极坐标中应力与应力函数之间的关系

盖秉政
(哈尔滨工业大学，哈尔滨 150001)

摘要 在极坐标下，通过极坐标的应力平衡方程推导出极坐标应力 $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})$ 与应力函数 φ 之间的关系.

关键词 极坐标系，极坐标应力，应力函数

大家知道，在直角坐标系下从应力的平衡方程出发直接推导弹性力学平面问题中应力与应力函数之间的关系是非常简单明了的 [1]，因此很容易为初学者理解与掌握. 但是，在极坐标系下，从极坐标的应力平衡方程推导极坐标应力 $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})$ 与应力函数 φ 之间关系的类似作法在国内外弹性力学教本中还没有见到. 下面给出我们的答案. 其中的符号均与文献 [1] 中使用的符号相同.

不计体力，极坐标系下应力的平衡方程可写为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0\\&\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

改写上式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \sigma_\theta = 0\\&\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{r\theta}) + \tau_{r\theta} = 0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

若取

$$\sigma_\theta = \frac{\partial B(r,\theta)}{\partial r} \tag{3}$$

其中，$B(r,\theta)$ 为一暂未确定的 (r,θ) 的未知函数，则 (2) 式的第一式可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r - B) = -\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{r\theta}) \tag{4}$$

满足 (4) 式的解为

$$\left.\begin{aligned}&r\sigma_r - B = \frac{\partial A}{\partial \theta}\\&-\tau_{r\theta} = \frac{\partial A}{\partial r}\end{aligned}\right\} \text{或} \left.\begin{aligned}&\sigma_r = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial \theta} + B\right)\\&\tau_{r\theta} = -\frac{\partial A}{\partial r}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中，$A(r,\theta)$ 为另一暂未确定的 (r,θ) 的未知函数. 把 (3) 式、(5) 式代入 (2) 式的第二式

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) \tag{6}$$

对 r 积分一次

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} + f^*(\theta) = \frac{\partial}{\partial r}(rA)$$

或

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(B + f(\theta)) = \frac{\partial}{\partial r}(rA) \tag{7}$$

其中，$f^*(\theta) \equiv \partial f(\theta)/\partial \theta$ 为 θ 的任意函数. 满足 (7) 式的解为

$$\left.\begin{aligned}&rA = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \theta}\\&B + f^*(\theta) = \frac{\partial \varphi^*}{\partial r}\end{aligned}\right\} \text{或} \left.\begin{aligned}&A = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi^*}{\partial \theta}\\&B = \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} + f(\theta)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中，$\varphi^* \equiv \varphi^*(r,\theta)$ 为 (r,θ) 的未知函数. 把 (8) 式代入 (3) 式，(5) 式

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \theta^2} + \frac{f(\theta)}{r}\\&\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi^*}{\partial \theta}\right)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

上式中的 $f(\theta)/r$ 完全可以并到未知函数 φ^* 之中，事实上，若取 $\varphi = \varphi^* + rf_1(\theta)$ 为一新的 (r,θ) 的未知应力函数，$f_1(\theta) + f_1''(\theta) \equiv f(\theta)$，则 (9) 式变为

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\\&\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

这就是在一般弹性力学教本中给出的极坐标系下应力 $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})$ 与应力函数 φ 之间的关系 *.

参 考 文 献

1 徐芝纶. 弹性力学 (上). 北京：高等教育出版社，1988. 78～80

1997-12-09 收到第 1 稿，1998-05-13 收到修改稿.

* 把满足 (6) 式的 $A = (1/r)(\partial\varphi/\partial\theta)$, $B = \partial\varphi/\partial r$ 代入 (3) 式、(5) 式可直接得到 (10) 式.