曲梁剪应力和径向应力的积分方程解

虞爱民　　李享荣
(同济大学工程力学与技术系，上海　200092)　(上海大学力学系，上海　200072)

摘要　直接对曲梁剪应力的积分方程进行求解，得到剪应力和径向应力计算的一般公式．最后给出计算实例．

关键词　曲梁，剪应力，径向应力，积分方程

材料力学中对于曲梁的剪应力，或者忽略不计，或者采用直梁公式 [1,2]，对曲梁的径向应力则更少述及．某些国内外有关教材中导出了求解曲梁剪应力的积分方程 [3,4]，但均未直接对方程进行求解．本文将研究具有一般截面且在复杂受力情况下曲梁的剪应力，并直接对积分方程进行求解，导出了曲梁剪应力和径向应力的计算公式．

1　曲梁的内力及正应力

如图 1，对于具有一般截面且在复杂受力情况下的等截面曲杆，在忽略高阶微量的条件下，由微段梁的平衡条件可得 [4]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}N_s}{\mathrm{d}s}=\frac{V_y}{R}, \qquad &&\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}s}=-p_z\\ &\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}s}=-p_y-\frac{N_s}{R}, &&\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}s}=V_z\\ &\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}s}=V_y \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

为了论述方便，本文沿用文献 [4] 的符号规定，即图 1(a) 中的 N_s, V_y, V_z, M_y 和 M_z 均为正；s 与轴线相切，y 是指向该梁轴线曲率中心的径向坐标，z 的方向正交于杆件平面．

在平截面假设的基础上，截面上正应力的计算公式为

$$\sigma_s=\frac{N_s}{A}-\frac{M_z}{RA}+\frac{M_zJ_y-M_yJ_{yz}}{J_yJ_z-J_{yz}^2}\frac{y}{1-y/R}+\frac{M_yJ_z-M_zJ_{yz}}{J_yJ_z-J_{yz}^2}\frac{z}{1-y/R} \tag{2}$$

式中，A,R 是曲梁的横截面积和曲率半径，J_y, J_{yz}, J_z 分别定义为下面的积分

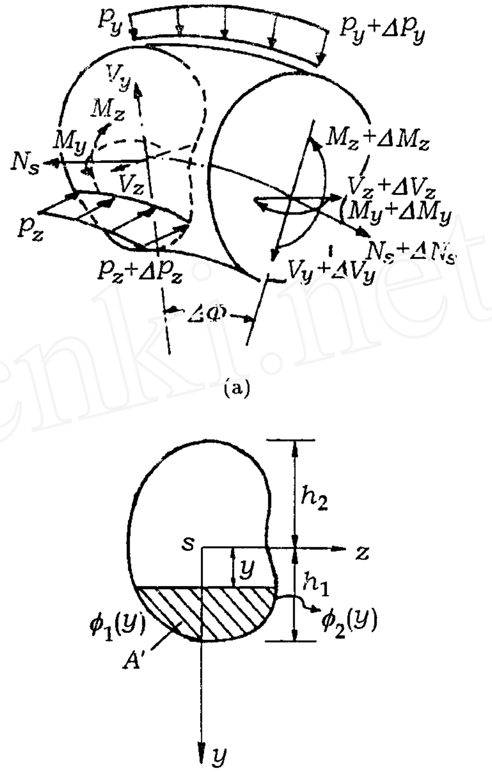


图 1

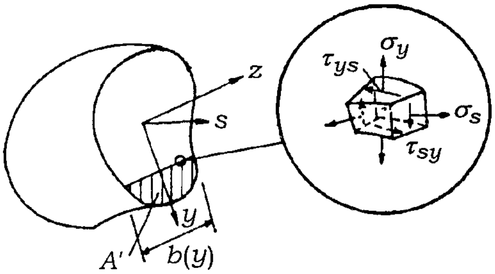
$$\left.\begin{aligned} J_y&=\int_A\frac{z^2}{1-y/R}\mathrm{d}A\\ J_{yz}&=\int_A\frac{yz}{1-y/R}\mathrm{d}A\\ J_z&=\int_A\frac{y^2}{1-y/R}\mathrm{d}A \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

2　曲梁的剪应力和径向应力

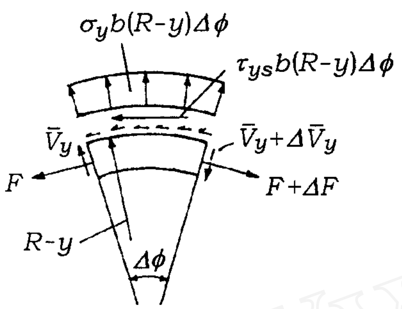
这里，仍采用直梁初等理论中的假设：截面中与 z 轴平行的直线上，各点 y 方向的剪应力分量 τ_{ys} 相等，它们只是 y 的函数．

考察面积为 A' 的一个梁单元切片上的平衡，如图 2 所示．设 A' 中的 $b(y)$ 尺寸与 z 轴平行，从面积 A' 的正应力可以得到法向力

本文于 1998-09-29 收到．



(a)



(b)

图 2

$$F=\int_{A'}\sigma_s\mathrm{d}A=\left(\frac{N_s}{A}-\frac{M_z}{AR}\right)A'+\frac{M_zJ_y-M_yJ_{yz}}{J_yJ_z-J_{yz}^2}\int_{A'}\frac{y}{1-y/R}\mathrm{d}A+\frac{M_yJ_z-M_zJ_{yz}}{J_yJ_z-J_{yz}^2}\int_{A'}\frac{z}{1-y/R}\mathrm{d}A \tag{4}$$

同理，从面积 A' 的剪应力可以得到与横截面平行的剪力 $\bar{V}_y$，其中

$$\bar{V}_y=\int_{A'}\tau_{sy}\mathrm{d}A \tag{5}$$

这里， $\tau_{sy}=\tau_{ys}$. 求该脱离体上各力在水平方向和垂直方向的分力和，可以得到

$$\tau_{ys}=\frac{1}{b(1-y/R)}\left(\frac{\partial F}{\partial s}-\frac{1}{R}\bar{V}_y\right) \tag{6}$$

$$\sigma_y=\frac{1}{b(1-y/R)}\left(\frac{F}{R}+\frac{\partial\bar{V}_y}{\partial s}\right) \tag{7}$$

由于式 (6) 中的 $\bar{V}_y$ 为剪应力 τ_{sy} 在面积 A' 上的积分，故它是一个关于 τ_{sy} 的积分方程. 为了便于求解积分方程 (6)，需要对它作些变换. 将式 (4) 对 s 求导后和式 (5) 一并代入式 (6)，并利用式 (1)，有

$$\tau_{ys}=\frac{1}{b(1-y/R)}\left[\frac{J_yV_y-J_{yz}V_z}{J_yJ_z-J_{yz}^2}\int_y^{h_1}\frac{by\mathrm{d}y}{1-y/R}+\frac{J_zV_z-J_{yz}V_y}{J_yJ_z-J_{yz}^2}\int_y^{h_1}\frac{\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}z\mathrm{d}z}{1-y/R}\mathrm{d}y-\frac{1}{R}\int_y^{h_1}\tau_{ys}b\mathrm{d}y\right]$$

这里， $h_1,\phi_1(y)$ 和 $\phi_2(y)$ 见图 1(b). 将上式左、右两边遍乘因子 $b(R-y)$ 后对 y 求导，然后再遍乘因子 $(R-y)$，整理得

$$[b(R-y)^2\tau_{ys}]'_y=R^2\left[-\frac{J_yV_y-J_{yz}V_z}{J_yJ_z-J_{yz}^2}by-\frac{J_zV_z-J_{yz}V_y}{J_yJ_z-J_{yz}^2}\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}z\mathrm{d}z\right]$$

式中的 $[\ ]'_y$ 为括号中的函数对 y 的求导，再两边对 y 积分，并利用 $y=h_1$ 处 $\tau_{ys}=0$ 的边界条件确定积分常数，最后得到

$$\tau_{ys}=\frac{R^2(J_yV_y-J_{yz}V_z)}{Hb(R-y)^2}\left[\left(\int by\mathrm{d}y\right)_{y=h_1}-\int by\mathrm{d}y\right]+\frac{R^2(J_zV_z-J_{yz}V_y)}{Hb(R-y)^2}\cdot\left[\left(\int\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}z\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)_{y=h_1}-\int\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}z\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right] \tag{8}$$

式中 $H=J_yJ_z-J_{yz}^2$

将式 (8) 代入式 (5) 后对 s 求导，并注意到式 (1)，再与式 (4) 一并代入式 (7) 后得到

$$\sigma_y=\frac{1}{b(R-y)}\left[\left(\frac{N_s}{A}-\frac{M_z}{AR}\right)\int_y^{h_1}b\mathrm{d}y+\frac{(M_zJ_y-M_yJ_{yz})}{H}\int_y^{h_1}\frac{Rby\mathrm{d}y}{R-y}+\frac{(M_yJ_z-M_zJ_{yz})}{H}\int_y^{h_1}\frac{R\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}z\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y}{R-y}\right]+\frac{R^3(p_y+N_s/R)}{Hb(R-y)}\left\{\left[-J_y\int by\mathrm{d}y+J_{yz}\int\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}z\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]_{y=h_1}\int_y^{h_1}\frac{\mathrm{d}y}{(R-y)^2}+J_y\int_y^{h_1}\frac{\left(\int by\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y}{(R-y)^2}-\right.$$

$$J_{yz}\int_{y}^{h_1}\frac{\int\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}z\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y}{(R-y)^2}\mathrm{d}y\Big\}+\frac{R^3p_z}{Hb(R-y)}\Big\{\Big[J_{yz}\Big(\int by\mathrm{d}y\Big)-$$

$$J_z\int\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}z\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\Big]_{y=h_1}\int_{y}^{h_1}\frac{\mathrm{d}y}{(R-y)^2}+J_z\int_{y}^{h_1}\frac{\int\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}z\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y}{(R-y)^2}\mathrm{d}y-$$

$$J_{yz}\int_{y}^{h_1}\frac{\int by\mathrm{d}y}{(R-y)^2}\mathrm{d}y\Big\} \tag{9}$$

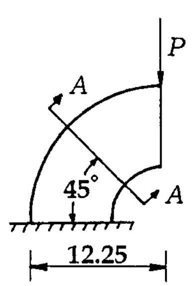
式 (8) 和式 (9) 即为曲梁剪应力和径向应力计算的一般公式，它们满足曲梁上、下表面处无剪应力和分布载荷的条件.

3 算　例

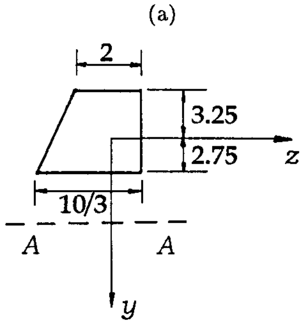
图 3(a) 和图 3(b) 为一具有梯形截面和圆弧轴线的曲杆，它的下端固定，上端受径向力 P 作用. 令式 (8) 和式 (9) 中的 $V_z=0$, $M_y=0$, $p_y=p_z=0$, 即可得到该曲梁剪应力和径向应力的计算公式. 设截面尺寸和曲率半径大小如图所示，经计算可求得截面常数分别为

$$J_y=11.58\,\mathrm{cm}^4\,,\qquad J_{yz}=-5.39\,\mathrm{cm}^4$$

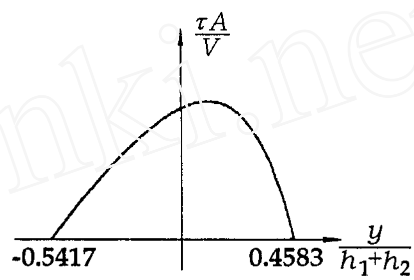
$$J_z=48.61\,\mathrm{cm}^4$$



(a)



(b)



(c)

图 3

图 3(c) 给出了在截面 A-A 上剪应力和径向应力沿截面高度的分布曲线.

4 讨　论

(1) 计算结果表明，剪应力和径向应力在截面形心稍偏下一点为最大. 在 45° 截面上各点处的剪应力和径向应力大小恰好相等，仅差一负号.

(2) 弹力解是精确的，但它只适用矩形截面的曲梁. 文献 [5] 的解只适用于具有纵向对称面且外力作用在该平面内的曲梁. 然按推导条件，本文公式对一般截面且复杂受力的情况都是适用的.

参　考　文　献

1 刘鸿文主编. 材料力学 (第 2 版). 北京：高教出版社，1983

2 Беляев B. 材料力学. 北京：商务印书馆， 1953

3 刘鸿文主编. 高等材料力学. 北京：高教出版社， 1985

4 Oden J T et al. 弹性结构力学. 北京：中国建筑工业出版社， 1986. 107~110

5 熊翼翔. 曲梁的剪应力. 力学与实践, 1992, 14(4): 56~59

6 铁木辛柯等. 弹性力学. 北京：人民教育出版社， 1964