

$SU_L(2) \times U_1(1) \times \dots \times U_n(1)$ 弱电规范群和 GUT 中磁单极矛盾的消除

顾鸣皋 陆继宗
(同济大学) (上海师范学院)

摘 要

大统一理论(GUT)预言了超重磁单极存在。如果磁单极是二级(或弱一级)相变产生的,那么在宇宙早期核子合成时代,磁单极密度的估计值将远大于观察值的上限。本文提出一类新的大统一模型,它以 $SU_L(2) \times U_1(1) \times \dots \times U_n(1)$ 为弱电规范群。由于其中必定存在 Z 弦相互作用,因而它所预言的宇宙早期磁单极与标准热大爆炸宇宙学预言的没有矛盾。

一、引 言

标准热大爆炸宇宙学与大统一理论在宇宙早期磁单极问题上存在明显的冲突^[1]。近年来,已有许多文章讨论了这一问题^[2], Lazarides 和 Shafi 已经证明,如果统一规范群的 $SU_L(2)$ 和 $U_Y(1)$ 子群流形除单位元外没有其他交的话,上述矛盾是可以自然避免的,但是通常的 $SU(5)$ 、 $SO(10)$ 和 E_6 模型都没有这一性质。

本文进一步指出在 IKN 的 $SU(6)$ 模型^[4]、超对称的 $SU(5|1)$ 模型^[6]中,早期磁单极矛盾仍然存在。但是,如果将弱电规范群 $SU_L(2) \times U(1)$ 扩充为 $SU_L(2) \times U_1(1) \times \dots \times U_n(1)$ 的话,那末这些矛盾就可避免。为此,我们作为一个例子讨论了 $SU(6)$ 大统一模型,它的弱电规范群是 $SU_L(2) \times U_1(1) \times U_2(1)$ 。

二、 $SU(6)$ 、 $SU(5|1)$ 模型

在 Inoue-Kakuto-Nakano 的 $SU(6)$ 模型中,费米子填充 15 维表示

$$\psi_L = \begin{bmatrix} 0 & l_3 & l_1 & q_1^R & q_1^Y & q_1^G \\ -l_3 & 0 & l_2 & q_2^R & q_2^Y & q_2^G \\ -l_1 & -l_2 & 0 & q_3^R & q_3^Y & q_3^G \\ -q_1^R & -q_2^R & -q_3^R & 0 & -q_4^{GC} & q_4^{YC} \\ -q_1^Y & -q_2^Y & -q_3^Y & q_4^{GC} & 0 & -q_4^{RC} \\ -q_1^G & -q_2^G & -q_3^G & -q_4^{YC} & q_4^{RC} & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

对称性自发破缺由 6、15 维 Higgs 场完成,对称破缺链为

本文于 1982 年 9 月 11 日收到

$$\begin{array}{c}
 SU(6) \\
 \downarrow \\
 SU(5) \\
 \downarrow \\
 SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \\
 \downarrow \\
 SU_c(3) \times U_{em}(1)
 \end{array} \quad (2)$$

在第一步破缺中, 利用第二同伦群与第一同伦群的关系^[8], 我们有

$$\Pi_2(SU(6)/SU(5)) = \Pi(SU(5)) = 0 \quad (3)$$

因此在此层次中不产生磁单, 在第二步破缺中,

$$\Pi_2(SU(5)/SU_c(3) \times SU_L(2) \times SU_Y(1)) = \mathbb{Z} \quad (4)$$

有无限多种磁单极, 其性质是与 Georgi-Glashow 的 $SU(5)$ 模型中的磁单极一致, 而与大爆炸宇宙学预言的相矛盾。如果我们引入高维的 Higgs 场 ϕ_i^a , 它的真空期望值 $\langle \phi_i^a \rangle \neq 0$ ($i=6, \dots, 5$)。这样的 Higgs 场可以使 $SU(6)$ 直接破缺到 $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ 。这时产生的磁单极拓扑性质, 由下述同伦群决定

$$\Pi_2(SU(6)/SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)) = \Pi_1(SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)) \quad (5)$$

带色的磁单极由于色禁闭而很快消失^[3], 因此我们只需考虑无色的磁单极。这由 $\Pi_1(SU_L(2) \times U_Y(1))$ 决定。由于在 IKN 的 $SU(6)$ 模型中

$$T_{\frac{1}{3}} = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0\right) \quad (6)$$

$$Q = \text{diag}\left(1, 0, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \quad (7)$$

由 Gell-Mann-西岛公式 $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$ 得

$$Y = \text{diag}\left(1, 1, 0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \quad (8)$$

$SU_L(2)$ 的群元可表述为

$$\begin{pmatrix}
 V & & & & 0 \\
 & 1 & & & \\
 & & 1 & & \\
 & & & 1 & \\
 & & & & 1 \\
 0 & & & & & 1
 \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中 V 是 2×2 么正么模矩阵, $SU_L(2)$ 群的心 Z_2 为

$$e_1 = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1) \quad (10)$$

$$e_2 = \text{diag}(-1, -1, 1, 1, 1, 1) \quad (11)$$

另一方面 $U_Y(1)$ 群元的一群形式为 $e^{i\alpha Y}$, 显然

$$e^{3\pi i Y} = \text{diag}(-1, -1, 1, 1, 1, 1) \quad (12)$$

因此 $SU_L(2)$ 和 $U_Y(1)$ 也有非平庸的交。总之 IKN 的 $SU(6)$ 模型不管采用什么破缺方式, 都不能自然避免与宇宙学的矛盾。

在 $SU(5|1)$ 超对称大统一模型中^[5], 费米子填充分解到子群 $SU(5)$ 中是 $\mathbf{5} + \overline{\mathbf{10}}$ 维表示。在对称性自发破缺时, 产生的磁单极与 $SU(5)$ 大统一理论中产生的磁单极量子数一致, 所以这时产生的磁单极也将与标准热大爆炸宇宙学相矛盾。

三、 $G_{EW} = SU_L(2) \times U_1(1) \times \dots \times U_n(1)$ 的大统一模型

为了避免发生上述困难,我们利用推广的弱电群 $G_{EW} = SU_L(2) \times U_1(1) \times \dots \times U_n(1)$ 构造新的一类大统一模型。依照 Georgi-Weinberg 定理^[7] 及其推广^[8], 可知只要适当地选取 Higgs 场, 我们总能使模型符合低能要求。我们取电荷生成元为

$$Q = T_3^L + \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{2} \quad (13)$$

其中 Y_1, \dots, Y_n 对应于 $U_1(1), U_2(1), \dots, U_n(1)$ 群的生成元。为了避免大统一模型与大爆炸宇宙学的磁单极矛盾, 我们必须使其中某一生成元 Y_i 对于 $SU(2)$ 的所有双重态, 其量子数均为零。同时为了要具有自发破缺对称性, 必须引入适当的 Higgs 场。若所有的 Higgs 场都是 $SU_L(2)$ 的双重态, 于是它们的 Y_i 量子数都是零。这时与 Y_i 相应的 $U_i(1)$ 对称性就不会破缺。要使 $U_i(1)$ 破缺需引入 $SU_L(2)$ 三重态或单态的 Higgs 场, 它的 Y_i 量子数不为零。由于 Y_i 量子数具有这个特征, 使得 $U_i(1)$ 群与 $SU_L(2)$ 群没有共同的非平庸元。当对称性破缺到 $SU_L(2) \times U_1(1) \times \dots \times U_n(1)$ (其中为偶数) 时, 产生的磁单极强度为:

$$B_{\pm} = \pm \frac{1}{2} T_3^L - \frac{1}{4} Y_1 - \dots - \frac{1}{4} Y_{i-1} - \frac{1}{2} Y_i - \frac{1}{4} Y_{i+1} - \dots - \frac{1}{4} Y_n, \quad (14)$$

用 Q 来表示上式, 得

$$B_+ = -\frac{1}{2} Q + T_3^L - \frac{1}{4} Y_i, \quad (15)$$

$$B_- = -\frac{1}{2} Q - \frac{1}{4} Y_i. \quad (16)$$

这两种磁单极, 除带电荷外, 都还带有另一种场的量子数。当 $SU_L(2) \times U_1(1) \times \dots \times U_n(1)$ 破缺到 $U_{e.m}(1)$ 时, 由于 $U_1(1), \dots, U_n(1)$ 都被部分地破坏, 中性矢介子场 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 能形成弦结构从而使磁单极对很快消失, 于是在这类大统一模型中不出现与标准热大爆炸宇宙学关于磁单极预言不相符合的矛盾。

四、一个例子: $SU(6)$ 大统一模型

作为一个具体例子, 我们考虑一个新的 $SU(6)$ 大统一模型, 它的弱电规范群是

$$G_{EW} = SU_L(2) \times U_1(1) \times U_2(1)$$

生成元 Y_1, Y_2, Y_3^L 和 Q 为

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \\ 0 & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & -\frac{1}{2} & & & \\ & & & \frac{1}{6} & & \\ & & & & \frac{1}{6} & \\ 0 & & & & & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$T_3^L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ & -\frac{1}{2} & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \frac{1}{3} & & \\ & & & & \frac{1}{3} & \\ & & & & & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (17)$$

从(17)式易知 $SU_L(2)$ 群与 $U_3(1)$ 群没有非平庸的公共群元。为了保证理论具有可重正化性，我们选取无 Adler 反常的 $2 \times 6 + 15$ 维表示来填充费米子，

$$\begin{aligned} \mathbf{6}_L + \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \\ E \\ d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \end{bmatrix}_L; \quad \mathbf{6}_L^c = \begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu \\ M \\ b_1^c \\ b_2^c \\ c_3^c \end{bmatrix}_L; \\ \mathbf{15}_R = \begin{bmatrix} 0 & e^- & \chi_0 & u_1^c & d_1^c & b_1^c \\ -e^- & 0 & \mu^- & u_2^c & d_2^c & b_2^c \\ -\chi_0 & -\mu^- & 0 & u_3^c & d_3^c & b_3^c \\ -u_1^c & -u_2^c & -u_3^c & 0 & -u_3 & u_2 \\ -d_1^c & -d_2^c & -d_3^c & u & 0 & -u_1 \\ -b_1^c & -b_2^c & -b_3^c & -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

s 夸克、 c 夸克以及 τ 轻子可以通过另一代生成。规范层次破缺链应为

$$\begin{aligned} & SU(6) \\ & \downarrow \\ & SU_L(2) \times U_1(1) \times SU_c(4) \\ & \downarrow \\ & SU_L(2) \times U_1(1) \times U_2(1) \times SU_c(3) \\ & \downarrow \\ & SU_c(3) \times U_{e,\mu}(1) \end{aligned} \quad (19)$$

第一步和第二步破缺分别利用两个不同的 35 维 Higgs 场。这个模型也可以嵌入 E_6 理论，费米子填充 E_6 的单个表示 27_L ，通过 E_6 的 650 维 Higgs 场，能将 E_6 破缺，

$$E_6 \longrightarrow SU(2) \times SU(6), \quad (20)$$

而 $27 = (1, 15) + (2, \bar{6})$ 。

在这个模型中磁单极强度为

$$\begin{aligned} B_+ &= \frac{1}{2}T_3^L - \frac{1}{4}Y_1 - \frac{1}{2}Y_2 = -\frac{1}{2}Q + T_3^L - \frac{1}{4}Y_2, \\ B_- &= -\frac{1}{2}T_3^L - \frac{1}{4}Y_1 - \frac{1}{2}Y_2 = -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{4}Y_2. \end{aligned} \quad (21)$$

因此磁单极除带有电荷外，都带有另一种中性荷，与相对应的 Z 弦耦合，

五、讨 论

本文证明了以 $SU_L(2) \times U_1(1) \times \dots \times U_n(1)$ 为弱电规范群的大统一模型能自然避免在早期磁单极问题上与标准热大爆炸宇宙学发生矛盾。

假如我们仍然采用 $SU_L(2) \times U(1)$ 为弱电统一规范群, 则可以适当地引进外来 (exotic) 夸克和轻子 (即具有 $\pm 2/3, \pm 1/3$ 以外电荷值的夸克; $0, \pm 1$ 以外电荷值的轻子), 也同样能避免宇宙早期磁单极的困难。例如可将 $SU(5)$ 模型扩充为 $SU(7)$ 模型, 并引入 $\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}$ 电荷的夸克; $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ 电荷的轻子。由于为数众多的外来夸克和轻子均未发现, 这种方案缺乏自然性。

参 考 文 献

- [1] Ya. B. Zeldovich, M. Yu. Khlopov, Phys. Lett. **79B** (1978)239 J. P. Preskill, Phys. Rev. Letters **43** (1979)1365.
- [2] A. H. Guth and S. H. Tve, Phys. Rev. Letters **49** G. Lazarides, Q. Shafi and T. F. Walsh, Phys. Lett. **100B**(1981)21
- [3] G. Lazarides and Q. Shafi, Phys. Lett. **94B** (1980)149
- [4] K. Inoue, A. Kakuto and Y. Nakano, Prog. Theor.Phys. **58** (1977)630
- [5] J. G. Taylor, Phys. Rev. Letters **43** (1879)824
- [6] G. W. Whitehead, Elements of Homotopy Theory, Springer-Verlag (1978)
- [7] H. Georgi and S. Weinberg, Phys. Rev. **D17** (1978)275
- [0] A. Zee and J. E. Kim, Phys. Rev. **D21** (1980)1939

$SU_L(2) \times U_1(1) \times \dots \times U_n(1)$ Electroweak Gauge Group and the Elimination of Monopole Conflict Between GUT and Big Bang Cosmology

Gu Mingao
(Tongji University)

Lu Jizong
(Shanghai Teachers College)

Abstract

Grand Unified Theories predict the existence of superheavy magnetic monopoles. Under the assumption that if the transition during which monopoles are created is second order (or weakly first order), the monopole number density at the time of nucleosynthesis has been estimated to be unacceptably large. A $SU_L(2) \times U_1(1) \times \dots \times U_n(1)$ electroweak gauge group is studied in a framework of the unified scheme and the problem of magnetic monopoles conflicting with the standard Big Bang cosmology is naturally avoided.