上述理论分析表明，非线性粘弹性梁在周期变化的随动载荷作用下，发生混沌运动前经历了无数次次谐分叉．此时其运动相当于一个参数激励下的非线性振动，即使不考虑外部阻尼的影响（ $R = 0$ ），仍然有可能发生混沌运动．这进一步提示我们，在某些情形下，对结构仅做强度、刚度或稳定性分析是不够的，还必须进行混沌运动的分析，否则相应的数值计算或实验研究也许是毫无意义的．

参 考 文 献

1 Holms P, Marsden J. A partial differential equation with infinitely many periodic orbits: chaotic oscillation of a forced beam. *Arch Rat Mech and Analysis*, 1981, 76(2): 135～165

2 Daniela Dinca Baran. Mathematical models used in studying the chaotic vibration of buckled beam. *Mechanics Research Communications*, 1994, 21(2): 189～196

3 Poddar B, Moon FC, Mukherjee S. Chaotic motion of an elastic - plastic beam. *JAM*, 1988, 55(1): 185～189

4 张年梅，杨桂通．非线性弹性梁的动态次谐分叉与混沌运动．非线性动力学学报，1996，3(2)：265～274

5 韩强，张善元，杨桂通．横向载荷作用下弹性拱的混沌运动．固体力学学报(增刊)，1997，18：67～71

CHAOTIC MOTION OF A NONLINEAR VISCOELASTIC BEAM UNDER A FOLLOWER FORCE

HAN Qiang ZHANG Nianmei YANG Guitong

(Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract In the paper the nonlinear dynamic equation of a beam under a follower force is derived, with the viscoelastic effects taken into account. The Melnikov function method is used to give the critical condition for chaotic motion. A demonstrative example is discussed through the Poincare mapping, phase portrait and time history. Finally the path to chaotic motion is also discussed.

Key words follower force, chaos, Melnikov function, Poincare mapping

非线性动力学方程的精细积分算法

赵秋玲

(北京机械工业学院基础部，北京 100085)

摘要 介绍用精细积分法求解动力学问题的原则和方法，通过实例证明用这种方法求非线性问题数值解的有效性．

关键词 结构动力学，哈密顿体系，精细积分

1 引 言

工程实际中结构动力学问题往往可以在拉格朗日体系下描述为

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + kq = r(t, q, \dot{q}) \tag{1}$$

一般采用数值方法求解．近年来在哈密顿体系下描述和求解动力学问题受到了重视[1,2]．哈密顿体系以广义位移 q 和广义动量 p 二类变量构成全状态向量作为基本未知量，可解决拉格朗日体系下不易处理的问题，例如使微分方程组最大限度地解耦、在数值计算中保持系统能量守恒[2]等．精细积分[1]法是求解该体系下系统微分方程数值解的有效方法．

本文于 1998 - 01 - 08 收到．

2 精细积分算法

在哈密顿体系下，根据哈密顿正则方程[3]得到方程(1)的等价形式

$$\dot{V} = \left\{ \begin{matrix} \tilde{q} \\ p \end{matrix} \right\}^{\cdot} = H(V)\, V + f(t) \tag{2}$$

令

$$H(V) = H_0 + H_1(V)$$

方程(2)化为

$$\dot{V} = H_0 V + [H_1(V) \cdot V + f(t)] \quad (3)$$

其中 H_0 为常数矩阵, 非线性项作为非齐项处理. 在区间 (t_k, t_{k+1}) 内令

$$F = H_1 V + f(t) \approx r_0 + r_1(t - t_k) \quad (4)$$

则

$$V_k = T \times [V_k + H_0^{-1}(r_0 + H_0^{-1} r_1)] - H_0^{-1}(r_0 + H_0^{-1} r_1 + r_1 \tau) \quad (5)$$

其中

$$T = \mathbf{exp}(H_0 \cdot \tau)$$

令

$$\Delta t = \tau / 2^N \qquad (N \text{ 为正整数})$$

取

$$I + T_a = I + H_0 \Delta t + (H_0 \cdot \Delta t)^2 \times [I + (H_0 \cdot \Delta t)/3 + (H_0 \Delta t)^2/12]/2$$

表示对 $\exp(H_0 \cdot \Delta t)$ 进行泰勒展开的前五项, 则

$$T = [\mathbf{exp}(H_0 \cdot \Delta t)]^{2^N} = (I + T_a)^{2^{(N-1)}} \times (I + T_a)^{2^{(N-1)}}$$

这样的分解一直作 N 次, 得到 T 的值. 该过程求 T 误差很小,所以式(5)称为“精细积分”.

用精细积分法求解非线性方程的关键是式(4)的线性化处理, 可采用两种方法:

(i) 显式方法　直接用点斜式方程, 此时有

$$r_0 = F(V_k, t_k), \qquad r_1 = F'(V_k, t_k)$$

用该方法时(5)式可写成

$$V_{k+1} = g(V_k, t_k) \quad (6)$$

由式(6)可直接算出 V_{k+1} 的值.

(ii) 隐式方法　在点斜式方程中, 用 t_k, t_{k+1} 两点函数值计算 $F(t)$ 的导数

$$r_1 = \frac{F(V_k+1, t_k+1) - F(V_k, t_k)}{\tau}$$

此时式(5)可写为

$$V_{k+1} = \tilde{g}(V_k, V_{k+1}, t_k, t_{k+1}) \quad (7)$$

对式(7)可用预报 - 校正法[4]求解, 即

预报　$\overline{V_{k+1}} = g(V_k, t_k)$

校正　$V_{k+1} = \tilde{g}(V_k, \overline{V_{k+1}}, t_k, t_{k+1})$

3　计算实例

研究中空筒内含一弹簧质量系统的复合摆的运动规律(图 1).

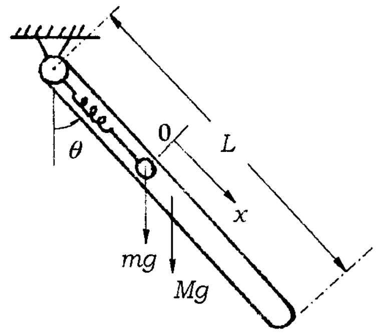

图 1

广义位移 $\begin{cases} x & (\text{快变小变形}) \\ \theta & (\text{慢变大位移}) \end{cases}$ +

p_θ 式中, $I = \frac{1}{3} ML^2$, $J = m(x_0 + \frac{mg}{k} + x)^2$

根据哈密顿正则方程, 写出系统运动方程为

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ p_x \\ \theta \\ p_\theta \end{Bmatrix} = \begin{cases} \frac{p_x}{m} \\ \frac{m(x_0 + \frac{mg}{k} + x)}{(I+J)^2} p_\theta^2 - kx + mg\cos\theta \\ \frac{1}{I+J} p_\theta \\ -\left[\frac{ML}{2} + m\left(x_0 + \frac{mg}{k} + x\right)\right] g\sin\theta \end{cases}$$

令式中 $\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$, 并在系数阵 H_0 中引入近似

$$I + J \approx I + m\left(x_0 + \frac{mg}{k}\right)^2$$

得到形如方程(3)的常系数非齐次方程. 此例中

$$(V)_{4\times1} = (x\ p_x\ \theta\ p_\theta)^T$$

$$(H_0)_{4\times4} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & & 0 \\ -k & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -\left[\frac{ML}{} + m\left(x_0 + \frac{mg}{k}\right.\right. & g \end{pmatrix}$$

$$(F)_{4\times1} = \left(0 \quad \frac{m\left(x_0 + \frac{mg}{k} + x\right)}{(I + J)^2} p_\theta^2 + mg\cos\theta\right)^T$$

用精细积分法求解，取 $N = 10$.

取初值 $x_0 = 0.1\ m$，$\theta_0 = \pi$整数 $p_x(0) = 0$，$p_\theta(0) = 0$ 时，用显式方法，取积分步长 $\tau = 0.01\ s$，得到结果见图 2；用隐式方法，取积分步长 $\tau = 0.02\ s$，得到结果见图 3.

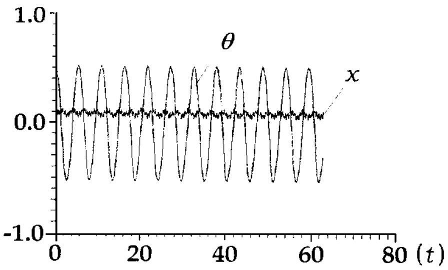

图 2

4 结 论

精细积分算法的主要工作是进行矩阵乘法，这在计算机上很容易实现. 用隐式方法求解要比用显式方法稳定性好. 计算实例表明，精细积分法求非线性方程数值解是有效的.

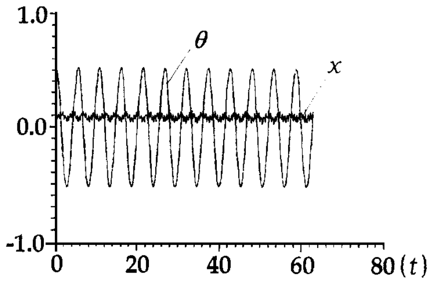

图 3

参 考 文 献

1 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131～135

2 冯康, 秦孟兆. Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法. 自然科学进展, 1994, 1(2)

3 黄昭度等. 分析力学. 北京: 清华大学出版社, 1985. 199～203

4 徐萃薇. 计算方法引论. 北京: 高等教育出版社, 1985. 225～227

AN ACCURATE INTEGRATION METHOD FOR SOLVING NONLINEAR DYNAMICS PROBLEMS

ZHAO Qiuling

(Beijing Institute of Machinery Industry, Beijing 100085, China)

Abstract The Accurate Integration Method for solving nonlinear dynamics problems is introduced. An example of numerical solution of a nonlinear problem proves that this method is valid.

Key words structure dynamics, Hamilton system, accurate integratoinmethod

～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～

(上接第 17 页)

temporal state of stress and strain and their evolution process is analyzed experimentally, the characteristics of its force and deformation are obtained, which may serve a foundation for its plastic analysis.

Key words heated pushing curved tubes, force and deformation