

关于应力张量分量和应力物理分量间的转换问题

李跃军

(北京建工学院, 北京 100044)

摘要 本文提出了理想物理标架的新概念;在此基础上,导出由任意坐标系到理想物理标架的变换关系,得到从应力张量分量到应力物理分量的转换公式;并给出一个算例说明其正确性.

关键词 应力张量分量,理想物理标架,应力物理分量

1 问题的提出

在连续介质力学的研究中,张量的应用越来越广泛,并且显示了它的威力和优越性.当把一个力学问题的基本方程用张量形式表达时,它保持与坐标系选择无关的重要特性,从而给研究工作带来诸多方便.但是,我们也注意到,在大部分情况下,应力张量的分量和通常使用的应力物理分量在内涵和数量上都存在着根本的差别.尤其是在大变形理论中,由于事先设定的坐标随物体的变形而变化,即使在变形前选用直交标准坐标系,物体变形后,也将变成任意曲线坐标系.从而使力学中最基本的应力这个力学量的张量分量和物理分量出现根本的异义和数值,给实际应用带来烦恼^[1].虽然非完整系的引入为解决这个难题提供了一定的手段^[2],但并没有从度量张量的分量这个体现张量的可度量性的基本点出发,揭示其度量的内涵,所以,这种方法所得到的非完整系下的各种分量亦有很大差异,选用哪个分量,作为物理分量还需要进一步考查论证.

2 从应力的张量分量到物理分量的转换公式

大家知道,张量的度量内涵完全反映在其协变度量张量和逆变度量张量的分量中,因此,我们做出如下的定义.

定义 度量张量的协变分量(或逆变分量)对应的3个特征向量所构成的标架称为度量主轴;把度量主轴标准化后形成的直交标准坐标系称为张量的理想物理标架.

从上述定义出发,有以下定理:

定理 在欧氏空间任意坐标系下,把应力张量各种形式的分量变换到理想物理标架上,就得到唯一确定的应力物理分量.

证明 由线性代数的基本定理知道^[3], $n \times n$ 阶实对称矩阵恒存在 n 个正交的特征向量构成 n 维空间的主坐标基底.

度量张量为实对称二阶张量,它的协变分量 $g_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 或逆变分量 $g^{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 对应着一个 $n \times n$ 阶实对称矩阵,因此可以肯定所谓度量主轴和理想物理标架是存在的.对于欧氏空间,不难得出以下引理:

引理 在欧氏空间中,度量张量的协变分量(或逆变分量)存在着3个线性独立的实特征向量,构成三维空间的主坐标基底.

由于张量形式具有与坐标选择无关的特性,上述引理应对三维空间的任意坐标系都成立.

设欧氏空间任意坐标系下某点处的局部基矢为 $g_i (i = 1, 2, 3)$, 则该点处度量张量的协变分量

$$g_{ij} = g_i \cdot g_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

g_{ij} 的3个特征向量构成的主坐标的基底记作

$$g_r \quad (r = 1, 2, 3)$$

则有

$$g_{rs} = g_r \cdot g_s \quad (r = s = k = 1, 2, 3) \quad (2)$$

为 g_{rs} 对应的实特征值.

当把 g_{ij} 向主坐标变换时有

$${}^*_{r \quad i} \quad {}^*_{s \quad j} g_{ij} = [g_{rs}] = \begin{cases} 0 & (r \neq s) \\ g_{rs} & (r = s = k) \end{cases}$$



把(5)写成张量形式为

$$r^{*i} g_i = g_r \quad (6)$$

(6)式表明 r^{*i} 就是从局部坐标到该点主坐标的协变系数. 它可以由下列方法构成^[1].

先把特征向量 g_r 标准化, 记作 e_r ($r = 1, 2, 3$) 再由

$$E_0 = [e_1 e_2 e_3] \left. \begin{array}{l} \text{变形的} \\ \text{作} \\ \text{数值} \end{array} \right\} \text{根}$$

根

(9)

把(9)式和(3)式比较, 不难看出, 相似正交变换 E^T 就是从局部标架到主坐标的协变系数 r^{*i} .

同时, 因

$$e_r = \frac{g_r}{|g_r|} = \frac{g_r}{\sqrt{g_r \cdot g_r}} = \frac{g_r}{\sqrt{g_{xx}}} \quad (10)$$

其中 $g_{xx} = g_{rs}$ ($r = s$) 横线表示不求和. 把(6)式代入(10)中得到

$$e_r = \frac{r^{*i} g_i}{\sqrt{g_{xx}}} = \frac{r^{*i}}{\sqrt{g_{xx}}} g_i \quad (11)$$

令

$$L_r^{*i} = r^{*i} / \sqrt{g_{xx}} \quad (12)$$

则

$$e_r = L_r^{*i} g_i \quad (13)$$

因 e_r 就是主特征向量化为单位向量, 所以, 它是理想物理标架的单位基矢, 从而可以知道(12)式中的 L_r^{*i} 正是实现(13)式表示的从自然基矢 g_i 到理想物理标架的单位基矢 e_r 的协变系数.

同理, 亦可证明与上述变换对应的逆变系数

$$L_i^{*r} = r^{*i} / \sqrt{g_{xx}} \quad (14)$$

其中 i^{*r} 就是(9)式中的 E 表示的正交变换.

$$g^{xx} = g^{rs} \quad (r = s)$$

横线表示不求和.

因 e_r 构成正交标准坐标系. 所以, 把应力张量的各种形式的分量变换到其上时, 得到了完全相同的物理分量. 所以说它是唯一的确定值. 即

$$(rs) = L_r^{*i} L_s^{*j} \sigma_{ij} = L_i^{*r} L_j^{*s} \sigma_{ij} \quad (15)$$

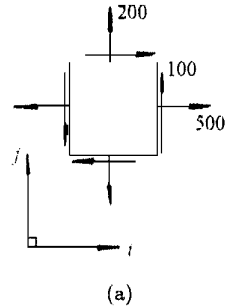
这就是从应力张量分量到应力物理分量的转换公式. 式中 (rs) 表示应力物理分量. 因 e_r 为单位正交系, 角标上下已无意义, 故写在中间括号内.

3 算例

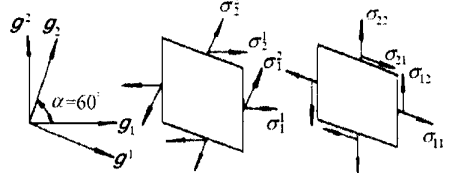
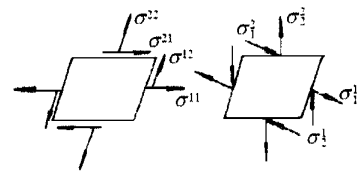
为说明上述结论的正确性, 特设计以下算例验证.

已知在平面应力状态下, 在笛卡尔坐标中, 某点处的应力分量 $\sigma_x = 500 \text{ kPa}$, $\sigma_y = 200 \text{ kPa}$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 100 \text{ kPa}$, 求在 $|g_1| = |g_2| = 1$, $\alpha = 60^\circ$ 的斜角坐标系中, 该点的各种形式的应力张量分量及其对应的物理分量的大小.

由已知条件和图1不难得到从原笛卡尔坐标系到斜角坐标系的变换系数及该点处在斜角坐标系中各种形式的应力张量分量, 其方向如图1(b)所示, 再由本文的方法把它变为物理分量. 现将结果列在表1中.



(a)



(b)

图1

表 1

应力逆变分量	$\sigma_{11} = 451.21$	$\sigma_{12} = -17.86$	$\sigma_{21} = -17.86$	$\sigma_{22} = 266.67$
应力物理分量	$(\sigma_{11}) = 188.40$	$(\sigma_{12}) = 79.91$	$(\sigma_{21}) = 79.91$	$(\sigma_{22}) = 511.60$
应力协变分量	$\sigma_{11} = 500.00$	$\sigma_{12} = 336.60$	$\sigma_{21} = 336.60$	$\sigma_{22} = 361.60$
应力物理分量	$(\sigma_{11}) = 188.40$	$(\sigma_{12}) = 79.91$	$(\sigma_{21}) = 79.91$	$(\sigma_{22}) = 511.60$
应力混变分量	$\frac{1}{2} = 442.26$	$\frac{2}{1} = 115.47$	$\frac{1}{2} = 207.73$	$\frac{2}{2} = 257.34$
应力物理分量	$(\frac{1}{1}) = 188.40$	$(\frac{2}{1}) = 79.91$	$(\frac{1}{2}) = 79.91$	$(\frac{2}{2}) = 511.60$
应力混变分量	$\frac{1}{1} = 442.26$	$\frac{2}{1} = 115.47$	$\frac{1}{2} = 207.73$	$\frac{2}{2} = 257.34$
应力物理分量	$(\frac{1}{1}) = 188.40$	$(\frac{2}{1}) = 79.91$	$(\frac{1}{2}) = 79.91$	$(\frac{2}{2}) = 511.60$

表中括号表示理想物理标架上的应力值, 括号中的指标则为与应力张量变异形式对应的指标. 因此, 指标加括号就表示由对应的应力张量分量转换而来的应力物理分量.

从计算数值可以看出, 各种不同形式的张量分量利用本文的方法可以转换为完全相同的应力物理量. 显然它是唯一确定值.

当然, 由计算结果也看到, 正应力 (σ_{11}) , (σ_{22}) 和剪应力 (σ_{12}) 、 (σ_{21}) 不再是原题已知的数值. 但只要分别由已知的 $\sigma_x = 500 \text{ kPa}$, $\sigma_y = 200 \text{ kPa}$, $\sigma_{xy} = 100 \text{ kPa}$

和转换而来的 $(\sigma_{11}) = 188.4 \text{ kPa}$, $(\sigma_{22}) = 511.60 \text{ kPa}$ 及 $(\sigma_{12}) = 79.91 \text{ kPa}$ 作出应力圆, 则它们决定的应力圆完全重合, 显然证明它们表示的是同一点的应力状态.

本文得到傅裕寿教授的指导, 在此深表谢意.

参 考 文 献

- 1 南京大学数学系. 线性代数. 北京: 科学出版社, 1978
- 2 陈至达. 有理力学. 北京: 中国矿业大学研究生院, 1987
- 3 郭仲衡. 非线性弹性理论. 北京: 科学出版社, 1980

(本文于 1996 年 10 月 27 日收到)

葵花杆填充板静曲力学性能研究

马庆安 何立存 张惠民

(新疆石河子大学工学院土建系, 832003)

摘要 本文运用复合材料刚度合理分配法, 在理论分析和实验的基础上给出了新的计算公式, 揭示了葵花杆填充板的力学性能, 为广泛使用该材料提供了理论依据.

关键词 结构, 应力分析, 变形分析, 力学性能

新疆生产建设兵团农场大面积种植棉花、葵花、小麦、水稻等农作物. 以往这些作物杆茎都用来做柴草燃烧. 这样浪费了资源又污染了环境. 为使这些作物杆茎充分利用, 有人先后试制出了刨花板、棉花杆纤维板、葵花杆填充板、麦秆和稻秆板. 但由于制作材料不一, 以及对其中有发展前景的葵花杆填充板承力状况的错误认识, 使这种材料的应用受到了很大的限制, 没有产生广泛的经济效益和社会效益, 对环境保护的

贡献也不显著. 本文对葵花杆填充板静曲力学性能进行了研究, 揭示了该材料具有强度高, 比重轻的优良性能, 展现了葵花杆填充板作为一种新型建筑复合材料的广阔应用前景. 依据本文研究成果, 该材料的应用已经有了进一步扩展. 随着应用的深入, 应用范围还将进一步扩大. 这将在节约木材资源, 保护环境等方面产生巨大的社会效益, 有利于经济的持续发展. 特别是在以建筑业为支柱产业的今天, 其效益将更为显著.

1 空腹骨架夹心结构

葵花杆填充板是将圆柱形葵花杆横向切断紧密排列作芯材, 胶合板或人造纤维板作面板, 涂上粘结剂, 加压制成轻质复合材料的板材. 所以称填充板为空腹