

# 基于 FPK 方程的减摆器的非线性阻尼测试方法

赵正聪 王本利

王德利

(哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150001) (哈尔滨计量检定测试所, 哈尔滨 150036)

郭景山

马兴瑞

(哈尔滨飞机制造公司, 哈尔滨 150060) (中国空间技术研究院, 北京 100081)

**摘要** 受高斯白噪声外激的一阶非线性动力学方程能通过求解对应的 FPK 方程得到精确稳态解. 本文基于这一结果导出减摆器非线性阻尼力与系统速度输出的概率结构的关系, 将动力学系统中非线性阻尼力参数的测试问题转化测量系统的概率结构, 并通过仿真进行了验证.

**关键词** 动力学系统; 非线性阻尼; FPK 方程

## 1 引言

前轮摆振是飞机结构动力学的主要研究课题之一. 采用减摆器来抑制摆振是设计师们最惯用的手段. 传统的等效线性系统的阻尼参数测试和估计技术已趋于成熟. 然而线性模型已不能完全满足工程实际的要求, 起落架正利用油液阻尼减摆器的非线性性质来抑制摆振<sup>[1]</sup>. 因此建立非线性系统的阻尼测试理论和方法就显得重要而迫切.

本文推导了减摆器受高斯白噪声外激时, 非线性阻尼力和速度响应的概率结构的关系. 通过减摆器在高斯白噪声外激的实验, 得到系统响应的概率结构, 利用非线性阻尼力和响应的概率结构的关系, 得到非线性阻尼模型参数. 并通过数字仿真进行了验证.

## 2 减摆器结构模型与白噪声激励下、阻尼力和响应的概率结构的关系推导

通常的减摆器结构如图 1 所示, 活塞与外面的动部件(摇臂)相连, 当动部件运动时, 拨动活塞在油腔内运动, 迫使油液通过活塞上的节流小孔来回窜流,

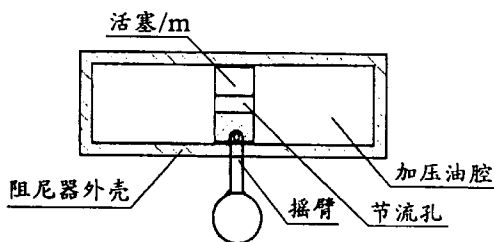


图 1 减摆器结构示意图

由于油液高速通过小孔时产生的摩擦及活塞与腔壁的干摩擦产生阻尼.

活塞在油腔内的运动方程

$$m\ddot{y} + f(\dot{y}) = N(t) \quad (1)$$

其中,  $y$  为活塞运动的位移,  $m$  为活塞质量,  $f(\dot{y})$  为阻尼力,  $N(t)$  为作用在活塞上的外力.

令  $\dot{y} = x$ , (1) 式变为

$$m\dot{x} + f(x) = N(t)$$

当  $N(t)$  为白噪声激励时, 相应的稳态 FPK 方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{m} f(x) p \right) + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p = 0$$

当满足条件: a)  $f(x)$  连续; b) 增长条件:  $|f(x)|^2 \leq K^2(1+x^2)$  时, 另外再求  $x(t_0) = x_0$  与  $w(t), t \in T$  独立, 其中  $K$  是某个正数,  $w(t)$  是单位维纳过程.

FPK 方程的解存在且唯一<sup>[2]</sup>, 其解为

$$p(x) = C^{-1} \exp \left[ -2 \int_0^x f(\xi) / D m d\xi \right] \quad (2)$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -2 \int_0^x f(\xi) / D m d\xi \right] dx$$

对 (2) 式两边取对数并对  $x$  求导, 得

$$f(x) = -\frac{Dm p'(x)}{2 p(x)} \quad (3)$$

其中  $D$  为激励白噪声强度,  $m$  为减摆器活塞质量.  $p(x)$  为速度输出的概率密度函数.  $f(x) = f(\dot{y})$  为阻尼力与状态的关系.

由 (3) 式可知, 若知道阻尼系统在白噪声激励下速度响应的概率密度函数与输入白噪声的强度, 阻尼力与状态的关系很容易得到. 本文利用这一关系, 先测量稳态速度随机响应, 算出响应的概率密度直方图, 进行回归, 求导等运算, 从而得到力与状态的关系. 将阻尼的测量转化为对响应的测量.

本文于 1998-04-24 收到.

3 本方法的仿真验证

3.1 阻尼力模型

仿真采用图 1 所示质量阻尼系统， $m$  上作用有平稳正态白噪声激励  $N(t)$ ，由单位正态白噪声  $e(t)$  乘以增益组成，同时  $m$  在油腔中运动受到非线性阻尼力的作用，据文献 [3]，非线性阻尼力的模型可取为

$$f(x) = c_1x + c_2\text{sign}(x)x^2$$

某型飞机由经验公式算得的物理参数为： $m = 1, c_1 = 5, c_2 = 100$ ，用此参数作为仿真算例的物理参数。算例就是辨识这一非线性阻尼的系数，线性部分与非线性部分相比很小，工程实际中一般均不予以考虑，本文也只注重于非线性阻尼系数的辨识，即  $c_2$ 。

3.2 实现过程

系统用 Matlab 中 Simulink 构造仿真框图 (图 2) 用 4~5 阶定步长 (使最小和最大步长相等) 龙格-库塔法运行得到系统的速度响应，编制程序用频数法得到速度响应的概率密度直方图，然后对概率密度取对数，用多项式回归，求导并乘于系数得到。由于阻尼力模型中有符号函数，对概率密度进行了分段处理。

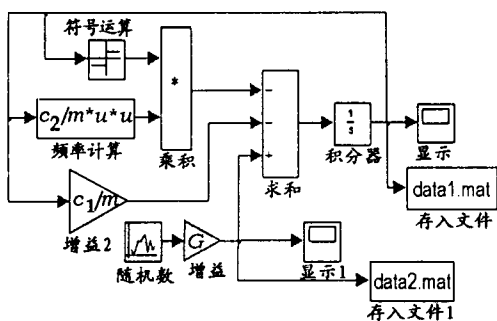


图 2 白噪声激励下减摆器速度响应仿真框图

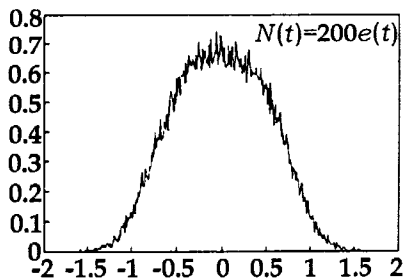
3.3 仿真结果

仿真的积分步长  $L = 0.01$ ，时间  $T = 500\text{s}$ 。得到的概率密度及对应的回归得到的阻尼力速度关系曲线如图 3。

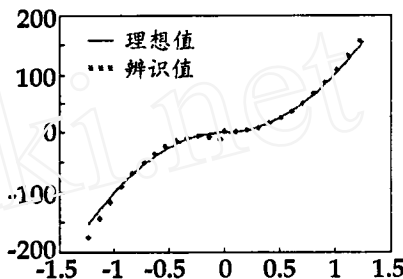
左半部分回归得到的参数为： $c_1 = 3.1, c_2 = 109.6$ ，右半部分回归得到的参数为： $c_1 = 2.3, c_2 = 103.7$ 。仿真结果表明该法具有相当的精度，完全能满足工程实际的需要。

4 结论

本文利用非线性随机振动的理论导出了非线性阻尼力和系统速度响应的概率结构的关系，因此可通过系统速度响应的概率结构算出系统的非线性阻尼力与状态的关系，从而得到系统的非线性阻尼。方法通过



(a) 速度响应概率密度



(b) 阻尼力 - 速度关系曲线

图 3 仿真结果

数值仿真进行了验证，证明是正确可行的。

参 考 文 献

- 1 王学军, 乔新. 前轮非线性摆振极限环幅值的研究. 振动工程学报. 1992,5(4): 384~390
- 2 Caughey T K. Nonlinear theory of random vibrations. *Advances in Applied Mechanics*, 1971, 11: 209~253
- 3 彭拾义. 减摆器. 北京: 国防工业出版社, 1979

A METHOD OF MEASURING THE NONLINEAR DAMPING OF OLEO DAMPER

ZHAO Zhengcong WANG Benli

(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

WANG Deli

(Harbin Measurement and Certificate Test Facility, Harbin 150036, China)

GUO Jingshan

(Harbin Aircraft Manufacturer Corporation, Harbin 150060, China)

MA Xingrui

(Chinese Academy of Space Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract** The exact stationary solution for any first order nonlinear dynamic problems excited by Gaussian white noise has been obtained by solving its corresponding Foker-Planck-Kolmogorov equation. In this paper the relationship between the nonlinear damping force and the transition probability density of velocity response of OLEO damper excited by Gaussian white noise has been obtained,

which is based on the exact stationary solution of FPK equation. So we can get the nonlinear damping force parameters by measuring velocity response of OLEO damper. This method has been proved by numerical simulation.

**Key words** dynamic system, nonlinear damping, Fokker-Planck-Kolmogorov equation

## 二维连续体结构优化中常用单元应力约束的有效处理

于新 隋允康

(大连理工大学工程力学系, 大连 116023)

**摘要** 对结构优化中常用的二维连续体单元进行讨论, 论证了取诸节点处 Mises 应力最大值作为应力约束的合理性.

**关键词** Mises 应力最大值, 应力约束

在结构的截面、形状和拓扑优化中, 应力约束

$$\sigma_i \leq \bar{\sigma}_i \quad (1)$$

虽然简单, 但是处理确不容易. 首先, 通常按第四强度理论, 要把  $\sigma_i$  取为 Mises 应力

$$\sigma_m = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2)^{1/2} \quad (2)$$

其次, 单元应力场为分布函数, 要把无穷个式 (1) 化为一个, 有

$$\sigma_i^* \leq \bar{\sigma}_i \quad (1a)$$

$$\sigma_i^* = \max_{(x,y,z) \in R_i^e} \{\sigma_m(x,y,z)\} \quad (3)$$

(3) 式中  $R_i^e$  为  $i$  单元所占的域. 这样, 如何确定单元内 Mises 应力取得最大值  $\sigma_i^*$  的点  $(x^*, y^*, z^*)$  就成为处理单元应力约束的关键.

对于常应力场中的单元可选取任意一个节点的 Mises 应力作为  $\sigma_i^*$ .

对于六节点平面膜元和平面四节点等参元等, 计算所得的单元内各点的各应力分量可以表示为坐标的

线性函数

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_1x + b_1y + c_1 \\ \sigma_y &= a_2x + b_2y + c_2 \\ \tau_{xy} &= a_3x + b_3y + c_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

为方便把求  $\sigma_m$  的最大点, 转化为求  $\sigma_m^2$  的最大点. 二维情况下

$$\sigma_m^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 \quad (5)$$

$\sigma_m^2$  的 Hessian 阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \sigma_m^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \sigma_m^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \sigma_m^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \sigma_m^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1^2 + 2a_2^2 - 2a_1a_2 + 6a_3^2 \\ 2a_1b_1 + 2a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1 + 6a_3b_3 \\ 2a_1b_1 + 2a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1 + 6a_3b_3 \\ 2b_1^2 + 2b_2^2 - 2b_1b_2 + 6b_3^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中 Hessian 阵的对角元显然都为非负数 ( $\frac{\partial^2 \sigma_m^2}{\partial x^2} = a_1^2 + a_2^2 + (a_1 - a_2)^2 + 6a_3^2 \geq 0$ ,  $\frac{\partial^2 \sigma_m^2}{\partial y^2}$  亦然), 又可证

$$\frac{\partial^2 \sigma_m^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \sigma_m^2}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \sigma_m^2}{\partial x \partial y} \right)^2 \geq 0$$

本文于 1998-03-05 收到.