非对称应力循环工作安全系数计算公式的商榷

谭文锋 徐耀玲

(燕山大学工程力学系，秦皇岛 066004)

摘要 目前的材料力学教材有关非对称应力循环下工作安全系数的计算公式值得商榷，给出的改进计算方法，得出原有公式偏于保守.

关键词 非对称，应力循环，安全系数，材料力学

1 公式推导

材料力学教材中，如文献 [1～3]，非对称应力循环下的工作安全系数的计算公式为

$$n_\sigma = \sigma_{-1}\Big/\left(\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma\beta}\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_m\right) \tag{1}$$

式 (1) 是值得商榷的，其推导简述如下. 图 1 中 ACB 折线为材料的简化持久极限曲线，EFB 为其对应的零件持久极限曲线. 故 $\overline{OA} = \sigma_{-1}$, $\overline{OB} = \sigma_b$, 而 C 点的横、纵坐标都是 $\sigma_0/2$, 即 $\overline{OC'} = \sigma_0/2$, $\overline{C'C} = \sigma_0/2$; $\overline{OE} = \dfrac{\varepsilon_\sigma\beta}{k_\sigma}\sigma_{-1}$, $\overline{C'F} = \dfrac{\varepsilon_\sigma\beta}{k_\sigma}\dfrac{\sigma_0}{2}$. 危险点的应力循环由 P 点表示，其循环特征为 r, 即 $\overline{IP} = \sigma_a$, $\overline{OI} = \sigma_m$. 连接 O, P 两点并延长交 EF 于 G 点, 交 AC 于 G' 点. 材料力学教材 [1～3] 中认为 G 点的横、纵坐标之和为零件的持久极限，从而得到式 (1), 然而这是不对的，这里将静荷部分误认为也受 k_σ, ε_σ, β 的影响了. 图中 G'' 点的横、纵坐标之和才是零件的持久极限. 道理显而易见，比如零件在脉动循环下的持久极限应为 F 点横、纵坐标之和而非 R 点的横、纵坐标之和.

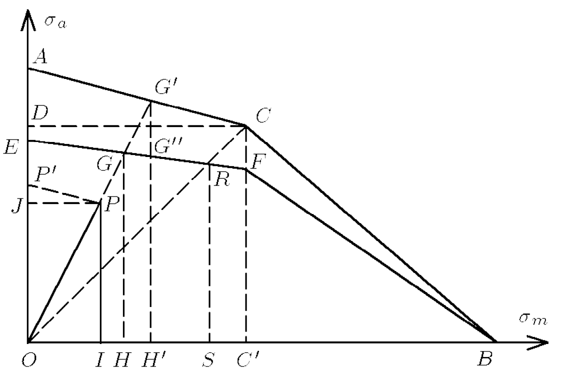


图 1

下面推导公式，采用文献 [1] 的符号.

$$n_\sigma = \sigma_r\big/\sigma_{\max} = (\overline{OH'} + \overline{H'G''})\big/(\overline{OI} + \overline{IP}) =$$

$$\left(\sigma_{rm} + \frac{\varepsilon_\sigma\beta}{k_\sigma}\overline{H'G'}\right)\Big/(\sigma_m + \sigma_a)$$

$$\frac{\overline{H'G'}}{\overline{IP}} = \frac{\overline{OG'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP'}} \quad (PP'//CA) \tag{2}$$

$$\overline{H'G'} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP'}}\overline{IP} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_m}\sigma_a \tag{3}$$

2005–01–14 收到第 1 稿， 2005–04–11 收到修改稿.

其中

$$\psi_\sigma = \tan\angle JPP' = \tan\angle DCA =$$

$$(\sigma_{-1} - \sigma_0/2)\big/(\sigma_0/2) = (2\sigma_{-1} - \sigma_0)/\sigma_0$$

$$\frac{\overline{OH'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{H'G'}}{\overline{IP}}$$

即

$$\frac{\sigma_{rm}}{\sigma_m} = \frac{\overline{H'G'}}{\sigma_a}$$

所以

$$\sigma_{rm} = \frac{\sigma_m}{\sigma_a}\overline{H'G'} \tag{4}$$

将式 (3),(4) 代入式 (2) 得

$$n_\sigma = \frac{\dfrac{\varepsilon_\sigma\beta}{k_\sigma}\sigma_a + \sigma_m}{\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_m}\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \sigma_m} \tag{5}$$

此即为非对称应力循环下的工作安全系数的计算公式.

2 特例及算例

下面讨论几种特殊情况

2.1 对称循环

此时 $r = -1$, $\sigma_m = 0$, $\sigma_a \neq 0$

$$n_\sigma = \frac{\dfrac{\varepsilon_\sigma\beta}{k_\sigma}\sigma_a}{\sigma_a}\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma\beta}\sigma_a}$$

与文献 [1～3] 公式相同.

2.2 静应力

此时 $r = 1$, $\sigma_m \neq 0$, $\sigma_a = 0$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_m}{\psi_\sigma\sigma_m}\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_m}$$

与文献 [1～3] 公式相同.

以上两种特殊情况下由于其静荷部分没有差别，所以其工作安全系数的计算公式相同. 而其它情况下的安全系数则不同. 下面讨论脉动循环情况.

2.3 脉动循环

此时 $r = 0$, $\sigma_m = \sigma_a = \dfrac{1}{2}\sigma_r$

$$n_\sigma = \frac{\dfrac{\varepsilon_\sigma\beta}{k_\sigma}\dfrac{1}{2}\sigma_r + \dfrac{1}{2}\sigma_r}{\dfrac{1}{2}\sigma_r + \psi_\sigma\dfrac{1}{2}\sigma_r}\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_r} = \frac{\dfrac{\varepsilon_\sigma\beta}{k_\sigma} + 1}{1 + \psi_\sigma}\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_r}$$

与文献 [1~3] 公式不同．而文献 [1~3] 公式为

$$(n_\sigma)_0=\frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma\beta}\sigma_a+\psi_\sigma\sigma_m}=\frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma\beta}\dfrac{1}{2}\sigma_r+\psi_\sigma\dfrac{1}{2}\sigma_r}=$$
$$\frac{1}{\dfrac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma\beta}+\psi_\sigma}\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_r}$$

其比值为

$$\alpha=\frac{n_\sigma}{(n_\sigma)_0}=1+\frac{1}{1+\psi_\sigma}\left(\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma\beta}+\frac{\varepsilon_\sigma\beta}{k_\sigma}\psi_\sigma\right) \qquad (6)$$

由式 (6) 可见，α 恒大于 1.

例 采用文献 [1] 第 360 页例 11.2 中的数据，$\psi_\sigma=0.2$, $k_\sigma=2.18$, $\varepsilon_\sigma=0.77$, $\beta=1$. 则

$$\alpha=1+\frac{1}{1+0.2}\times\left(\frac{2.18}{0.77\times1}+\frac{0.77\times1}{2.18}\times0.2\right)=3.42$$

由此可见，对于脉动循环两者误差是很大的，而原公式是偏于安全的．

3 结 论

(1) 材料力学教材中非对称应力循环下工作安全系数的计算公式是值得商榷的；

(2) 原公式除了在对称循环和静载荷情况下与本文公式相同外，其它情况都不同，而且误差较大．

参 考 文 献

1 刘鸿文主编．材料力学 I. 北京：高等教育出版社， 2004
2 单辉祖编．材料力学教程．北京：高等教育出版社， 2004
3 赵九江等主编．材料力学．哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社， 1987

Matlab 和 Maple 系统在力学教学中的应用

叶志明 刘红欣
(上海大学土木工程系，上海 200072) (上海大学力学系，上海 200436)

摘要 阐述两种典型的计算机代数系统 (CASes)——Matlab 和 Maple 在基础力学课程与有限元课程教学中的一些应用. CASes 可以方便地将力学教学和有限元计算过程中的模型建立、推理及其数值计算等进行演示和计算，为基础力学和有限元课程教学提供了新的手段和途径.

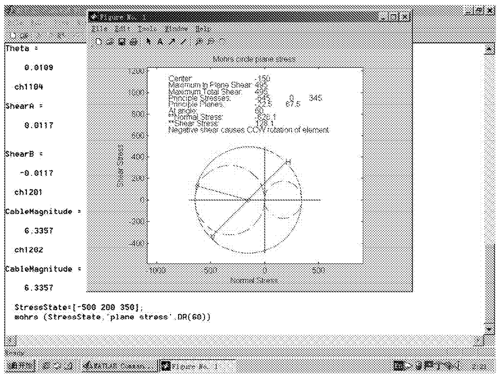
关键词 计算机代数系统 (CASes)，基础力学，有限元方法， Matlab, Maple

计算机代数系统 (CASes) 给人们节约了大量的计算时间，提高了科学计算的效率和可靠性，应用这些系统，人们已经解决了许多工程问题 [1]．本文则主要介绍 Matlab 和 Maple 两种典型的 CASes 系统在力学教学和有限元计算中的一些应用实例，使得这些应用能够随着 CASes 的发展，为我国的力学教育和科研的建设与发展服务．

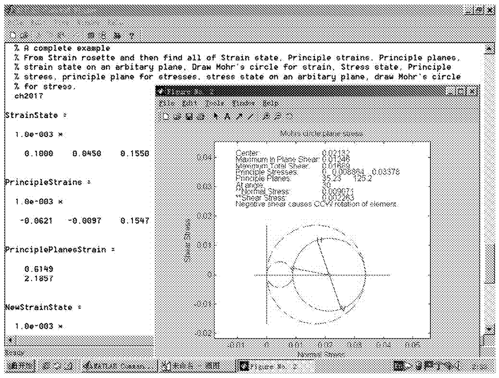
1 在基础力学课程教学中的应用

文献 [2] 较为详细地给出了怎样应用 Matlab 系统来分析基础力学课程中的有关问题，这些问题有：矢量转换计算；二维和三维的刚体平衡问题，应力应变计算问题； Mohr 圆计算问题；杆的拉压、扭转和弯曲问题；截面几何性质计算与分析；平面应力和平面应变问题；复杂应力计算问题；材料特性问题；梁的弯曲和变形计算；超静定结构计算问题等等．篇幅所限，这里仅给出有关算例，供读者参考．

例 1 关于 Mohr 圆的计算．运用 Matlab 程序，两个 Mohr 圆算例结果参见图 1 所示．图 2 给出了梁的问题的计算结果图例 (这里 Matlab 程序未给出).



(a)



(b)

图 1 Mohr 圆计算图例

例 2 关于梁的问题．这里可以运用 Matlab 程序方便

本文于 2004–07–05 收到第 1 稿， 2004–12–09 收到修改稿.