代入式 (15) 可导出单元刚度方程

$$[k]_e\{\delta\}_e = \{P\} + \{\overline{P}\} + \{F\} + \{\overline{F}^M\} \tag{17}$$

其中 $\{P\}$ 和 $\{\overline{P}\}$ 分别为单元的体力和面力的等效节点列向量, $\{\overline{F}^M\}$ 为单元上点 M 的集中力 F_i^M 的等效节点力向量, 其表达形式与按静力等效的前处理结果完全相同

$$\{\overline{F}^M\} = [N^M]^{\mathrm{T}}\{F^M\} \tag{18}$$

4 结 论

(1) 虚功原理包含了更广泛意义的平衡. 仅有面力和体力作用时, 虚功方程等价于平衡方程和应力边界条件; 当有集中力作用时, 连续体虚功方程不等价于通常的平衡方程和边界条件, 而等价于式 (13) 和式 (14) 表达的广义形式.

(2) 在有限元计算中进行网格划分时, 集中力作用点可以是非节点. 非节点集中力的等效节点力可以从单元的虚功方程中自然得到, 没有必要进行前处理.

参 考 文 献

1 华东水利学院. 弹性力学问题的有限单元法. 北京: 水利电力出版社, 1978

2 蒋友谅. 非线性有限元法. 北京: 北京工业大学出版社, 1988

3 钱伟长. 变分法及有限元, 上册. 北京: 科学出版社, 1980

4 李四平, 杨挺青. 考虑集中力作用的连续体欧位运动方程. 华中理工大学学报, 1997 (9)

(本文于 1997 年 5 月 16 日收到)

复杂细长压杆临界力计算的传递矩阵法

刘庆潭

(长沙铁道学院 数力系, 长沙 410075)

摘要 本文提出对复杂的细长压杆临界力计算的传递矩阵法. 通过实例的计算, 证明了本方法是一种精确度高且简便易行的方法, 适于工程技术人员在微机上应用.

关键词 变截面, 传递矩阵, 临界力, 稳定性

1 场矩阵

1.1 等截面细长压杆

图 1 所示的等截面细长压杆, 有如下的关系[1]

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{x=L} = \begin{bmatrix} 1 & e_2 & -e_3/EI & -e_4/EI \\ 0 & e_1 & -e_2/EI & -e_3/EI \\ 0 & EIe_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_0 \tag{1}$$

引起 的情

其中, $e_0 = k\sin kx$, $e_1 = \cos kx$, $e_2 = \sin kx/k$, $e_3 = (1-\cos kx)\ k^2$, $k_4 = (kx - \sin kx)/k^3$, $k = \sqrt{P/EI}$.

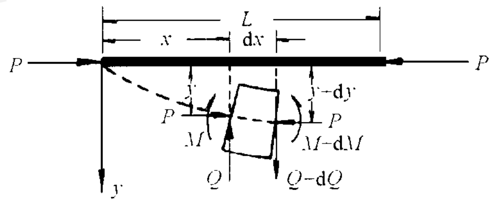


图 1

将式 (1) 写成矩阵形式为

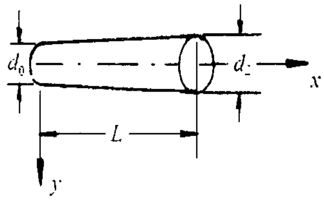
$$S_{x=L} = U S_0 \tag{2}$$

式 (2) 中的 S_0 为杆左端初始状态向量, $S_{x=L}$ 为杆右端的末端状态向量. 由式 (2) 可见, 通过一个矩阵 U 就将杆左端的状态向量传到了右端, 矩阵 U 即为传递矩阵 (场矩阵). 对等截面细长压杆而言, 传递矩阵 U 就是式 (1) 中的 4 ×4 阶的方阵.

1.2 变截面细长压杆

其 对于图 2 所示的直径沿轴线成线性变化的圆截面压杆, 设始端直径为 d_0, 末端直径为 d_L, 令 $k = \dfrac{d_L - d_0}{d_0 L}$, $I_0 = \pi d_0^4/64$, 则场矩阵为[2]

$$U=\begin{bmatrix}1 & U_{12} & U_{13} & U_{14}\\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24}\\ 0 & U_{32} & U_{33} & U_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad M \tag{3}$$



和

图 2

其中

$$U_{12}=\frac{\sin\xi_0\cos\xi-\cos\xi_0\sin\xi}{k\xi}$$

$$U_{13}=\frac{\sin\xi}{k\xi}\cdot\frac{\mu+\cos\xi_0\,(k\sin\xi_0-\mu\cos\xi_0)}{EI_0\,\mu^2\sin\xi_0}-\frac{\cos\xi}{k\xi}\cdot\frac{k\sin\xi_0-\mu\cos\xi_0}{EI_0\,\mu^2}-\frac{1}{EI_0\,\mu^2}$$

$$U_{14}=\frac{\sin\xi_0\cos\xi-\cos\xi_0\sin\xi}{EI_0\,\mu^2\,k\xi}-\frac{x}{EI_0\,\mu^2}$$

$$U_{22}=\frac{\sin\xi_0}{\mu}\,(k\cos\xi+k\xi\sin\xi)-\frac{\cos\xi_0}{\mu}\,(k\sin\xi-k\xi\cos\xi)$$

$$U_{23}=\frac{\mu+\cos\xi_0\,(k\sin\xi_0-\mu\cos\xi_0)}{EI_0\,\mu^3\sin\xi_0}\cdot(k\sin\xi-k\xi\cos\xi)-\frac{(k\sin\xi_0-\mu\cos\xi_0)}{EI_0\,\mu^3}\,(k\cos\xi+k\xi\sin\xi)$$

$$U_{24}=\frac{\sin\xi_0}{EI_0\,\mu^3}\,(k\cos\xi+k\xi\sin\xi)-\frac{\cos\xi_0}{EI_0\,\mu^3}\,(k\sin\xi-k\xi\cos\xi)-\frac{1}{EI_0\,\mu^2}$$

$$U_{32}=\frac{EI_0\,\mu^2}{k\xi}\,(\cos\xi\sin\xi_0-\sin\xi\cos\xi_0)$$

$$U_{33}=\frac{\mu+\cos\xi_0\,(k\sin\xi_0-\mu\cos\xi_0)}{k\xi\sin\xi_0}\sin\xi-\frac{k\sin\xi_0-\mu\cos\xi_0}{k\xi}\cos\xi$$

$$U_{34}=\frac{\sin\xi_0\cos\xi-\cos\xi_0\sin\xi}{k\xi},\quad \mu^2=\frac{P}{EI_0}$$

$$\xi=\mu\,(1+kx)^{-1}/k,\qquad \xi_0=\mu/k$$

对于边长成线性变化的正方形截面压杆，其始端边长为 a_0，末端边长为 a_L，其场矩阵有和式 (3) 完全相同的形式，只不过这时的 $k=\frac{a_L-a_0}{a_0 L}$，$I_0=a_0^4/12$.

2 点矩阵

在图 3 (a) 所示的弹性支座处，左右侧的状态向量传递关系为[3]

$$\begin{bmatrix}y\\ \theta\\ M\\ Q\end{bmatrix}_j^R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ K_j & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_j\begin{bmatrix}y\\ \theta\\ M\\ Q\end{bmatrix}_j^L \tag{4}$$

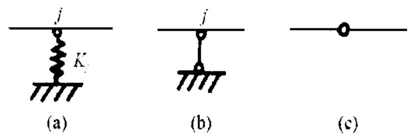


图 3

将式 (4) 写成矩阵形式为

$$S_j^R=\overline{U}_j\,S_j^L \tag{5}$$

由式 (5) 可见，通过矩阵 $\overline{U}_j$ 可将 j 处左侧的状态向量传至右侧，矩阵 $\overline{U}_j$ 称为点矩阵.

在图 3 (b) 所示的中间支座处，反映该处左右侧状态向量传递关系的点矩阵为[3]

$$\overline{U}_j=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ K_{Qy} & K_{Q\theta} & K_{QM} & 1+K_{QQ}\end{bmatrix} \tag{6}$$

在图 3 (c) 所示的中间铰处，反映该处左右侧状态向量传递关系的点矩阵为[3]

$$\overline{U}_j=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ K_{\theta y} & K_{\theta\theta}+1 & K_{\theta M} & K_{\theta Q}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{7}$$

其中，$K_{Qi}=-U_{si}/U_{sQ}$，$K_{\theta i}=-U_{si}/U_{s\theta}$ ($i=y,\theta,M,Q$)，s 是下一个边界条件中某个为零的状态变量，U_{si} 是 U_{j+1} 中的元素.

3 细长压杆临界力计算的传递矩阵法求解

如整个杆被分成 n 段，则有

$$S_n=U_n U_{n-1}\cdots\overline{U_j}\cdots U_2\,U_1\,S_0=U\,S_0 \tag{8}$$

式 (8) 的U为总体传递矩阵. 注意到杆的左端状态变量总有两个是未知的, 设为 S_{0m}和 S_{0n}, 杆的右端总有两个状态变量为零, 设为 S_k 和 S_j, 则由式 (8) 总可得到两个含有 S_{0m}和 S_{0n}的方程. 对于没有中间约束的杆有

$$\left.\begin{aligned} U_{km}S_{0m} + U_{kn}S_{0n} &= 0 \\ U_{jm}S_{0m} + U_{jn}S_{0n} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

纶

k 录 瞒

$P_{cr} = \dfrac{9.808\,EI_2}{L^2}$，文［4］算得 $P_{cr} = \dfrac{9.81\,EI_2}{L^2}$，两者完全吻合.

对于承受均布轴向压力的杆件，可将杆分成若干段，每段均承受由均布轴向力换算而成的集中力作用，同样可求出整根压杆的临界力.

参　考　文　献

1 刘庆潭，倪国荣. 压杆稳定性和横向自由振动计算的传递矩阵法. 长沙铁道学院学报，1994 (4)

2 刘庆潭. 含锥形变截面压杆稳定计算的传递矩阵法. 计算结构力学及其应用，1996 (3)

3 刘庆潭，倪国荣. 弹性地基梁的传递矩阵法求解. 长沙铁道学院学报，1992 (1)

4 刘鸿文. 高等材料力学. 北京：高等教育出版社，1985

(1996 年 11 月 11 日收到第 1 稿，1997 年 5 月 8 日收到修改稿)

单自由度线性系统自由振动的 Taylor 级数法

任革学　程建纲

(清华大学工程力学系，北京　100084)

摘要　本文从单自由度线性系统的运动方程及初始条件出发，用递推的方式导出初始时刻解的各阶导数，并由 Taylor 级数直接得到系统自由振动的通解表达式.

关键词　单自由度线性系统，自由振动，Taylor 级数

首先考虑无阻尼单自由度系统的自由振动，其数学提法是求解方程

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1}$$

满足初始条件

$$x(0) = x_0 \tag{2a}$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{2b}$$

的解. 振动教科书上的一般解法是：假设形如 $x = e^{\lambda t}$ 的解代入运动方程 (1)，从得到的特征方程可解得两个基本解，进而构造通解，并由初始条件确定通解中的两个常数得到最终解答

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt \tag{3}$$

式中，$p = \sqrt{k/m}$ 为圆频率.

上述方法是常微分方程理论中的的基本做法. 文献［1］在阐述给定初始条件 (2a) 和 (2b) 后，就可以确定初值问题时，采用了 Taylor 级数展开的方法. 实际上借用文献［1］的想法，单自由度系统初值问题的解可以解析地得到. 下面给出仅用 Taylor 展开的概念就可以导出初值问题解的求解方法.

根据圆频率 p 的定义方程 (1) 可以改写成下面的形式

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \tag{4}$$

设 n 是任意自然数，则将方程 (4) 对时间 t 求 n 阶导数得

$$x^{(n+2)} = -p^2 x^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{5}$$

(5) 式中 $n = 0$ 对应的就是原方程 (4). 由递推公式 (5) 立即得初始时刻的各阶导数

$n = 2k$ 为偶数　　$x_0^{(2k)} = (-1)^k p^{2k} x_0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$　　(6a)

$n = 2k+1$ 为奇数　　$x_0^{(2k+1)} = (-1)^k p^{2k} \dot{x}_0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$　　(6b)

初值问题的解可以用其在初始时刻的 Taylor 级数展开为

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_0^{(n)} \frac{t^n}{n!} = \left\{ \begin{array}{l} x_0 - x_0 p^2 \dfrac{t^2}{2!} + \cdots + (-1)^k x_0 p^{2k} \dfrac{t^{2k}}{(2k)!} + \cdots + \\ \dot{x}_0 t - \dot{x}_0 p^2 \dfrac{t^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \dot{x}_0 p^{2k} \dfrac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \end{array} \right.$$

$$= x_0 \cos(pt) + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin(pt) \tag{7}$$

由数学分析中的知识，方程式 (7) 中所出现的级数的收敛半径为无穷大. 方程 (7) 恰好是所要求初值问题的解答.