代数和全部对接条件下算得的临界转速相差不大(在 2.4% 以内), 计算中我们改变了弹性模量 E 的值, 所得结果的相对偏差与上面的结果大体相同, 计算中我们还发现基于分枝模态法的基本思想而选取的复合模态集, 根本不能满足某些微分对接条件, 所以在这种模态集下, 考虑全部对接条件的临界转速与考虑代数对接条件的临界转速相差较大

4 结 论

通过对线性单转子系统的实例计算表明, 在幂级数模态集下, 分别考虑代数和全部对接条件下, 前五阶临界转速相差在 2.4% 之内, 这个差不超过一般工程设计的实用范围, 因此计算临界转速时, 可只考虑代数对接条件, 不必再考虑微分对接条件, 从而避免用到较多的数学和力学知识, 减小推导和计算工作量

参 考 文 献

- 1 高建民, 陈松淇. 子模态综合法中动力对接条件的研究. 西北工业大学学报, 1988, 6(3)
- 2 王文亮, 杜作润. 结构振动与动态子结构方法. 上海: 复旦大学出版社, 1985
- 3 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985
- 4 Gladwell GM. Branch mode analysis of vibration systems. *J Sound Vibration*, 1964, 1: 41~59
(1996 年 1 月 12 日收到第 1 稿,
1996 年 3 月 18 日收到修改稿)