

# 输液管道临界流速的傅里叶级数法

王克林 刘俊卿

(西安建筑科技大学理学院, 西安 710055)

**摘要** 傅里叶级数法被用于计算输液管道的临界流速, 与有限元等数值法相比, 更为简单可靠。

**关键词** 输液管道, 傅里叶级数, 临界流速

输液管道的振动和稳定问题, 不仅有较高的理论研究价值, 而且有着广泛的工程应用前景, 文献 [1] 中有详尽的论述. 文献 [2,3] 利用有限元等方法计算输液管道的临界流速问题, 但在形成矩阵时要作大量的数值计算, 计算时间长. 此外由于不能保证位移函数及其各阶导数的连续性, 因此计算精度差. 傅里叶级数被广泛用于各种数值计算问题中. 王克林等 [4~6] 将其用于弹性支承的梁、板的静力、振动和稳定分析, 得到了许多良好的结果. 本文将它推广到分析输液管道的稳定问题中去.

## 1 控制方程

输液管道的线性运动方程为 [1]

$$EI \frac{\partial W}{\partial x} + MU^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + (M+m) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中  $EI$  为管的抗弯刚度,  $M$  和  $m$  分别为液体和管道单位长度的质量,  $U = \text{常数}$ , 为流体流速,  $W(x, t)$  为管道的挠度. 设  $W(x, t) = \bar{W}(x) \exp(\omega t)$ , 代入方程 (1) 并无量纲化, 得

$$w_{,\xi\xi\xi\xi} + u^2 w_{,\xi\xi} + 2u\sqrt{\beta}\Omega w_{,\xi} + \Omega^2 w = 0 \quad (2)$$

式中,  $\xi = x/L$ ,  $w = \bar{W}/L$ ,  $\Omega = \omega\sqrt{EI/(M+m)}/L^2$ ,  $u = UL\sqrt{M/EI}$ ,  $\beta = M/(M+m)$ . 弹性支承的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 w_{,\xi}(0) - w_{,\xi\xi}(0) = 0, \quad k_1 w(0) + w_{,\xi\xi\xi}(0) = 0 \\ \phi_2 w_{,\xi}(1) + w_{,\xi\xi}(1) = 0, \quad k_2 w(1) - w_{,\xi\xi\xi}(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中  $\phi$  和  $k$  分别是无量纲角位移刚度和线位移刚度.

## 2 傅里叶级数解

$w$  可分解为关于  $\xi = 1/2$  对称的  $w^s$  和关于  $\xi = 1/2$  反对称的  $w^a$ , 设

$$\left. \begin{aligned} w^s &= \sum_{m=1,3,\dots} w_m^s \sin m\pi\xi \\ w^a &= \sum_{m=1,3,\dots} w_m^a \cos m\pi\xi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

并设其部分边界值为

$$\begin{aligned} w^s(0) &= w^s(1) = -\frac{a}{4} \\ w_{,\xi\xi}^s(0) &= w_{,\xi\xi}^s(1) = -\frac{b}{4} \\ w_{,\xi}^a(0) &= w_{,\xi}^a(1) = -\frac{c}{4} \\ w_{,\xi\xi\xi}^a(0) &= w_{,\xi\xi\xi}^a(1) = -\frac{d}{4} \end{aligned}$$

因为,  $w^s$  和  $w^a$  和 / 或其某些导数在边界处不连续, 所以其某些导数不能用逐项微分求得, 根据文献 [4~6] 得

$$\begin{aligned} w_{,\xi}^s &= \sum_{m=1,3,\dots} (a + m\pi w_m^s) \cos m\pi\xi \\ w_{,\xi\xi\xi}^s &= \sum_{m=1,3,\dots} [-(m\pi)^2 a + b - (m\pi)^3 w_m^s] \cos m\pi\xi \\ w_{,\xi\xi}^a &= \sum_{m=1,3,\dots} [c - (m\pi)^2 w_m^a] \cos m\pi\xi \\ w_{,\xi\xi\xi\xi}^a &= \sum_{m=1,3,\dots} [-(m\pi)^2 c + d + (m\pi)^4 w_m^a] \cos m\pi\xi \end{aligned}$$

其它导数可分别由以上各式逐项微分一次求得. 由边界条件 (3) 得

$$\begin{aligned} -\frac{d}{4} + \sum_{m=1,3,\dots} [-(m\pi)^2 a + b - (m\pi) w_m^s] + \\ k_1 \left( \frac{a}{4} + \sum_{m=1,3,\dots} w_m^a \right) = 0 \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{4} - \sum_{m=1,3,\dots} [-(m\pi)^2 a + b - (m\pi) w_m^s] - \\ k_2 \left( \frac{a}{4} - \sum_{m=1,3,\dots} w_m^a \right) = 0 \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} -\frac{b}{4} + \sum_{m=1,3,\dots} [c - (m\pi)^2 w_m^a] - \\ \phi_1 \left( -\frac{c}{4} + \sum_{m=1,3,\dots} (a + m\pi w_m^s) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5c)$$

$$\begin{aligned} -\frac{b}{4} + \sum_{m=1,3,\dots} [-c + (m\pi)^2 w_m^a] + \\ \phi_2 \left( -\frac{c}{4} - \sum_{m=1,3,\dots} (a + m\pi w_m^s) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5d)$$

由微分方程 (2) 得

$$\left. \begin{aligned} & [(m\pi)^4 - u^2(m\pi)^2 + \Omega^2]w_m^s + [(m\pi)^3 - \\ & \quad u^2m\pi]a - m\pi b - 2u\sqrt{\beta}\Omega m\pi w_m^a = 0 \\ & [(m\pi)^4 - u^2(m\pi)^2 + \Omega^2]w_m^a + [-(m\pi)^2 + u^2]c + \\ & \quad d + 2u\sqrt{\beta}\Omega(a + m\pi w_m^s) = 0 \\ & \quad m = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \right\} (6)$$

如果级数 (4) 各取  $M$  项, 则由式 (5) 得

$$\{a\} = [A]\{w\} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \{a\} &= [a, b, c, d]^T \\ \{w\} &= [w_1^s, w_3^s, \dots, w_{2M-1}^s, w_1^a, w_3^a, \dots, w_{2M-1}^a]^T \end{aligned}$$

把式 (7) 代入式 (6) 消去  $a, b, c$  和  $d$ , 得

$$(\Omega^2[I] + \Omega[G] + [K])\{w\} = \{0\} \quad (8)$$

方程 (8) 构成了广义特征值问题。

### 3 计算结果

为了验证本法的收敛性和正确性, 计算悬臂梁的临界流速. 取  $\beta = 0.2, k_1 = \varphi_1 = 10^5, k_2 = \varphi_2 = 0$ . 计算结果见表 1. 取  $\beta = 0.3, k_1 = \varphi_1 = 10^5, k_2 = 20, \varphi_2 = 0$ . 计算结果见表 2.

表 1 无量纲流速 (振颤失稳) 的比较

模态	项数			文献 [3]
	10	20	40	
第二阶	5.5380	5.5670	5.5796	5.583
第四阶	12.219	12.125	12.077	13.316

表 2 无量纲流速 (振颤失稳) 的比较

模态	项数			文献 [3]
	10	20	40	
第二阶	7.6509	7.6107	7.5910	7.4
第四阶	12.189	12.118	12.083	15.3

第二阶模态与文献 [3] 接近, 而第四阶差别比较大. 作者认为高阶模态振型的波数多, 如图 1 所示, 对数值算法来说应取更多的结点, 才能保证位移及其高阶导数的连续性. 本文的方法除端点外位移及其高阶导数都是连续的. 另外级数解可以认为是微分方程的精确解, 因此本文的解有较高的精度, 特别是高阶模态比数值算法更为精确. 图 2 是第二阶模态的临界流速与约束刚度变化曲线, 其中的实线是取  $\beta = 0.3, k_1 = 10^5, k_2 = 20, \varphi_2 = 0$  时, 临界流速  $u_c$  与转动刚度  $\varphi_1$  变化关系, 虚线是取  $\beta = 0.2, k_1 = 10^5, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 10^5$  时, 临界流速  $u_c$  与横向位移刚度  $k_2$  变化关系.

从图中可以看出当无量纲刚度大于 100 时, 临界流速的变化已经不大, 大于 1000 时, 已经接近刚性支承. 由于本算法简单, 所以编制计算程序很容易, 本文用 MATLAB 编的程序仅 50 多行. 因为生成求解特征值与特征向量的矩阵的运算非常简单, 所以计算时间几乎完全用于求解特征值与特征向量. 而数值解法生成求解特征值与特征向量的矩阵的运算比本文的算法复杂得多, 生成此矩阵花费的时间也要多得多. 因为傅里叶级数收敛性比较差, 所以需要取较多的项数, 这样使得求解特征值与特征向量的矩阵的阶数增大, 这是一个缺点.

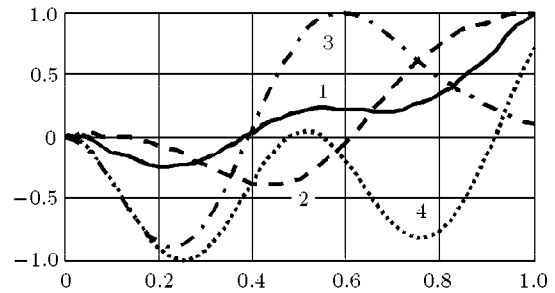


图 1  $u_c = 12.077$  悬臂输液管道的振型 ( $\beta = 0.2$ )

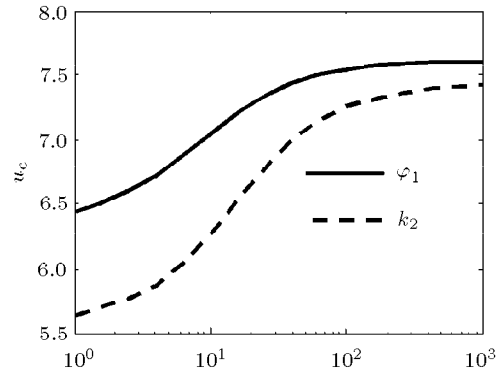


图 2 临界流速  $u_c$  与约束刚度变化关系

以前的文献只把位移展成正弦级数或余弦级数, 这样只适宜于只有偶阶导数的问题. 本文把位移按对称性分解, 把对称的展成正弦, 而把反对称的展成余弦, 使其能解有偶次阶和奇次阶导数混合的问题, 这是本文的最大特点.

### 参 考 文 献

- 1 黄玉盈等. 输液管的非线性振动、分岔与混沌 —— 现状与展望. 力学进展, 1998, 28(1): 30~42
- 2 Paidoussis MP, Li GX. Pipes conveying fluid: a model dynamical problems. *J Flu & Stru*, 1993, 8: 853~876
- 3 倪樵等. 微分求积法分析具有弹性支承输液管的临界流速. 计算力学学报, 2001, 16(2): 146~149
- 4 王克林. 铁摩辛科梁的动态稳定. 力学与实践, 1993, 15(3): 39~41
- 5 王克林, 刘俊卿. 自由正交异性矩形厚板的动态稳定. 力学季刊, 2002, 23(2): 236~240
- 6 王克林, 刘俊卿. 变系数曲线支承矩形正交异性厚板的屈曲. 固体力学学报, 2002, 23(专辑): 192~198

**FOURIER SERIES METHOD FOR  
CRITICAL FLOW VELOCITY OF PIPES  
CONVEYING FLUID**

WANG Kelin LIU Junqing

(Xi'an Univ of Architecture & Technology, Xi'an 710055,  
China)

**Abstract** A method of Fourier series is proposed to calculate the critical flow velocity of pipes conveying fluid. The comparison of the results using this method and the finite element analysis indicates that the method is simple and valid.

**Key words** pipes conveying fluid, Fourier series, critical velocity