力和应力的旋转变换

干　洪
(安徽建筑工业学院，合肥　230022)

摘要　本文对力学和结构分析的教学中，常涉及到力和应力的旋转变换等内容，提出新的教学思路

关键词　力向量，应力分量，旋转变换

力矢作为向量，遵循数学上向量的旋转变换规律[1]，三维空间或二维平面中点的应力状态均构成二阶对称张量，张量的旋转变换也遵循一定的数学规律，这种数学规律也是可以借助向量的旋转变换知识予以剖析的[2]　关键在于如何将学生学过的基础知识连贯起来，根据力学模型特点，建立相应的数学模型并弄清二者的内在联系，以直接引用数学结论，达到顺水推舟事半功倍的效果

斜杆和曲杆上的内力分析

对于图1、图2所示的斜杆和曲杆(如拱)的内力计算问题，教材的处理是根据力的投影关系进行计算，较为繁琐，导出的结果也不易记忆，练习时学生常常弄错　其实这类问题可由向量的旋转变换直接得到结果　为此，首先回顾平面内向量的直角坐标旋转变换式

$$\{x'\} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [T]\{x\} \tag{1}$$

这里$\{x'\}= [x'\ y']^T$，$\{x\}= [x\ y]^T$ 分别为某点在新、旧直角坐标系中的坐标向量，α为新系对于旧系的旋转角，$[T]$即为旋转变换矩阵　在此基础上，分析图1所示三铰刚架ABC的A 支座，反力(外力)H_A、V_A 构成合力矢 R_A，即$\{R_A\} = [H_A\ V_A]^T$．如求该截面内力N_{AB}、Q_{AB}，亦可将其看成是隔离体AB 段A 端的外力，构成合力矢R'_A，即$\{R'_A\}= [N_{AB}\ Q_{AB}]$，这二个合力矢，其实均代表隔离体的$A$ 端外力，只不过我们是从不同的截面方位观察所得到的不同表现形式而已　建立起坐标系的概念，实际上是在两个相对旋转的坐标系中考虑同一个力矢，该力矢当然满足坐标系旋转的向量变换规律　这样，求截面A 的内力N_{AB}和Q_{AB}，只要分别建立图示的两个直角坐标系，其中新坐标系$Ax'y'$(未知力沿其轴向)相对于旧坐标系Axy(已知力

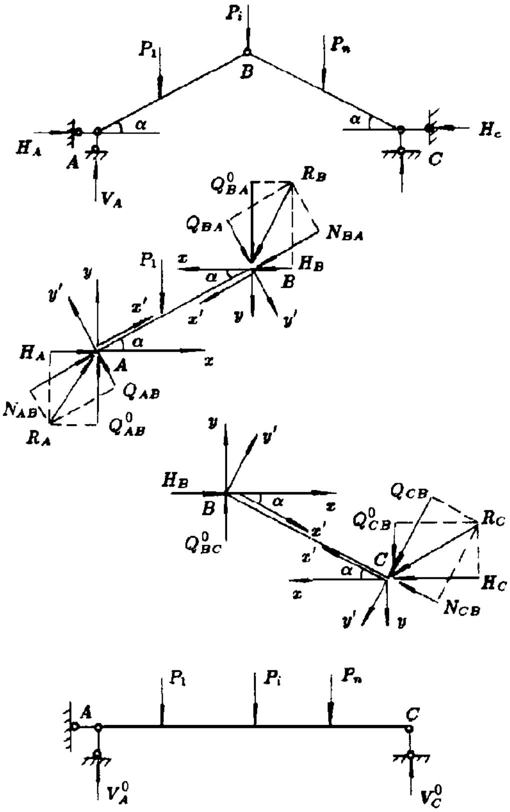

图1　斜杆上的内力计算

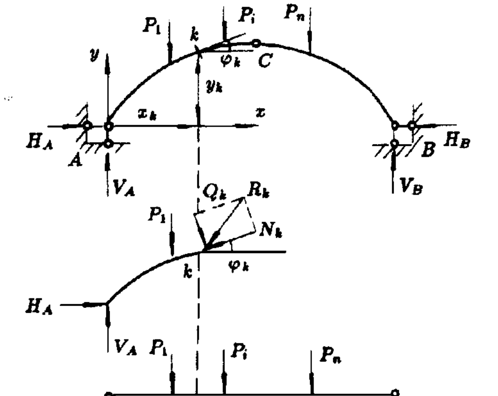

图2　拱的内力计算

沿其轴向)的转角即为杆轴倾角 α,便可根据向量的旋转变换公式(1)直接求出

$$\{R_A'\} = [T]\{R_A\} \tag{2}$$

亦即

$$\begin{Bmatrix} N_{AB} \\ Q_{AB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_A \\ Q_{AB}^0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

上式中 $Q_{AB}^0 = V_A$ 为相应简支梁截面 A 的剪力. 对于 AB 杆 B 截面的内力 N_{BA}、Q_{BA} 的求法,仍可设置相应的坐标系 Bxy、$Bx'y'$ 如图1所示,且主矢 R_B 在旧坐标系 Bxy 中的二个分量极易看出

$$\left.\begin{aligned} H_B &= H_A \\ Q_{BA}^0 &= V_A - P_1 = Q_{AB}^0 - P_1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

仍由向量的旋转变换式(1),直接得到

$$\{R_B'\} = [T]\{R_B\} \tag{5}$$

亦即

$$\begin{Bmatrix} N_{BA} \\ Q_{BA} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_B \\ Q_{AB}^0 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

其它截面的内力计算可如法进行,不再赘述. 将(3)或(6)式展开,便与教材所导出的公式完全一致,但这里推导过程简单,原理明确,极其易懂,的确起到事半功倍的效果. 至于曲杆的内力计算,如求图2所示拱的任一截面 k 的轴力和剪力,可同样依(3)式或(6)式进行,只需将式中 α 角换成 k 截面拱轴切线倾角 φ_k 即可.

2 应力分量的旋转变换

为简单起见,本文仅讨论平面问题的应力分析,其过程和结论不难推广到三维情形.

设弹性体 A 点的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx} = \tau_{xy}$ 为已知,坐标系 Oxy 旋转 α 角后生成新坐标系 $Ox'y'$,求该点在新系中的应力分量 $\sigma_x', \sigma_y', \tau_{yx}' = \tau_{xy}'$. 为此,取斜截面 BC 的法线与 x 轴同向如图3所示,该斜截面上的应力向量定义为 p_x',其沿旧坐标轴 x, y 方向上的分量为 p_{xx}', p_{yx}',即

$$p_x' = \{p_x'\} = [p_{xx}' \ p_{yx}']^T \tag{7}$$

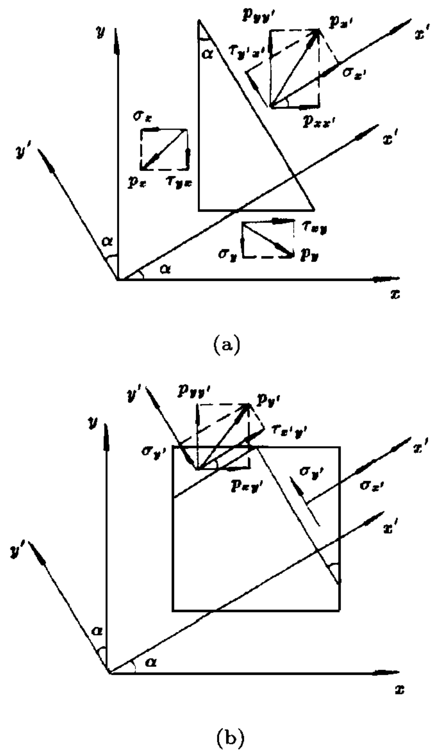

图3 斜截面上的应力

且这二个分量可由图示微元体 ABC 的平衡条件求出,如由 $\sum F_x = 0$ 即可得到(过程从略)

$$p_{xx}' = \sigma_x\cos\alpha + \tau_{yx}\sin\alpha = \{p_x\}^T\{e_1\} \tag{8}$$

式中 p_x 为旧坐标系 x 面上的应力向量

$$p_x = \{p_x\} = [\sigma_x \ \ \tau_{yx}]^T \tag{9}$$

$\{e_1\}$ 为 x 轴关于旧坐标轴的方向余弦

$$\{e_1\} = [\cos\alpha \ \sin\alpha]^T \tag{10}$$

同理,由平衡条件 $\sum F_y = 0$ 可求得

$$p_{yx}' = \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\sin\alpha = \{p_y\}^T\{e_1\} \tag{11}$$

这里 p_y 为旧坐标系 y 面上的应力向量

$$p_y = \{p_y\} = [\tau_{xy} \ \sigma_y]^T \tag{12}$$

由(8)、(11)式，即可将斜截面BC(即x'面)上的应力向量$\{p_{x'}\}$写成

$$\{p_{x'}\} = \begin{Bmatrix} p_{xx'} \\ p_{yx'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} = [\sigma]\{e_1\} \tag{13}$$

上式中$[\sigma]$即为平面问题的应力张量矩阵. 同样亦可求出y'面上的应力向量(图3)

$$\{p_{y'}\} = [p_{xy'}\ p_{yy'}]^T = [\sigma]\{e_2\} \tag{14}$$

式中$\{e_2\}$为y'轴关于x、y轴的方向余弦

$$\{e_2\} = [-\sin\alpha \quad \cos\alpha]^T \tag{15}$$

(13)、(14)式即为两正交斜截面(即新坐标系的x'面与y'面)上的应力向量按已知应力分量的坐标轴(即x轴与y轴)进行分解的公式. 很显然，若将这二个应力向量分别沿所在截面的法向和切向进行分解，即为该截面的正应力和剪应力(图3)，这实际上仍是向量(只不过这里是应力向量)的旋转变换概念. 因此，对于斜截面上的应力分量便无需再作投影计算了. 例如对于x'面上的正应力$\sigma_{x'}$和剪应力$\tau_{y'x'}$，利用向量的旋转变换公式(1)可直接得到

$$\{p'_{x'}\} = [\sigma_{x'} \quad \tau_{y'x'}] = [T]\{p_{x'}\} \tag{16}$$

式中$[T]$即为(1)式中的旋转变换矩阵. 在上式中代入(13)式，并写成分量形式就有

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \{e_1\}^T\{p_{x'}\} = \{e_1\}^T[\sigma]\{e_1\} \\ \tau_{y'x'} &= \{e_2\}^T\{p_{x'}\} = \{e_2\}^T[\sigma]\{e_1\} \end{aligned} \tag{17}$$

同理可对应力向量$\{p_{y'}\}$进行旋转变换，并写成分量形式

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= \{e_1\}^T\{p_{y'}\} = \{e_1\}^T[\sigma]\{e_2\} \\ \sigma_{y'} &= \{e_2\}^T\{p_{y'}\} = \{e_2\}^T[\sigma]\{e_2\} \end{aligned} \tag{18}$$

式(17)、(18)即为弹性体平面问题应力分量的旋转变换公式，如将其展开，便与有关教材所给出的结果一样. 上述公式也极易记忆：例如，求旋转变换后某截面在某方向上的应力分量，只要将拟求应力分量的下标所对应的方向余弦列阵夹乘应力张量矩阵即得. 顺便提及，若将(17)、(18)式合起来写成矩阵形式，便得到二阶应力张量的旋转变换公式

$$[\sigma'] = [T]^T[\sigma][T] \tag{19}$$

但这里的推导过程概念明确、简单易懂.

参 考 文 献

1 赵超燮. 结构矩阵分析原理. 北京：人民教育出版社，1983

2 曹富新. 力学中的张量计算. 北京：中国铁道出版社，1985

(1995年4月20日收到第1稿，1995年9月18日收到修改稿)

纵横弯曲时临界压力的能量准则

张仲毅

(华中理工大学汉口分校，汉口 430012)

摘要 本文对把纵横弯曲时使弯曲变形趋于无限的轴向压力定义为临界压力的思想提出商榷.

关键词 临界压力，能量准则

文献[1]、[2]把纵横弯曲时使弯曲变形趋于无限的轴向压力定义为临界压力. 笔者认为这种定义值得商榷. 因为这种定义丝毫看不出横向力对临界压力的影响，无论横向力多大临界压力都是同一个值，都等于无横向力时的杆的欧拉力. 为了说明其不合理，下面列举一种情况说明. 设想横向力已经达到仅有横向力作用时的极限值，因为这种极限值总是存在的，按目前的定义其临界压力依然是欧拉力. 这完全是不可