$$\left[\beta - C_1\left(\frac{2P}{\pi a}\right)^{\alpha}\frac{\alpha}{2a^2}\Theta^{\alpha}\right]\xi^2 + C_1\left(\frac{2P}{\pi a}\right)^{\alpha}\Theta^{\alpha} + C \tag{13}$$

由于无论 ξ 取何值上式两边都应相等，所以应有

$$\begin{cases}\dfrac{aP}{\pi a^2}\Theta = \beta - C_1\left(\dfrac{2P}{\pi a}\right)^{\alpha}\dfrac{\alpha}{2a^2}\Theta^{\alpha} & (14\text{a})\\[2ex] \dfrac{2P\Theta}{\pi}\left(\ln a - \ln 2 - \dfrac{1}{2}\right) = C_1\left(\dfrac{2P}{\pi a}\right)^{\alpha}\Theta^{\alpha} + C & (14\text{b})\end{cases}$$

联立求解式（14a)、式（14b）得

$$\begin{cases} a = a_H\sqrt{1 + \dfrac{\alpha}{2}C_1\Theta^{\alpha-1}\left(\dfrac{2P}{\pi}\right)^{\alpha-1}\dfrac{1}{a^{-\alpha}}} & (15\text{a})\\[2ex] \delta = \dfrac{2}{\pi}P\left\{\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}\left[\ln\dfrac{2R_1}{a} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(1-\mu_1)}\right] + \dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\left[\ln\dfrac{2R_2}{a} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}(1-\mu_2)\right]\right\} + \\ \quad C_1\left(\dfrac{2P}{\pi a}\right)^{\alpha}\Theta^{\alpha} = \delta_H + C_1\left(\dfrac{2P}{\pi a}\right)^{\alpha}\Theta^{\alpha} & (15\text{b})\end{cases}$$

式中，a_H 为光滑圆柱体接触半宽

$$a_H = \sqrt{\frac{4R_1R_2}{R_1+R_2}\frac{P}{\pi}\Theta}$$

δ_H 为两光滑圆柱体的接近量

$$\delta_H = \frac{2}{\pi}P\left\{\frac{1-\mu_1^2}{E_1}\left[\ln\frac{2R_1}{a} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1-\mu_1)}\right] + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\left[\ln\frac{2R_2}{a} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-\mu_2)\right]\right\}$$

式（15a)、式（15b）即考虑表面粗糙层影响的两圆柱体的接触半宽与接近量

3 结 论

应用粗糙体接触理论和弹性接触理论分析了两粗糙圆柱体的接触问题，得出了考虑表面粗糙层影响时两圆柱体的接触面积与接近量的计算公式 表面粗糙层使圆柱体间的接触面积和接近量增大，接触压力分布趋于平缓

参 考 文 献

1 克拉盖尔斯基H. V.，康巴诺夫B. C. 著 摩擦、磨损计算原理，汪一鳞译 北京：机械工业出版社，1982 87～95

2 黄传清 板带轧机辊系轴向力的理论与实验研究：［博士论文］ 秦皇岛：东北重型机械学院，1994 44～52

3 徐秉业，黄炎 弹塑性力学及其应用 北京：机械工业出版社，1984 65～90

4 Kalker J J. On elastic line contact *ASME J Appl Mech*，1972 (12)： 1125～1132

(1996 年 5 月 31 日收到第 1 稿，
1996 年 11 月 12 日收到修改稿)

拉伸偏心裂纹板应力强度因子的简便表达式

王启智

(四川联合大学土木系，成都 610065)

摘要 本文给出拉伸偏心裂纹板应力强度因子的简便表达式，与 Isida 用复杂的罗朗 (Laurent) 级数展开法得到的准确数值解相比，此表达式的误差不大于 6%.

关键词 断裂力学，拉伸偏心裂纹板，应力强度因子

拉伸偏心裂纹板（图 1）是一种常见的裂纹模型，Isida 曾用复杂的罗朗级数展开法，得到其应力强度因子的准确数值解[1]，结果是用图表的形式给出，不便使用，无量纲应力强度因子曲线图也被收入在常用的手册中[2]. 要得此题准确的应力强度因子表达式是不可能的 因此，我们寻求的近似表达式，既形式简单，精度不差，又不费功夫，易懂会用，才有利于工程上的推广应用 本文仍采用文［3］的推导方法，只涉及最基本的材料力学知识—截面法和应力强度因子的概念 与文［3］略有不同的是，除了力的平衡条件外，还用了力矩的平衡条件，这两个条件正好可用来解出偏心裂纹的两个应力强度因子.

对于图 1 所示的拉伸偏心裂纹板，$2a$ 是裂纹长度，$2b$ 是板宽度，e 是裂纹偏心度 沿两个裂尖外延裂纹线（AD、BE）上的应力场都可以分成奇异段和非奇异段 奇异段上的应力 σ_y 由应力强度因子控制

$$\sigma_{y_1} = \frac{C_A \cdot K_{\infty}}{\sqrt{2\pi r_1}} \quad (0 \le r_1 \le d_1) \tag{1}$$

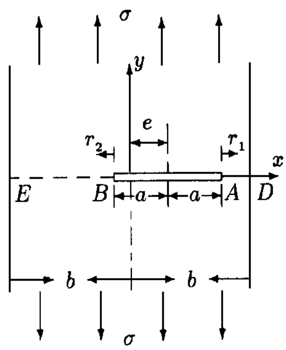

图 1 拉伸偏心裂纹板

$$\sigma_{y_2} = \frac{C_B \cdot K_\infty}{\sqrt{2\pi r_2}} \quad (0 \le r_2 \le d_2) \tag{2}$$

式中，C_A 和 C_B 分别是裂尖 A 和 B 的无量纲应力强度因子，$K_\infty = \sigma\sqrt{\pi a}$，$\sigma$ 是远场拉伸应力，d_1 和 d_2 是奇异段控制距离，由文［3］的式（5）知

$$d_1 = \frac{a}{2C_A^2}, \quad d_2 = \frac{a}{2C_B^2} \tag{3}$$

假设非奇异段上的应力是[3]

$$\sigma_{y_1} = C_A^2\,\sigma \quad (d_1 \le r_1 \le b - a - e) \tag{4}$$

$$\sigma_{y_2} = C_B^2\,\sigma \quad (d_2 \le r_2 \le b - a + e) \tag{5}$$

式中，r_1 和 r_2 是沿 x 轴分别到裂尖 A 和 B 的距离

如果沿裂纹线将板一分为二，则力的平衡条件要求

$$\int^{1} \frac{C_A \cdot K_\infty}{\sqrt{2\pi r_1}} \mathrm{d}r_1 + C_A^2\sigma(b - a - e - d_1) - \int^{2} \frac{C_B \cdot K_\infty}{\sqrt{2\pi r_2}} \mathrm{d}r_2 + C_B^2\sigma(b - a + e - d_2) = 2b\sigma \tag{6}$$

将（3）式代入（6）式可得

$$C_A^2(b - a - e) + C_B^2(b - a + e) = 2b - a \tag{7}$$

力矩的平衡条件要求

$$\int^{1} \frac{C_A \cdot K_\infty}{\sqrt{2\pi r_1}} (r_1 + a + e)\,\mathrm{d}r_1 + C_A^2\sigma(b - a - e - d_1) \cdot \frac{b + a + e + d_1}{2} - \int^{2} \frac{C_B \cdot K_\infty}{\sqrt{2\pi r_2}} (r_2 + a - e)\,\mathrm{d}r_2 - C_B^2\sigma(b - a + e - d_2)\frac{b + a - e + d_2}{2} = 0 \tag{8}$$

将（3）式代入（8）式可得

$$C_A^2[b^2 - (a + e)^2] - C_B^2[b^2 - (a - e)^2] + 2ae + \frac{a^2}{12}\left[\frac{1}{C_A^2} - \frac{1}{C_B^2}\right] = 0 \tag{9}$$

(9) 式左端最后一项使解方程变得很复杂，若完全删去，最大误差可达 13% 左右，但在 a/b，e/b 较小时，误差也不大 注意此项大于 0，且当 $e \to 0$ 时也趋于 0，故试以 ae 取代之，发现最大误差降为 6%，故采纳，即 (9) 式改为

$$C_A^2[b^2 - (a + e)^2] - C_B^2[b^2 - (a - e)^2] = -3ae \tag{10}$$

解方程式（7）和式（10）得

$$C_A = \sqrt{\frac{1 - 0.5(a/b) - e/b}{1 - a/b - e/b}} \tag{11}$$

$$C_B = \sqrt{\frac{1 - 0.5(a/b) + e/b}{1 - a/b + e/b}} \tag{12}$$

易知 $C_A > 1$，$C_B > 1$，$C_A > C_B$，这些都是合理的 在 (11) 式中以 $-e$ 代替 e 就得（12）式 当 $e = 0$ 时，$C_A = C_B$，退化到中心裂纹板的情况，与文［3］中（7）式吻合 在 $0.1 \le e/b \le 0.7$，$0.1 \le a/b \le 0.7$ 的范围内，(11) 式与 Isida 的准确数值解比较的最大误差为 6%（发生在 $e/b = 0.7$，$a/b = 0.1$）.

(11) 式和 (12) 式以及文［3］中的（7）式和 (14) 式都是对几种基本的有限域内的裂纹模型获得的应力强度因子表达式，它们的精度对工程应用的目的是足够的 这些简便的公式甚至具有一种对应性，易于比较记忆，因而使用十分方便 所采用的推导方法，尽管非常简单，但对所讨论的这类问题却是奏效的

参 考 文 献

1 Isida M. Stress intensity factors for the tension of anaccentrically cracked strip. *Journal of Applied Mechanics*, 1996, 33 (3): 674～675

2 Tada H, Paris P C, Irwin G R. The stress analysis of cracks handbook. Paris Productions, Inc Missouri, 1985

3 王启智 两种简便的应力强度因子表达式 力学与实践，1995，17 (6)：35～37

（本文于 1996 年 9 月 5 日收到）