

表1 应力实测值与计算结果比较

测点	座标 (mm)			测试应力 (MPa)	计算应力 (MPa)
	x	y	z		
4#	-48.0	60	832.5	762.1	802.3
5#	-27.5	160	61.5	783.5	735.2
6#	76.0	155	54.0	886.3	832.3
7#	54.0	155	64.5	-2100.1	-2013.1
8#	27.5	155	93.0	-1236.1	-1146.3
9#	275.0	155	11.3	1030.0	1120.9

最大主应力的测试采用3片直角方法。由测得的3个应变 E_1, E_2, E_3 计算出最大主应力及最大主应力方向。从表中可知, 测试结果与计算结果误差小于10%。

4 结论

(1) 从应力和位移计算结果与最大主应力测试结果的比较表明, 该课题力学模型正确合理, 外载荷转化为节点力处理准确。计算结果具有实用价值。

(2) 从图6(a)、(b)、(c)中可以看出, 在开口处存在应力集中。

(3) 从图6(e)、(f)中看出, 顶部变形最大, 最大变形为0.0148 cm, 满足刚度设计要求。

(4) 在2种工况下, 应力分布及静变形均满足设计要求, 应力分布图中所显示的应力集中部分, 是设计中应注意的部位, 为结构设计提供依据。

参 考 文 献

- 1 Edward R. C. Finite Element Analysis in Manufacturing Engineering. New York: McGraw-Hill, inc. 1991. 140~145
- 2 Peeken J. W. Rechnerunterstützte Konstruktion von Maschinenelementen zur Optimierung von Steifigkeit, Festigkeit und Betriebssicherheit hydrodynamischer Gleitlager, dargestellt am Beispiel des Getriebekastens Berlin, Konstruktion 34, 1982. 228~238
- 3 陈贻权, 何福保. 弹性和塑性力学中的有限元法. 北京: 机械工业出版社, 1983. 72~78

(1996年1月31日收到第1稿,
1996年9月6日收到修改稿)

阶梯式变厚度旋转轮盘的应力解析解

王燮山

(华北电力大学, 北京 102206)

摘要 本文应用广义函数导出阶梯式变厚度旋转轮盘的位移微分方程, 用 w 运算符来表述和求解轮盘的位移和应力, 并将此法应用于计算汽轮机轮盘的应力。

关键词 阶梯式轮盘, 旋转, 应力, 解析解

轮盘是机械中常见的零件。为减小离心力、减轻重量和节约材料, 在高速旋转的机械中, 通常将轮盘的厚度设计成随半径呈阶梯式变化。例如汽轮机、燃气轮机中所采用的实际轮盘常常是由若干厚度各不相同的等厚度轮段组成。

由于旋转轮盘的基本微分方程属非线性常微分方程, 因此分段求解是极其繁冗的, 在汽轮机设计中通常采用二次查表解法近似计算^[1]。

本文通过变换将阶梯式变厚度旋转轮盘的基本微分方程化为以参变量表示的线性常微分方程, 然后用初参数和 w 运算符来表述和求解该微分方程, 不论

轮盘划分为若干段, 仅需求解2个初参数即可获得定解, 大大简化了轮盘内任意点的位移和应力的表达及计算。

1 微分方程

图1为由 n 个等厚度轮段组成的轮盘, 各轮段的厚度分别为 $h_i (i=1, 2, \dots, n)$, 轮段衔接处的半径分别为 $r_i (i=1, 2, \dots, n-1)$, 轮盘的内径为 r_0 , 外径为 r_n 。轮盘的密度为 ρ , 弹性模数为 E , 泊松比为 μ , 旋转角速度为 ω 。

变厚度圆盘以角速度 ω 旋转时的平衡方程为^[2]

$$\frac{d}{dr} [h(r)r\sigma_r] - h(r)\sigma_\theta + h(r)\rho r^2\omega^2 = 0 \quad (1)$$

式中, σ_r 为径向应力, σ_θ 为环向应力, $h(r)$ 为圆盘厚度变化函数。

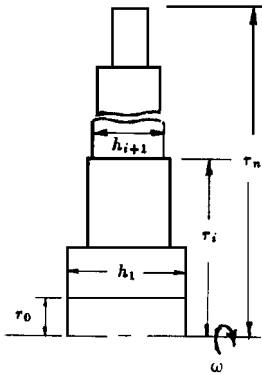


图1

对于轴对称问题, σ_r 、 σ_θ 与径向位移 u 存在如下关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

将式(2)代入(1), 整理后得

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right) \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} = - \frac{1-\mu^2}{E} \rho r \omega^2 \quad (3)$$

引入参变量 t , 并令 $r = e^t$, 或 $t = \ln r$, 则微分方程(3)可变为

$$\frac{d^2u}{dt^2} - u + \left(\frac{du}{dt} + \mu u \right) \frac{r}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} = - \frac{1-\mu^2}{E} \rho e^{3t} \omega^2 \quad (4)$$

对于图1所示的阶梯式变厚度轮盘, 厚度 $h(r)$ 可表为如下阶跃函数

$$h(r) = \sum_{i=1}^n h_i (r - r_{i-1})^0 - (r - r_i)^0 \quad (5)$$

式中, 单位阶跃函数的定义为

$$(r - r_i)^0 = \begin{cases} 0, & r < r_i \\ 1, & r \geq r_i \end{cases}$$

将式(5)代入方程后, 得

$$\frac{d^2u}{dt^2} - u + \left(\frac{du}{dt} + \mu u \right) r \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left((r - r_{i-1})^0 - (r - r_i)^0 \right) \left\{ -h_i \delta(r - r_i) + \sum_{i=2}^n h_i [\delta(r - r_{i-1}) - \delta(r - r_i)] \right\} \right] = - \frac{1-\mu^2}{E} \rho \omega^2 e^{3t} \quad (6)$$

由于 δ 函数具有以下性质^[3]

$$\delta(x - x_i) f(x) = \delta(x - x_i) f(x_i) \quad (7)$$

将式(7)代入式(6), 若将位移函数表为

$$u = \sum_{i=1}^n u_i(t - t_{i-1}) (t - t_{i-1})^0 - (t - t_i)^0 \quad (8)$$

则在满足下列条件下

$$\left. \begin{aligned} h_i \left[\frac{d}{dt} u_i(t - t_{i-1}) + \mu u_i(t - t_{i-1}) \right]_{t=t_i} &= \\ h_{i+1} \left[\frac{d}{dt} u_{i+1}(t - t_i) + \mu u_{i+1}(t - t_i) \right]_{t=t_i} & \\ i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

微分方程(6)可简化为

$$\frac{d^2u}{dt^2} - u = - \frac{1-\mu^2}{E} \rho \omega^2 e^{3t} \quad (9)$$

由式(2)可以看出, 条件(8)的力学意义为: 轮盘各阶梯衔接处的径向应力 σ_r 将产生突变, 突变值的比率为 $\frac{h_i}{h_{i+1}}$

此外, 在轮盘各阶梯衔接处还应满足径向位移连续的条件, 即

$$\left[u_i(t - t_{i-1}) \right]_{t=t_i} = \left[u_{i+1}(t - t_i) \right]_{t=t_i} \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

于是, 求解微分方程(6)就归结为求解满足条件(8)、(10)下的微分方程(9), 此即为阶梯式变厚度旋转轮盘的位移的基本微分方程

2 位移和应力

2.1 位移表达式

满足条件(8)、(10)的微分方程(9)的通解为

$$u = u_0 \sum_{i=1}^n (t - t_{i-1}) \circ (t - t_i) \mathcal{W}^{(i-1)} \cdot \text{ch}(t - t_0) + u_0 \sum_{i=1}^n (t - t_{i-1}) \circ (t - t_i) \mathcal{W}^{(i-1)} \text{sh}(t - t_0) - \frac{A}{8} \left[\sum_{i=1}^n (t - t_{i-1}) \circ (t - t_i) \mathcal{W}^{(i-1)} e^{3t} + \sum_{i=2}^n \left((t - t_{i-1}) \circ (t - t_{i-1}) \mathcal{W}^{(i-1)} e^{3t} + \dots + (t - t_{n-i}) \circ (t - t_{n-i}) \mathcal{W}^{(i-1)} e^{3t} \right) \right] \quad (11)$$

式中, u_0, u_0' 分别为 $t = t_0 = \ln r_0$ 处的径向位移和径向位移变化率; $A = \frac{1-\mu^2}{E} \rho \omega^2$; \mathcal{W} 表示按下列规则运算之算符

$$\mathcal{W} \begin{bmatrix} \text{ch}(t - t_{i-1}) \\ \text{sh}(t - t_{i-1}) \\ e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}(t_i - t_{i-1}) \\ \text{sh}(t_i - t_{i-1}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{h_i}{h_{i-1}} \text{sh}(t_i - t_{i-1}) + \mu \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} - 1 \right) \text{ch}(t_i - t_{i-1}) \\ \frac{h_i}{h_{i-1}} \text{ch}(t_i - t_{i-1}) + \mu \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} - 1 \right) \text{sh}(t_i - t_{i-1}) \\ (3 + \mu) \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} - 1 \right) e^{3t_i} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{ch}(t - t_i) \\ \text{sh}(t - t_i) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

\mathcal{W} 运算符左上角括号内的量表示该运算的次数^[4], 例如 $\mathcal{W}^{(i-1)} = \mathcal{W} \mathcal{W}^{(i-2)}$, 但 $\mathcal{W}^{(0)} = 1, \mathcal{W}^{(1)} = \mathcal{W}$.

将式(11)对 t 求导, 可得 u 关于 t 的变化率

$$\frac{du}{dt} = u_0 \sum_{i=1}^n (t - t_{i-1}) \circ (t - t_i) \mathcal{W}^{(i-1)} \cdot [W^{(i-1)} \text{ch}(t - t_0)] + u_0 \sum_{i=1}^n (t - t_{i-1}) \circ (t - t_i) \mathcal{W}^{(i-1)} \cdot [W^{(i-1)} \text{sh}(t - t_0)] - \frac{A}{8} \left\{ \sum_{i=1}^n (t - t_{i-1}) \circ (t - t_i) \mathcal{W}^{(i-1)} \cdot [W^{(i-1)} e^{3t}] + \sum_{i=2}^n \left((t - t_i) \circ (t - t_{i-1}) \mathcal{W}^{(i-1)} \cdot [W^{(i-2)} e^{3t}] + \dots + (t - t_{n-i}) \circ (t - t_{n-i}) \mathcal{W}^{(i-1)} \cdot [W^{(i-1)} e^{3t}] \right) \right\} \quad (13)$$

2.2 应力表达式

将式(11)、(13)代入式(2), 即可得阶梯式旋转轮

盘的径向和环向应力的表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1-\mu^2)r} \left\{ \frac{du}{dt} + \mu u \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1-\mu^2)r} \left\{ u + \mu \frac{du}{dt} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

在求得 σ_r 后, 可按下式计算 σ_θ

$$\sigma_\theta = \frac{E}{r} u + \mu \sigma_r \quad (15)$$

3 算例

图2所示为国产200 MW 汽轮机中压缸转子的轮盘。轮盘由两个轮段组成(即 $n = 2$), $r_0 = 5 \text{ cm}$, $r_1 = 24.75 \text{ cm}$, $r_2 = 45.7 \text{ cm}$, 厚度 $h_1 = 18.75 \text{ cm}$, $h_2 = 8.6 \text{ cm}$ 。已知轮盘内径处的径向压力为0, 外径处由叶片及轮缘部分产生的离心力 $p = 31.9 \text{ MPa}$ 。汽轮机转子的转速为3000 rpm, 轮盘材料的 $E = 212 \text{ GPa}$, $\mu = 0.3$ 密度 $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 求轮盘的应力

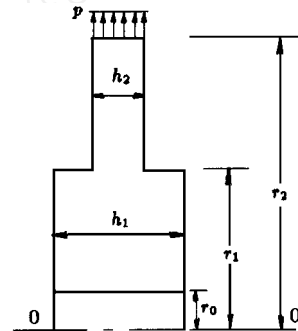


图2

本问题的参数 $t_0 = \ln r_0 = 1.6094$, $t_1 = \ln r_1 = 3.2088$, $t_2 = 3.8221$ 。已知问题的边界条件为:

(1) $t = t_0$ 处, $\sigma_{r0} = 0$, 将此条件代入式(14)的第1式, 得下列方程

$$0.3u_0 + u_0' = 0.1729 \times 10^{-6} \quad (a)$$

(2) $t = t_2$ 处, $\sigma_{r2} = p = 31.9 \text{ MPa}$, 将此条件代入式(14)的第1式, 整理后得下列方程

$$11.0632u_0 + 11.3717u_0' = 229.6193 \times 10^{-6} \quad (b)$$

联立求解方程(a)、(b), 得 $u_0 = 29.7520 \times 10^{-6} \text{ m}$, $u_0' = -8.7527 \times 10^{-6}$ 。

将 u_0, u_0' 代入式(14)、(15)即可得本题轮盘内各点之应力 σ_r, σ_θ , 见表1。为便于比较, 表中列出了按二次算法近似计算所得应力值^[1]。

表1 轮盘的应力值(MPa)

位置 r(mm)		5	15	24.75	30	45	7
本文解	σ_r	0	49.38	41.56	90.61	76.59	31.90
	σ_θ	125.93	67.06	55.27	69.98	69.23	52.47
二次近似解 ^[1]	σ_r	0	49.5	41.4	90.2	76.3	31.9
	σ_θ	126.2	66.6	55.0	69.7	68.9	52.2

参 考 文 献

1 丁有宇, 周宏利, 徐 铸, 刘振田. 汽轮机强度计算. 北京: 水利电力出版社, 1983. 362~ 415

2 Timoshenko S, Goodier J N. Theory of Elasticity, 3rd ed. McGraw-Hill, 1970. §32
 3 Kanwal R P. Generalized Functions. Academic Press, 1983. 20~ 51
 4 王燮山. 奇异函数及其在力学中的应用. 北京: 科学出版社, 1993. 52~ 59
 5 吴厚钰. 透平零件结构和强度计算. 北京: 机械工业出版社, 1983. 127~ 145

(本文于1996年1月12日收到)

工字形截面剪应力计算探讨

黄炳生

(南京建筑工程学院, 南京 210009)

摘要 对工字形截面上最大剪应力精确公式进行简化分析, 提出了剪应力近似公式, 该公式计算方便, 精度较好, 实用性强

关键词 剪应力, 工字形截面, 近似公式

双轴对称工字形截面是钢结构中最常用的截面形式之一. 在弯矩和剪力共同作用下, 截面上最大剪应力 τ_{max} 发生在腹板中部. 根据材料力学, 精确计算公式为

$$\tau_{max} = \frac{V S_{max}}{I_x t_w} \quad (1)$$

此式需计算截面面积矩 S_{max} 和惯性矩 I_x , 而 S_{max} 、 I_x 的计算较繁琐, 同时 S_{max} 、 I_x 与截面各部分尺寸之间不是简单的线性关系, 结构设计中不便于根据剪力选择截面尺寸. 因此钢结构中, 在初选腹板尺寸时采用近似公式, 有时工程上为计算方便, 截面验算时也采用近似公式. 但各教材计算式不一致, 归纳起来有3种

$$\tau_{max} = \frac{V}{A \omega} \quad (2)$$

$$\tau_{max} = 1.2 \frac{V}{A \omega} \quad (3)$$

$$\text{和 } \tau_{max} = 1.5 \frac{V}{A \omega} \quad (4)$$

式中 $A \omega$ 为腹板面积

式(2)用腹板承受剪力的平均剪应力代替截面上最大剪应力; 式(4)假定忽略翼缘抗剪作用, 剪力全部由腹板承受, 根据矩形截面的最大剪应力为平均剪应力的1.5倍而得到. 显然式(3)值介于式(2)和式(4)之间. 事实上, 翼缘也承担部分剪力, 用哪个计算式较合适, 精确度较好呢?

如图1所示工字形截面其惯性矩 I_x 和面积矩 S_{max} 为

$$I_x = \frac{1}{12} t d h_0^3 + \frac{1}{12} b t^3 + 2 b t \left(\frac{h_0 + t}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} t d h_0^3 + \frac{1}{2} b t h_0^2$$

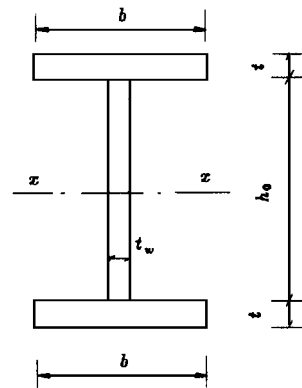


图1