

速比与机械效率的关系

刘大为

(甘肃教育学院物理系, 兰州 730000)

摘要 本文讨论机构的机械效率与其速比之间的关系, 分别根据斜面及杠杆这两种基本的变速方式进行具体讨论, 得出定量关系, 并得出采用杠杆方式变速较斜面方式变速可以获得较大的机械效率的结论.

关键词 机械效率, 速比, 斜面, 杠杆

1 引言

当一机构的输出速度为零, 则该机构的输出功率为零, 显然此时机构的机械效率为零, 即当机构的速比 $i = 0$ 时, 机械效率 $\eta = 0$.

由于存在摩擦力的情况下, 机构所能实现的速比是有限的, 当速比达到某一数值时, 机构自锁^[1]. 即当机构的速比 $i = i_m$ 时, 机械效率 $\eta = 0$.

综合上述, 可以得出结论: 在有摩擦的情况下, 在速比范围 $0 \leq i \leq i_m$, 机构的机械效率 $0 \leq \eta \leq 1$; 当一机构的 i 由 0 增加至某一数值 i_0 之前, η 随 i 增加而增加, 随后, η 随 i 增加而减小, 当 $i = i_m$ 时, $\eta = 0$; 我们可以写出, $\eta = \eta(i)$ 及 $i = i_0 \Rightarrow \eta = \eta_{\max}$.

机构总存在速比, 而这一速比或者可以由斜面、杠杆两者之一来实现, 或者由它们的组合来实现. 斜面所以能实现速比, 是因为力可以按平行四边形法则进行分解, 杠杆所以能实现速比, 是因为存在力矩的平衡原理. 现在我们就这两种情况讨论机构的效率与其速比的定量关系.

2 对于斜面

一滑块在水平推力 P 及铅直载荷 Q 的作用下, 沿一斜面匀速运动 (图 1), 沿输出力 Q 反方向速度与

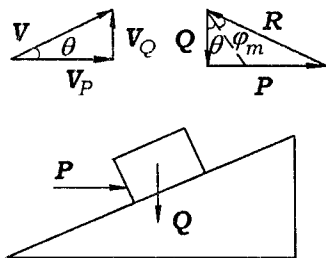


图 1

沿输入力 P 正方向速度的比值即速比为

$$i = \frac{V_Q}{V_P} = \operatorname{tg} \theta \quad (1)$$

机械效率

$$\eta = \frac{V_Q Q}{V_P P} = \frac{Q}{P} i = i \operatorname{tg}(\theta + \phi_m) \quad (2)$$

由式 (2), 并设滑块与斜面间的摩擦系数为 μ , 则有

$$\eta = i \frac{\operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} \phi_m - 1}{\operatorname{ctg} \theta + \operatorname{ctg} \phi_m} = \frac{\frac{1}{i} \frac{1}{\mu} - 1}{\frac{1}{i} + \frac{1}{\mu}}$$

于是有

$$\eta = i \frac{1 - i\mu}{i + \mu} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial i} = \frac{1 - \mu i}{\mu + i} - \frac{i\mu}{\mu + 1} - \frac{i(1 - \mu i)}{(\mu + i)^2} \quad (4)$$

令 $\frac{\partial \eta}{\partial i} = 0$, 得 $i_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}$, $i_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2 + 1}$, 舍去 i_2 , 可见, 获得最高效率的速比公式为

$$i_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} \quad (5)$$

将式 (5) 代入式 (3) 得机械效率的最大值

$$\eta_{\max} = \frac{(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 1})(1 - \mu(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}))}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \quad (6)$$

3 对于杠杆

在图 2(a) 所示的杠杆中, P 为输出力, Q 为输入力, 速比 $I = a/b$. 考虑到摩擦, 在匀速转动的情况下, 当以 ρ 表示摩擦圆半径时^[2], 摩擦阻力矩为 $M_f = (Q + P)\rho$, 主动力矩为 $M_p = Pb - Qa$, 由 $M_f = M_p$, 有

$$\frac{P}{Q} = \frac{a + \rho}{b - \rho} \quad (7)$$

式 (7) 可以由图 3 示出. 故, 可写

$$\frac{Q}{P} = \operatorname{ctg}(\theta + \varphi_\rho) \quad (8)$$

本文于 1998-12-07 收到.

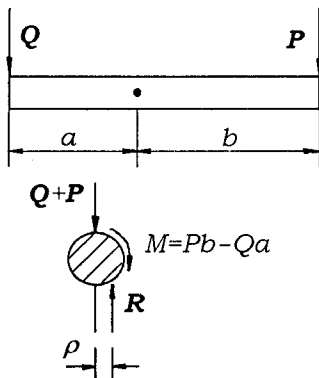


图2

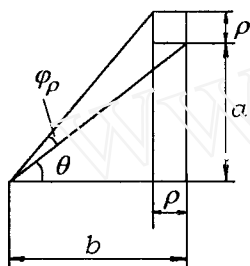


图3

由 $i = a/b$ 及式 (8), 机械效率

$$\eta = \frac{Qa}{Pb} = i \cdot \operatorname{ctg}(\theta + \varphi_\rho) \quad (9)$$

若令, $\mu_\rho = \operatorname{tg}\varphi_\rho$, 则有

$$\eta = i \frac{1 - i\mu_\rho}{\mu_\rho + i} \quad (10)$$

显然式 (10) 与式 (3) 形式相同, 由于 $\rho = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} r \approx \mu r$, 故当杠杆的转动半径 r 相对于杠杆的尺寸很小时, ρ 也很小, 而 ρ 很小时, 由图3应有

$$\mu_\rho = \operatorname{tg}\varphi_\rho \approx \varphi_\rho = \frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (11)$$

$$\mu_\rho = \operatorname{tg}\varphi_\rho \approx \varphi_\rho = \frac{\sqrt{2} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} r}{\sqrt{a^2 + b^2}} \approx \frac{\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (12)$$

显然, 由式 (12) 可以看出, 一般情况下

$$\mu_\rho \ll \mu \quad (13)$$

故由式 (10) 与式 (3) 可见, 在速比 i 相等的情况下, 采用以杠杆的方式变速的机构较以斜面的方式变速的机构可以具有大得多的机械效率.

根据式 (10), 对于杠杆, 获得最高效率的速比为

$$i_1 = -\mu_\rho + \sqrt{\mu_\rho^2 + 1} \quad (14)$$

最大的机械效率为

$$\eta_{\max} = \frac{(-u_\rho + \sqrt{u_\rho^2 + 1})[1 - u_\rho(-u_\rho + \sqrt{u_\rho^2 + 1})]}{\sqrt{u_\rho^2 + 1}} \quad (15)$$

4 小结

- (1) 一机构的速比影响其机械效率.
- (2) 采用以杠杆的方式变速的机构较以斜面的方式变速的机构可以具有更大的机构效率.

参 考 文 献

- 1 刘大为, 朱培毅. 自锁与速比的关系. 工程力学, 1996 (4)
- 2 天津大学主编. 机械原理 (上册). 北京: 高等教育出版社, 1982

THE RELATIONSHIP OF MACHINES EFFICIENCY TO SPEED RATIO

LIU Dawei

(Department of Physics, Gansu Education College,
Lanzhou 730000, China)

Abstract An analysis of the relationship between machine efficiency and speed ratio, especially for two essential situations of the speed change of inclined plane and lever, is made and quantitative relationship is obtained.

Key words machine efficiency, speed ratio, inclined plane, lever