

THE UPPER-BOUND SOLUTIONS FOR BEARING CAPACITY FACTOR N_γ UNDER COMPLEX CONDITIONS

ZHU Dayong

(Nanjing Engineering Institute, Nanjing 210007, China)

Abstract The true solution for the bearing capacity factor, N_γ , due to soil self-weight has not been assessed. By use of equivalence of limit analysis method and limit equilibrium method, the most

dangerous kinematically admissible failure mechanism is elaborately constructed, resulting in the upper-bound solution for N_γ as low as possible. The effects on N_γ of the inclinations of load, footing base and ground surface have been evaluated. Approximate closed-form expressions for these modifiers are suggested and comparisons are made with current solutions.

Key words bearing capacity of footing, limit analysis, limit equilibrium, upper-bound solution

卷边板的临界应力分析

杨伟军

(长沙交通学院, 长沙 410076)

曾晓明

(机械工业部第八设计院, 长沙 410076)

摘要 对在均布荷载作用下一边支承一边卷边的矩形板进行研究, 探讨了卷边的大小、板的长宽比以及卷边的抗扭能力对板的临界应力的影响。

关键词 卷边板, 临界应力, 抗扭

实验证明薄钢板在初始屈曲后还有相当大的潜在能力。这一现象对提高其设计承载能力具有十分重要的现实意义。对于一边支承一边卷边的板件来说, 由于其边界条件的复杂性, 国内外有关文献资料很少。本文通过分析它的临界应力, 探讨了卷边对板的抗扭作用。

1 临界应力方程

基本假定: 1) 如图 1 所示, 在受荷载边由于板的边界条件对于长板的屈曲强度影响很小^[1], 因此, 可假设荷载边为简支边界条件; 2) 卷边看成为弹性支承梁, 承受板传来的竖向荷载以及端部的均布荷载。

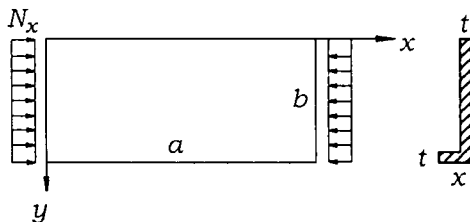


图 1

不考虑卷边对板的扭转约束; 3) 为了分析的简单起见, 支承边认为是简支边界条件, 这样使结果偏于保守。

根据板的 St. Venant 方程

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (1)$$

对于本文所研究的问题, 则有: $q = 0, N_y = 0, N_{xy} = 0$ 。因此 (1) 式可化为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2)$$

由假定 1) 可设

$$w = \sin \frac{m\pi x}{a} Y \quad (3)$$

m 为失稳半波数。代入 (2) 式得

$$Y^{(4)} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 Y'' + \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 - \frac{\sigma_x t}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] Y = 0 \quad (4)$$

本文于 1998-12-15 收到。

令

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{\sigma_x t}{D}}}$$

$$\beta = \sqrt{-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{\sigma_x t}{D}}}$$

方程 (4) 的通解为

$$Y = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y} + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y \quad (5)$$

当 $y = 0$ 时, 其边界条件为

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

得到 $C_3 = 0, C_1 = -C_2$, 从而 Y 可表为: $Y = A \operatorname{sh} \alpha y + B \sin \beta y$

当 $y = b$ 时

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (a)$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-v) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] - A_0 \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (b)$$

其中 A_0 为卷边面积, EI 为卷边的抗弯刚度. 由 (a)、(b) 式分别得到

$$A \left[\alpha^2 - v \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \operatorname{sh} \alpha b - B \left[\beta^2 + v \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \sin \beta b = 0 \quad (6)$$

$$A \left[EI \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \operatorname{sh} \alpha b - D \alpha^3 \operatorname{ch} \alpha b + D(2-v) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \alpha \operatorname{ch} \alpha b - A_0 \sigma_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \operatorname{sh} \alpha b \right] + B \left\{ \left[EI \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \beta b + D \beta^3 \cos \beta b + D(2-v) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \beta \cos \beta b \right] - A_0 \sigma_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \beta b \right\} = 0 \quad (7)$$

方程 (6)、(7) 是关于 A 、 B 的线性齐次式, 为使 A 、 B 有非零解, 则必须使其系数行列式为零. 由此得出临界应力 σ_{cr} 的方程

$$2 \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{t\sigma_{cr}}{D}} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[EI \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - A_0 \sigma_{cr} \right] \operatorname{th} \alpha b \operatorname{tg} \beta b + D \left[\alpha^2 - v \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right]^2 \beta \operatorname{th} \alpha b - D \left[\beta^2 + v \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \alpha \operatorname{tg} \beta b = 0 \quad (8)$$

2 考虑卷边对板的约束作用

此时在 $y = b$ 时有

$$-GJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (9)$$

把式 (9) 代入并整理得

$$A \left\{ \left[\alpha^2 - v \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \operatorname{sh} \alpha b + \frac{GJ}{D} \alpha \operatorname{ch} \alpha b \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right\} - B \left\{ \left[\beta^2 + v \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \sin \beta b - \frac{GJ}{D} \beta \cos \beta b \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right\} = 0 \quad (10)$$

另外一个边界条件与式 (7) 相同, 同样由 A 、 B 的系数行列式为零并整理得临界应力 σ_{cr} 的方程

$$2 \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{t\sigma_{cr}}{D}} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[EI \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - A_0 \sigma_{cr} \right] \operatorname{th} \alpha b \operatorname{tg} \beta b + D \left[\alpha^2 - v \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right]^2 \beta \operatorname{th} \alpha b - D \left[\beta^2 + v \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right]^2 \alpha \operatorname{tg} \beta b + \frac{GJ}{D} \left\{ EI \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \left[EI \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - A_0 \sigma_{cr} \right] \left[\alpha \operatorname{tg} \beta b + \beta \operatorname{th} \alpha b \right] - D v \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \alpha \beta \right\} = 0 \quad (11)$$

3 计算结果分析

方程 (8) 为一超越方程. 借助计算机本文采用二分点法求解. 首先取长宽比为一常量, 以卷边的宽厚比为一变量, 计算不同情况下板的屈曲系数 K 绘成曲线如图 2. 从图中可看到随着 x/t 的增加, K 值也越来越大, 在卷边宽厚比较小时, K 值提高得很小. 而当卷边宽厚比 x/t 较大时, 则 K 值提高得很快.

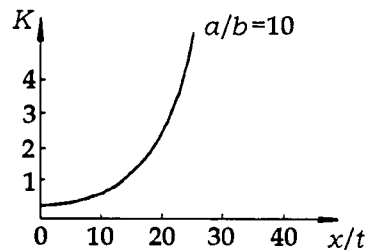


图 2

当长宽比大约超过 12 时, 从图 3 可以看出, 板的失稳系数与三边简支一边自由板的失稳系数非常接近, 也就是说, 当板的长宽比较大时, 卷边对板的约

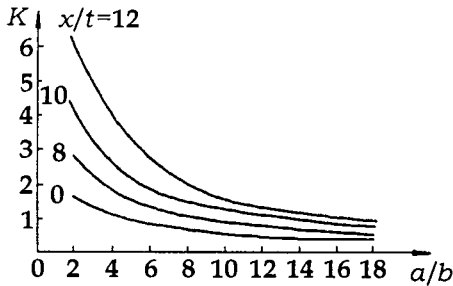


图 3

束没有多大影响。只是在长宽比较小的范围，卷边对板的约束作用才较大，当卷边的宽度取为零时，即可得到三边简支一边自由板的特例，并与已有的结果比较，两者吻合得较好。图中只列出了满足设计规范所要求的卷边尺寸范围内的几条曲线。

从图 4 可清楚看到半波数对屈曲强度的影响，以一个半波失稳时的临界应力最小。

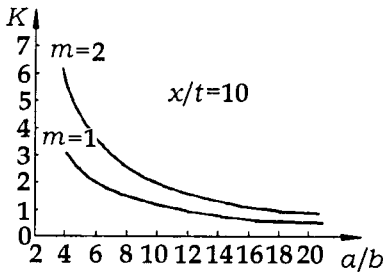


图 4

卷边必须具有一定的刚度，才能起到加筋的作用，否则就与自由边一样。美国规范考虑这种带卷边板时，要求卷边必须达到足够的刚度，然后按加筋板来考虑。而当卷边的刚度不够时，则按非加筋板来计算。如果计算板的临界应力时采用简支板的失稳系数 $K = 4$ ，再由方程式 (8)，反求所需的卷边宽度，所有结果都大于我国规范所规定的最大卷边宽厚比，这样

的情况实际上很难做到，因为当卷边宽厚比较大时，首先是卷边发生局部失稳，从而引起柱子整体失稳。为了避免卷边先失稳，因而实际构件中，卷边不可能做得太大，所以相对于板而言，卷边是比较小的。这样，卷边的抗扭作用不会很大，式 (11) 的计算结果与没有考虑卷边的抗扭作用的结果相比较，两者相差较小。

参 考 文 献

- 1 柏拉希. 金属结构的屈曲强度 (中译本). 北京: 科学出版社, 1965
- 2 Tsutumu Usanni. Post-buckling of plates in compression and bending. *Journal of the Structural Division*, 1982, 3
- 3 柳春图. 四边简支矩形板稳定问题的精确解. *力学学报*, 1982, 2

ANALYSIS OF BUCKLING STRESS ON LIPED PLATE

YANG Weijun

(Changsha Communication University, Changsha 410076, China)

ZENG Xiaoming

(The Enghth Design Institute, Ministry of Mechne Industry, Changsha 410076, China)

Abstract This paper investigates the rectanggu-lor plate loaded under uniaxial uniform compression with the unloaded edge to be liped. The influence of lip width, length to width ratio of plate and lip's rotation resistance capacity to buckling stress are explored.

Key words liped plate, buckling stress, rotation capacity

1999 年度“周培源力学奖”开始评选

为推动周培源先生生前所从事研究领域的科学事业的发展，“周培源基金会”决定自 1997 年开始设立“周培源力学奖”，每两年评选一次，每次一人。“周培源力学奖”旨在奖励在力学研究工作中做出创造性成果，或运用力学现有理论、方法解决重大关键问题的中国力学工作者。

中国力学学会受“周培源基金会”的委托进行“周培源力学奖”的评选工作。本届“周培源力学奖”获奖候选人将在中国力学学会理事推荐的基础上评选产生。