

# 关于有侧移斜梁计算的研究

孙晔青<sup>1)</sup>

(南昌航空工业学院土木建筑工程学院, 南昌 330034)

**摘要** 针对用位移法计算有侧移斜梁时遇到的几个问题进行了研究, 利用运动学原理对斜梁位移进行分析, 采用力法对几种常见载荷作用下的斜梁进行理论推导, 得到了几个重要结论: 一是斜梁的侧移计算公式, 二是一端固定、一端定向支承(支杆与斜梁斜交时)的有侧移单跨斜梁的转角位移方程、固端弯矩分别与两端固定支承的水平梁的相同, 所以计算此类斜梁时可以按两端固定支承的单跨水平梁处理。

**关键词** 位移法, 斜梁, 转角位移方程, 固端弯矩

## CALCULATION FOR AN INCLINED BEAM WITH SLIDING DISPLACEMENTS

SUN Yeqing<sup>1)</sup>

(Department of Civil and Architecture, Nanchang Institute of Aeronautical Technology, Nanchang 330034, China)

**Abstract** The paper applies a displacement method to an inclined beam with sliding displacements. The formulas for sliding displacements and the slope-deflection equation for the case of one end fixed and the other end with a directional support are obtained, respectively.

**Key words** displacement method, slope-deflection equation, inclined beam, fixed-end moment

### 引 言

在结构力学的计算简图中, 常常遇到带斜梁的刚架, 并且斜梁两端有垂直于杆件轴线方向相对线位移(以下简称为“侧移”). 如图 1<sup>[1]</sup>, 图 2<sup>[2]</sup>, 图 3<sup>[3]</sup> 所示刚架, 计算图 2, 图 3 时, 利用对称性取半刚架,

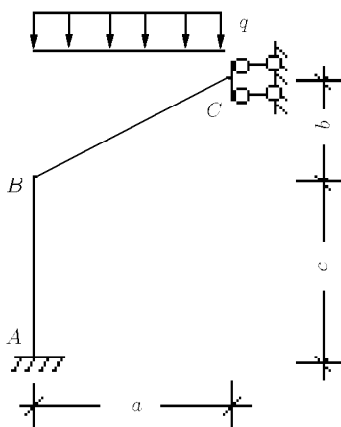


图 1 斜梁受均布力作用

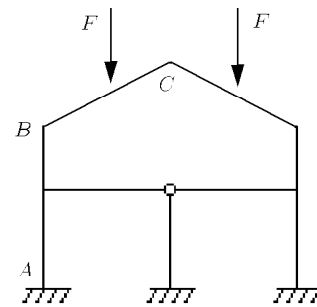


图 2 双跨对称刚架

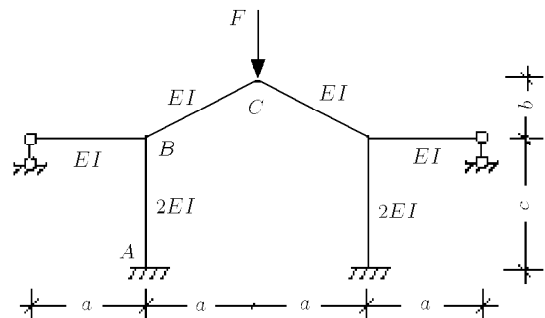


图 3 三跨对称刚架

2006-02-07 收到第 1 稿, 2006-10-23 收到修改稿.

1) E-mail: syqlm@sina.com

分别如图 4(a), 图 4(b) 所示.

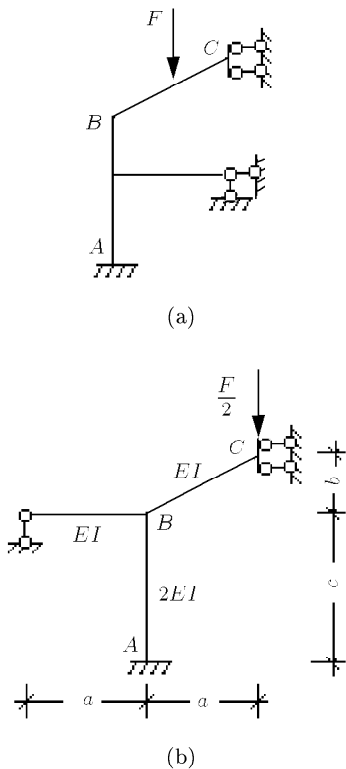


图 4 半刚架

用位移法计算这类斜梁时, 常常会使初学者陷入困境. 例如:  $C$  支座处的线位移是否计入位移法的基本未知量? 斜梁的侧移如何计算? 怎样表示斜梁的转角位移方程? 如何计算斜梁的固端弯矩? 这些问题在一般的结构力学书中都没有阐述. 本文就这些问题进行研究、推导.

### 1 斜梁支座处的线位移的处理

可以证明得知<sup>[4]</sup>, 与被支承梁的轴线斜交的定向支座处的线位移对斜梁两端的弯矩有影响, 一般应计入位移法基本未知量. 但是, 对于图 1, 图 4 中  $C$  支座处的线位移与  $B$  支座处的线位移线性相关, 所以, 此类线位移不必计入位移法的基本未知量.

### 2 斜梁侧移的计算

通过分析可知, 图 1 和图 4 所示斜梁两端的相对线位移与  $B$  端的水平线位移有关, 它们之间的关系式可以由运动学原理求得. 发生位移时, 斜梁作平面运动. 以图 4 (b) 为例, 令斜梁  $BC$  的长度为  $d$ ,  $B$  端的水平线位移为  $\Delta$ ,  $C$  端竖向线位移为  $\Delta_y$ ,  $CB$  梁两端的侧移为  $\Delta_{CB}$ , 利用基点法速度合成公式, 选  $B$  点为基点, 则  $C$  点的位移合成如图 5 所示. 由

此得  $|\Delta_{CB}| = \frac{\Delta}{\sin \theta} = \Delta \cdot \frac{d}{b}$ . 根据位移法“+,-”符号的规定

$$\Delta_{CB} = -\Delta \cdot d/b \tag{1}$$

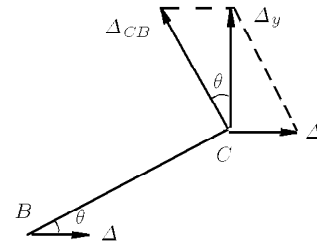


图 5 侧移计算图

### 3 斜梁的转角位移方程

在结构力学书中, 有关单跨梁的位移法公式以及载常数、形常数表格中, 都只有对应的单跨水平梁, 并且定向支座处或链杆支座的支杆都是与被支承梁的轴线平行或垂直, 而没有对应于斜梁的, 也没有对应于支杆与被支承梁的轴线斜交的水平梁. 为了得到斜梁的转角位移方程, 下面利用力法对图 1, 图 4 所示的有侧移斜梁进行推导. 在位移法中, 可以将  $BC$  梁视作  $B$  端固定支座、 $C$  端定向支座, 令  $B$  端发生了角位移  $\varphi$ , 线位移  $\Delta$ . 其力法计算的基本体系如图 6(a) 所示, 其力法典型方程为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1C} &= \varphi \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2C} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

单位弯矩图如图 6(b), 图 6(c) 所示.

求得系数

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{d}{3EI}, \quad \delta_{21} = \delta_{12} = \frac{-d}{6EI}$$

自由项  $\Delta_{1C} = \Delta_{2C} = -\Delta/b$ . 将以上系数、自由项及式 (1) 代入方程 (2), 并令  $i = EI/l$ , 解得

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= 4i\varphi - 6i \cdot \Delta_{CB}/d \\ X_2 &= 2i\varphi - 6i \cdot \Delta_{CB}/d \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

式 (3) 是一端固定、一端定向支承的有侧移斜梁的转角位移方程, 它与两端固定支承梁的转角位移方程相同. 所以, 考虑一端固定、一端定向支承 (支杆与斜梁斜交时) 的有侧移的斜梁的转角位移方程时, 可以按两端固定支承的水平梁处理.

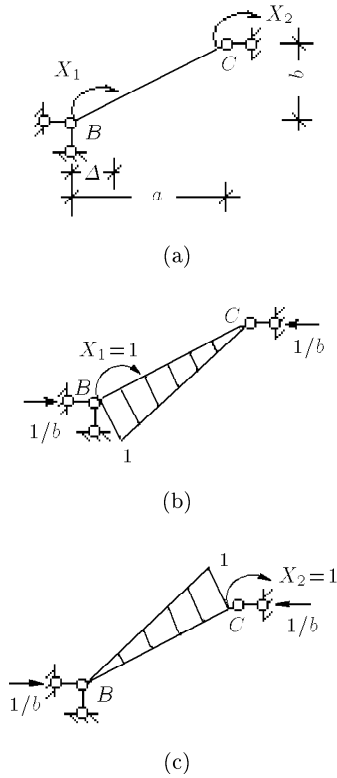


图 6 支座位移时计算简图

### 4 斜梁的固端弯矩

同理，将图 1 所示斜梁 BC 视作 B 端固定、C 端定向支承，令斜梁的长度为  $d$ ，其力法计算的基本体系如图 7(a)。其力法典型方程

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

单位弯矩图及系数与前面相同，荷载弯矩图如图 7 (b) 所示，由图 6 (b)，图 6(c)，图 7(b) 计算自由

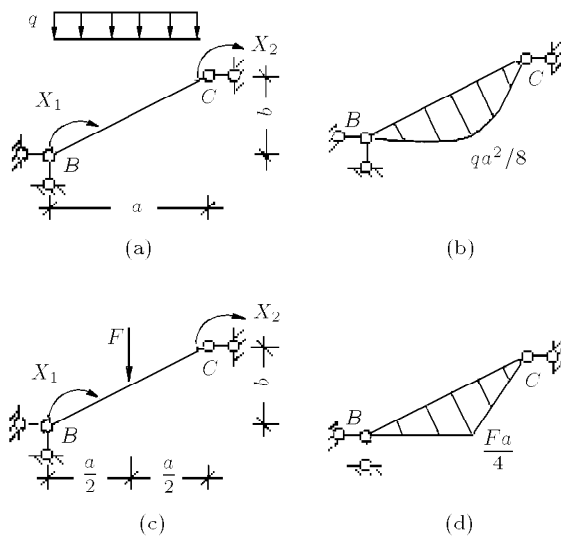


图 7 求固端弯矩简图

项  $\Delta_{1p} = -\Delta_{2p} = qa^2/24i$ 。解得  $X_1 = -qa^2/12$ ,  $X_2 = qa^2/12$ 。  $M_{BC}^F, M_{CB}^F$  表示斜梁 B 端和 C 端的固端弯矩，根据叠加原理，得斜梁的固端弯矩

$$\left. \begin{aligned} M_{BC}^F &= -X_1 = -qa^2/12 \\ M_{CB}^F &= X_2 = qa^2/12 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式 (5) 表明，受均布荷载作用的一端固定、一端定向支承的有侧移斜梁的固端弯矩与对应两端固定支承的水平梁的相同。同理，对于图 4(a) 所示的受集中力作用的斜梁，令其几何长度与图 6(a) 的相同，设  $F$  力作用于梁的跨中，其基本体系、载荷弯矩图如图 7(c)，图 7(d) 所示，可得此情况下斜梁的固端弯矩

$$\left. \begin{aligned} M_{BC}^F &= -X_1 = -Fa/8 \\ M_{CB}^F &= X_2 = Fa/8 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式 (6) 表明，一端固定、一端定向支承的有侧移的斜梁受集中荷载作用时的固端弯矩也与对应两端固定支承的水平梁的固端弯矩相同。

由此可见，计算一端固定、一端定向支承 (支杆与斜梁斜交时) 的有侧移的斜梁的固端弯矩时，不论受何荷载作用，都可以按两端固定支承的水平梁计算。但需要注意的是，式中的长度  $a$  是斜梁在荷载垂直方向的投影长度。

### 5 结 语

(1) 斜梁的侧移按式 (1) 计算；

(2) 一端固定、一端定向支承 (支杆与斜梁斜交时) 的有侧移的单跨斜梁的转角位移方程、固端弯矩分别与两端固定支承的单跨水平梁的相同。因此，计算此类斜梁时，可以按两端固定支承的单跨水平梁处理。

以上结论可以作为位移法求解超静定结构的一个补充，既可以用于结构力学的教学，也可以用于结构设计计算中。

### 参 考 文 献

- 1 单建等编著. 结构力学. 南京: 东南大学出版社, 2004, 158
- 2 龙驭球等编. 结构力学 (I). 北京: 高等教育出版社, 2003. 409~435
- 3 朱慈勉主编. 结构力学 (上册). 北京: 高等教育出版社, 2004. 212
- 4 孙晔青, 雷金波. 试论支座处的线位移对结点线位移数的影响. 力学与实践, 2005, 27(4): 74~76 (Sun Yeqing, Lei Jinbo. The effect of the linear displacement of supports on the mode linear displacement. *Mechanics in Engineering*, 2005, 27(4): 74~76 (in Chinese))