

# 应力圆与应变圆之间的关系

刘东甲

(合肥工业大学资源与环境科学系, 合肥 230009)

**摘要** 本文对各向同性弹性体, 导出了用应变复数表示的应力圆方程, 用该方程分析了应力圆与应变圆之间的关系, 还用其对测得的应变分量直接进行平面应力状态的应力分析, 计算简便.

**关键词** 应力圆方程, 应变圆方程, 复变函数法

在文献 [1] 中, 笔者由单元体斜截面上的应力公式得到应力圆方程

$$z - z_c = (z_x - z_c) e^{i2\theta} \quad (1)$$

同理, 由平面应变的转轴公式<sup>[2]</sup>

$$\begin{cases} x = \frac{x^+ + y^-}{2} + \frac{x^- - y^+}{2} \cos 2\theta - x_y \sin 2\theta \\ x_y = \frac{x^- - y^+}{2} \sin 2\theta + x_y \cos 2\theta \end{cases}$$

截

应用 (5) 式, 对测得的应变分量  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  和  $\epsilon_{xy}$  可直接进行平面应力分析. 由于省去了由物理方程求 3 个应力分量这一中间过程, 使得运算较为简便.

例 一构件某点处为平面应力状态, 由电测得到该点处  $\epsilon_x = 500 \times 10^{-6}$ ,  $\epsilon_y = -300 \times 10^{-6}$ ,  $\epsilon_{xy} = \epsilon_{xy}/2 = -100 \times 10^{-6}$ , 且已知  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 0.3$ , 求该点主应力及应力主向.

解 把  $z_x = \epsilon_x + i \epsilon_{xy} = 500 \times 10^{-6} - i100 \times 10^{-6}$  及  $z_c = (\epsilon_x + \epsilon_y)/2 = 100 \times 10^{-6}$  代入 (5) 式, 得

$$z - 30 = 66.6e^{i(-14^\circ+2)}$$

由上式, 当  $-14^\circ+2 = 0^\circ$  时, 得最大主应力  $\sigma_{\max} =$

$30 + 66.6 = 96.6 \text{ MPa}$ , 其方向为  $\theta = 7^\circ$ ; 当  $-14^\circ+2 = -180^\circ$  时, 得最小主应力  $\sigma_{\min} = 30 - 66.6 = -36.6 \text{ MPa}$ , 其方向为  $\theta = -83^\circ$ .

最后, 我们指出, 本文的复变函数法同样可以用于分析截面图形的惯性矩与惯性积.

## 参 考 文 献

- 1 刘东甲. 用复数研究平面应力状态. 力学与实践, 1997, 19 (5): 70~71
- 2 杜庆华, 熊祝华, 陶学文. 应用固体力学基础 (上册). 北京: 高等教育出版社, 1987. 155~157

# 齿轮传动系统刚度的确定方法

韩晓娟

(燕山大学机械工程学院, 秦皇岛 066004)

**摘要** 本文介绍齿轮传动系统刚度分析方法. 根据齿轮轮齿刚度计算模型, 给出了传动系统弹簧刚度的计算方法. 为确定齿轮传动输入轴与输出轴间的转角误差提供了基础.

**关键词** 齿轮传动, 刚度分析, 计算

齿轮传动中, 轮轴和齿轮轮齿都不是绝对刚体, 因此在载荷作用下, 轮轴与轮齿均会发生不同程度的弹性变形, 使传动系统输入轴转速超前于输出轴. 此外, 当齿轮载荷迅速改变时, 输出转角也不会精确地与输入转角同步. 由于这种偏差十分微小, 因此在许多场合被忽略. 大多数齿轮传动都是以强度准则确定齿轮的工作能力而不进行刚度计算. 但在精密机器和仪表仪器中, 往往需要确定输入轴和输出轴之间准确的转角关系, 以确定传动偏差.

## 1 齿轮轮轴的扭转刚度

传动系统的总刚度取决于轮轴的刚度和齿轮部分的刚度. 传动中, 轴的扭转变形为<sup>[1]</sup>

$$\theta = \frac{T}{GI_p} l \quad \text{或} \quad \theta = \frac{Tl}{GI_p} \quad (1)$$

式中,  $T$  为轴的扭矩 ( $\text{N} \cdot \text{mm}$ );  $l$  为轴受扭矩作用的长度 ( $\text{mm}$ );  $GI_p$  为轴的截面抗扭刚度 ( $\text{MPa} \cdot \text{mm}^4$ ). 轴的扭转刚度为

$$K_j = \frac{GI_{pj}}{l_j} \quad (2)$$

对于输入、输出轴,  $j = 1, 2$ .

## 2 齿轮部分的刚度分析

齿轮部分的刚度取决于系统中每个齿轮轮齿的刚度, 要综合考虑所有齿轮的影响. 假设齿轮系统是由若干个齿轮所组成的串联弹簧, 因此齿轮部分的总刚度为<sup>[2]</sup>

$$K_t = 1 / \sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i} \quad (3)$$

式中,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  为传动装置中齿轮的总数. 因此问题简化为如何确定系统中每个齿轮的刚度  $K_i$ , 以确定齿轮部分的总刚度  $K_t$ .

由齿轮结构所决定, 齿轮轮体的刚度远远高于轮齿的刚度, 因而可将轮齿视为具有变截面的悬臂梁<sup>[3]</sup>, 如图 1 所示.  $A$  点表示齿轮轮心,  $P$  点为齿轮节圆上的啮合点,  $a$  表示齿根高.  $EI_1$  为轮体的抗弯刚度;  $EI_2$  为轮齿的抗弯刚度, 故梁上任意截面的弯矩为

$$M = M_0 \left( 1 - \frac{x}{R} \right) \quad (4)$$

式中,  $M_0$  为齿轮的转矩 ( $\text{N} \cdot \text{mm}$ );  $R$  为齿轮节圆半径 ( $\text{mm}$ ). 根据能量法, 在轮心  $A$  点, 单位弯矩引

本文于 1997 - 04 - 13 收到.