

从非线性动力学的视角认识细长压杆的稳定性¹⁾

陈占清

孙明贵

李天诊

(中国矿业大学, 徐州 221008)

(安徽理工大学, 淮南 232000)

(徐州工程学院, 徐州 221008)

摘要 工程上大部分机构和结构都处于动载的作用下, 受压细长杆的失稳是复杂的动力破坏事件. 应用 Lagrange 描述法建立了两端角铰支受压细长杆的非线性动力学模型, 通过对这种模型简化分别得到非线性静力学模型、线性动力学模型和含三次非线性项的动力学模型. 利用谱截断方法, 讨论了线性动力学模型的局部分岔. 通过讨论平衡态存在性和稳定性, 得到了含三次非线性项的动力学模型分岔条件. 研究表明, 受压细长杆的非线性动力学模型中存在叉形分岔.

关键词 Lagrange 描述法, Euler 描述法, 受压细长杆, 分岔, 稳定性

1 引言

受压细长杆的稳定性是静学分岔的典型实例^[1]. 日前发表的文献, 大多是从线性或非线性的静力学的视角对受压细长杆的稳定性展开讨论的^[2~6]. 究其原因, 文献的作者们以实验室中实验现象为研究问题的出发点并作为验证其研究结果正确与否的标准. 然而, 工程上大部分机构和结构都处于动载的作用下, 受压细长杆的失稳是复杂的动力破坏事件. 因此, 从动力学视角讨论受压细长杆的稳定性, 具有不容置疑的意义.

2 细长压杆的动力学模型及其简化

采用 Lagrange 描述法(图 1). 考虑两端铰支的受压细长杆, 参考位形为沿 x 轴的直线 AB . 在参考位形上任取一点 Z (它与端点 A 距离为 x , $x \in [0, l]$), 对应着当前位形的 Z' , 用 u_1 和 u_2 分别表示点 Z 在 x 和 y 方向的位移. 参考位形上长度为 dx 的微段 ZZ_1 , 对应着当前位形的微段 ($Z'Z'_1$), 该微段在 x, y 轴的投影分别为

$$(ds)_x = \left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) dx \quad (1)$$

$$(ds)_y = \frac{\partial u_2}{\partial x} dx \quad (2)$$

杆件的变形包括弯曲和轴向压缩两部分, 当忽略轴向压缩变形时, 杆件的轴线不伸缩, 故任意微段的长度保持不变, 即

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2} dx = dx \quad (3)$$

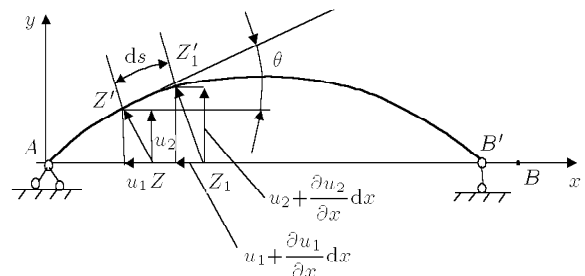


图 1 受压细长杆的 Lagrange 描述

变形后微段与 x 轴的夹角为

$$\theta = \arcsin \frac{(ds)_y}{ds} = \arcsin \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \sin \theta \quad (5)$$

考虑图 2 所示微段的平衡, 可以得到

$$\begin{aligned} N - \left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx\right) \cos \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} dx\right) + \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx\right) \cdot \\ \sin \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} dx\right) + (m\ddot{u}_1 \cos \theta - m\ddot{u}_2 \sin \theta) dx = 0 \\ Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx\right) \cos \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} dx\right) - \left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx\right) \cdot \\ \sin \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} dx\right) - (m\ddot{u}_1 \sin \theta + m\ddot{u}_2 \cos \theta) dx = 0 \\ \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx\right) - M - Q dx - m(\ddot{u}_1 \sin \theta + \\ m\ddot{u}_2 \cos \theta) dx \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

2004-02-17 收到第 1 稿, 2004-11-01 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金重大项目 (50490270), 国家杰出青年基金 (50225414), 江苏省自然科学基金 (13K2002114) 和教育部博士点基金 (20010290003) 资助.

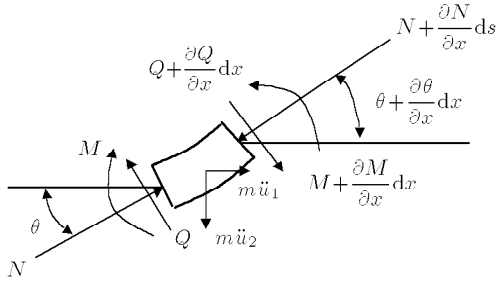


图 2 微段的受力分析

其中 m 为质量线密度, 化简后, 得到

$$\frac{\partial N}{\partial x} = Q \frac{\partial \theta}{\partial x} + m\ddot{u}_1 \cos \theta - m\ddot{u}_2 \sin \theta \quad (6)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -N \frac{\partial \theta}{\partial x} - m\ddot{u}_1 \sin \theta - m\ddot{u}_2 \cos \theta \quad (7)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q \quad (8)$$

考虑图 3 所示杆段 AZ' 的平衡, 可以得到

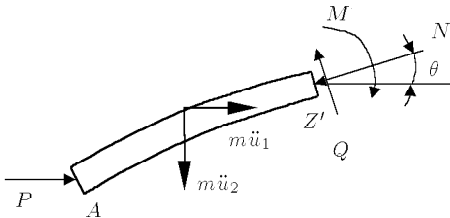
$$N = P \cos \theta + \int_0^x m(\ddot{u}_1 \cos \theta - \ddot{u}_2 \sin \theta) d\xi$$

$$Q = -P \sin \theta - \int_0^x m(\ddot{u}_1 \sin \theta + \ddot{u}_2 \cos \theta) d\xi$$

将以上两式对 x 求偏导, 并与式 (7) 和 (8) 比较, 得到

$$N = P \cos \theta \quad (9)$$

$$Q = -P \sin \theta \quad (10)$$

图 3 杆段 AZ' 的受力分析

假设杆在弯曲过程中服从平面假设, 则有

$$M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (11)$$

式 (11) 代入式 (8), 得到

$$Q = EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (12)$$

式 (9) 和式 (12) 代入式 (7), 得到

$$EI \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} = -P \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - m\ddot{u}_1 \sin \theta - m\ddot{u}_2 \cos \theta \quad (13)$$

式 (9) 和式 (10) 代入式 (6), 得到

$$\frac{\partial(P \cos \theta)}{\partial x} = -P \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + m\ddot{u}_1 \cos \theta - m\ddot{u}_2 \sin \theta$$

即

$$m\ddot{u}_1 \cos \theta - m\ddot{u}_2 \sin \theta = 0 \quad (14)$$

由式 (14), 式 (13) 消去变量 u_1 , 得到

$$m\ddot{u}_2 = -EI \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{P}{EI} \sin \theta \right) \quad (15)$$

在式 (15) 两边对 x 求偏导数, 并利用式 (5), 得到

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sin \theta = EI \sin \theta \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} - EI \cos \theta \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + P \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - P \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (16)$$

将式 (4) 代入式 (16), 得到

$$EI \left[\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + 3 \frac{\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x}}{1 - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2} + 3 \frac{\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right]^2} + \frac{\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^3}{1 - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2} \right] + P \left(1 - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + m\ddot{u}_2 = 0 \quad (17)$$

方程 (16) 或 (17) 就是细长压杆的非线性动力学模型, 以下讨论将围绕式 (16) 或式 (17) 展开。

3 静力学模型

当 $\ddot{u}_2 \equiv 0$ 时, 由式 (15) 可以得到静力学模型

$$EI \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{P}{EI} \sin \theta \right] = 0 \quad (18)$$

注意到 $\theta|_{x=l/2} = 0$, $\frac{d^2 \theta}{dx^2}|_{x=l/2} = \frac{Q|_{x=l/2}}{EI} = 0$, 对式 (18) 积分, 可以得到

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{P}{EI} \sin \theta = 0 \quad (19)$$

式 (19) 即为 Euler 压杆弯曲公式^[1], 当 $\sin \theta$ 用 θ 近似地表示时, 得到线性静力学模型。

模型 (19) 的分岔条件详细讨论见文献 [1]。文献 [7] 利用方程 (19) 与单摆运动微分方程的相似性, 用相平面的方法讨论了非线性静力学模型 (19) 的稳定性和分岔, 本文不予赞同。因为模型 (19) 与单摆运动微分方程中变量的取值范围大不相同, 在单摆运动微分方程中, 自变量 t 的取值范围为 $[0, +\infty)$, θ 的取值范围是 $[0, 2\pi)$, 也可以认为是 $[0, +\infty)$; 而在

模型(19)中, x 的取值范围是有限区间 $[0, l]$, 而 θ 的幅值很小, 在 $\theta - \frac{d\theta}{dx}$ 相平面中不可能有封闭的曲线(中心).

4 线性动力学模型

当忽略了方程(17)的非线性项时, 得到线性动力学模型

$$m\ddot{u}_2 = -EI \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (20)$$

将式(20)的解写成谱截断的形式

$$u_2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (21)$$

式(21)代入式(20), 得到

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \left[EI \left(\frac{j\pi}{l} \right)^4 - P \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right] \alpha_j(t) + m \ddot{\alpha}_j(t) \right\} \sin \frac{j\pi x}{l} = 0 \quad (22)$$

分别以 $\sin \frac{k\pi x}{l}, k=1, 2, \dots, n$ 乘上式, 并对 x 在区间 $[0, l]$ 上积分, 得到

$$\left. \begin{aligned} \left[EI \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 - P \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] \alpha_k(t) + m \ddot{\alpha}_k(t) = 0 \\ k = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

令 $\mu_k = \left[EI \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 - P \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] / m$, 有

$$\mu_k \alpha_k(t) + \ddot{\alpha}_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (24)$$

记 $\alpha_{k1} = \alpha_k, \alpha_{k2} = \dot{\alpha}_k$, 得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_{k1} &= \alpha_{k2} \\ \dot{\alpha}_{k2} &= -\mu_k \alpha_{k1} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

方程组(25)的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\mu_k & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \mu_k = 0$$

特征值为 $\lambda = \pm \sqrt{-\mu_k}$, 故 $\mu_k = 0$ 是分岔条件, 特别是当 $k=1$ 时, 有

$$P = EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^2$$

这就是受压细长杆的失稳条件.

5 简化的非线性动力学模型

当忽略方程(18)中三次以上的非线性项时, 方程(18)可简化成

$$m\ddot{u}_2 + EI \left[\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + 3 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^3 \right] + P \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0 \quad (26)$$

利用谱截断法, 取试函数

$$u = \beta(t) l \sin \frac{\pi x}{l} \quad (27)$$

将式(27)代入式(26), 并在方程两边乘以 $\sin \frac{\pi x}{l}$, 然后在区间 $[0, l]$ 上积分, 得到

$$\ddot{\beta} = -\frac{1}{m} \left[EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 - P \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \right] \beta - \frac{l^2}{m} \left[\frac{3}{4} EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^6 - \frac{1}{8} P \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \right] \beta^3 \quad (28)$$

引入记号

$$\xi = \frac{EI}{m} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4, \quad \eta = \frac{EI l^2}{8m} \left(\frac{\pi}{l} \right)^6, \quad \varsigma = \frac{P}{EI} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \quad (29)$$

有

$$\ddot{\beta} = -[\xi(1-\varsigma)\beta + \eta(6-\varsigma)\beta^3] \quad (30)$$

显然, $\xi > 0, \eta > 0, \varsigma > 0$. 可见, 当 $\varsigma < 1$ 时, 即 $P < \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ 时, 方程(30)只有唯一的平衡态 $\beta = 0$,

而当 $1 < \xi < 6$ 时, 系统有3个平衡态, 分别为:

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = \sqrt{\frac{\xi(\varsigma-1)}{\eta(6-\varsigma)}} \text{ 和 } \beta_3 = -\sqrt{\frac{\xi(\varsigma-1)}{\eta(6-\varsigma)}}. \text{ 容易}$$

判别, 当 $\varsigma < 1$ 时, 平衡态 $\beta = 0$ 是稳定的; 当 $\varsigma > 1$ 时, 平衡态 $\beta = 0$ 变得不稳定, 而分支出两个新平衡态

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{\xi(\varsigma-1)}{\eta(6-\varsigma)}} = \sqrt{\frac{8}{\pi^2} \frac{Pl^2}{\pi^2 EI} - 1}$$

和

$$\beta_3 = -\sqrt{\frac{\xi(\varsigma-1)}{\eta(6-\varsigma)}} = -\sqrt{\frac{8}{\pi^2} \frac{Pl^2}{\pi^2 EI} - 1}$$

系统(30)在平衡态 $\beta = \beta_2$ 和 $\beta = \beta_3$ 的扰动方程为

$$\ddot{\beta} = -[\xi(1-\varsigma) + 3\beta_2^2 \eta(6-\varsigma)]\beta = -2\xi(\varsigma-1)\beta$$

可见平衡态 $\beta = \beta_2$ 和 $\beta = \beta_3$ 是稳定的. 故系统在 $\varsigma = 1$ 时发生叉形分岔.

6 结束语

本文用 Lagrange 描述法从非线性动力学的视角讨论了受压细长杆的稳定性. 应用 Lagrange 描述法建立压杆的非线性动力学模型比应用 Euler 描述法简单方便, 这主要体现在以下几个方面:

- 空间变量的区域是确定的, 即 $x \in [0, l]$, 而在 Euler 描述法中由于杆 B 端发生位移 Δ , 区域则不是事先确定的.

- 充分利用了杆的轴向变形可以忽略的条件 ($ds = dx$), 采用物质坐标^[8](拖带坐标^[9]) x , 使得几何关系得以极大地简化.

- 由于引入位移变量 u_1 和 u_2 , 物理意义更为明确.

通过以上研究, 得出以下结论:

(1) 虽然由非线性动力学模型得到的受压细长杆的失稳条件与线性动力学模型、非线性静力学模型得到的结果相同, 但是由非线性动力学模型得到的信息含量更为丰富, 例如, 可以得到非直线平衡状态下, 杆弯曲变形的挠度, 其幅值为

$$|u_{2a}| = l \sqrt{\frac{\frac{Pl^2}{\pi^2 EI} - 1}{6 - \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}}}$$

(2) 含 3 次非线性项的动力学模型中, 当 $\varsigma = 1$, 即 $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ 时, 发生叉形分岔.

(3) Lagrange 描述法比 Euler 描述法更适用于研究细长杆的稳定性.

参 考 文 献

- 1 黄润生. 混沌及其应用. 武汉: 武汉大学出版社, 2000 (Huang Runsheng. Chaos and Its Applications. Wuhan: Wuhan University Press, 2002 (in Chinese))
- 2 张仲毅. 临界压力下压杆挠度的分析讨论. 力学与实践, 1995, 17(4): 73~74 (Zhang Zhongyi. Analysis on the flexibility of compressed rod under the critical load. *Mechanics in Engineering*, 1995, 17(4): 73~74 (in Chinese))
- 3 张仲毅. 对《细长压杆临界挠度确定性的简单解释》结果的改进. 力学与实践, 1996, 18(1): 67~69 (Zhang Zhongyi. Improvement on the study "A simple explanation on the determination of the critical flexibility of compressed slender rod". *Mechanics in Engineering*, 1996, 18(1): 67~69 (in Chinese))
- 4 薛福林. 谈细长压杆稳定性问题. 力学与实践, 1995, 17(4): 65~66 (Xue Fulin. On the stability of the slender rod under axial compression. *Mechanics in Engineering*, 1995, 17(4): 65~66 (in Chinese))
- 5 梁枢平, 邹时智. 也谈细长杆的稳定问题. 力学与实践, 1997, 19(4): 67~69 (Liang Shuping, Zou Shizhi. Echo to the discussion on the stability of slender rod. *Mechanics in Engineering*, 1997, 19(4): 67~69 (in Chinese))
- 6 张业民, 李顺群, 王丽君. 细长杆屈曲后中点位移的确定. 力学与实践, 2002, 24(6): 36~38 (Zhang Yemin, Li Shunqun, Wang Lijun. The computation of middle displacement of Euler poles after buckling. *Mechanics in Engineering*, 2002, 24(6): 36~38 (in Chinese))
- 7 刘延柱. 压杆失稳与 Liapunov 稳定性. 力学与实践, 2002, 24(4): 56~58 (Liu Yanzhu. Instability of compressed rod and Liapunov's stability. *Mechanics in Engineering*, 2004, 24(4): 56~58 (in Chinese))
- 8 李松年, 黄执中. 非线性连续统力学. 北京: 北京航空学院出版社, 1987 (Li Songnian, Huang Zhizhong. Non-linear Mechanics of Continuous Media. Beijing: Beijing Aeronautics Institute Press, 1987 (in Chinese))
- 9 陈至达. 有理力学: 非线性连续体力学. 北京: 中国矿业大学出版社, 1988 (Chen Zhida. Rational Mechanics: Non-linear Mechanics of Continuous Media. Beijing: China University of Mining and Technology Press, 1988 (in Chinese))

INSTABILITY OF EULER POLE FROM A POINT OF VIEW OF NONLINEAR DYNAMICS

CHEN Zhanqing* SUN Minggui** LI Tianzhen†

*(China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, China)

** (Anhui University of Science and Technology, Huainan 232000, China)

† (Xuzhou Institute of Technology, Xuzhou 221008, China)

Abstract A nonlinear dynamic model of Euler pole is established by using the Lagrangian description method. Based on the simplifications of the nonlinear dynamic model, a nonlinear static model, a linear dynamic model and a simplified nonlinear dynamic method are obtained, respectively. A truncation of spectra is used to analyze the local bifurcation of the linear dynamic model. On the basis of the analysis on the steady state of the simplified nonlinear dynamic method, the bifurcation condition is obtained. This study shows that a forked bifurcation exists in the simplified nonlinear dynamic model.

Key words Lagrangian description method, Eulerian description method, Euler pole, bifurcation, stability