第30卷第1期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 30, No. 1
2001年3月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Mar. 2001

紧 Lie 群上几种球型平均的饱和类(II)

郑 兵

(上海师范大学 数学科学学院，上海 200234)

摘 要：讨论了紧 Lie 群上 Abel-Poisson 平均及 Gauss-Weierstrass 平均的饱和类问题，给出了这两种线性算子平均在 $C(G)$ 中的饱和类特征.

关键词：紧 Lie 群；Abel-Poisson 平均；Gauss-Weierstrass 平均；饱和阶；饱和类

中图分类号：O174.41 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-5137(2001)01-0023-04

0 引言及引理

设 G 为一秩为 q 的 n 维紧 Lie 群，关于紧 Lie 群上函数空间 $L^p(G)$ 及 $C(G)$ 中线性有界算子的饱和性及饱和类有以下定义.

定义 1 设 $\{T_\epsilon\}$ $(\epsilon>0)$ 是 $L^p(G)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 或 $C(G)$ 到自身的一族线性有界算子，$\tilde{\varphi}(\epsilon)$ $(\epsilon\to 0^+)$ 是单调趋于 0 的函数，称 $\{T_\epsilon\}$ 在 $L^p(G)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 或 $C(G)$ 上饱和，且饱和阶是 $\tilde{\varphi}(\epsilon)$. 如果当 $\epsilon\to 0^+$ 时下述条件成立：

(1) 若 $\| f(x)-T_\epsilon(f;x)\| =o(\tilde{\varphi}(\epsilon))$，则 $f(x)=$常数.

(2) 存在 $f(x)\in L^p(G)$ 或 $C(G)$，$f(x)\neq$常数，使 $\| f(x)-T_\epsilon(f;x)\| =O(\tilde{\varphi}(\epsilon))$. 其中范数 $\|\cdot\|$ 表示 L^p 范数或 C 范数. 所有在 $L^p(G)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 或 $C(G)$ 中使 $\| f(x)-T_\epsilon(f;x)\| =O(\tilde{\varphi}(\epsilon))$ 的 $f(x)$ 的集合称为有界线性算子族 $\{T_\epsilon\}$ 在 $L^p(G)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 或 $C(G)$ 中的饱和类.

设 $f(x)$ 在 G 上可积，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数是

$$f(x) \sim \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda tr(\hat{f}(\lambda)U_\lambda(x)) \tag{1}$$

或

$$f(x) \sim \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda f * \chi_\lambda(x). \tag{2}$$

这里 $U_\lambda(x)$ 是 G 的以 λ 为首权的不可约表示. $\hat{G}$ 是 G 的对偶，即 G 的所有不可约表示首权的集合. d_λ 是对应于 λ 的不可约表示的维数. $\hat{f}(\lambda)=\int_G f(x)U_\lambda(x^{-1})\mathrm{d}x$，$\chi_\lambda(x)=tr(U_\lambda(x))$.

设 H 是 G 的李代数的一个固定的 Cartan 子代数，$\hat{\varphi}(h)$ 在 Weyl 群作用下不变且具有直到 $m=\frac{n-q}{2}$ 阶的 L^1 偏导数. 置

$$\varphi(h)=(2\pi)^{-\frac{q}{2}}\int\hat{\varphi}(y)e^{-i(h,y)}\mathrm{d}y, \tag{3}$$

收稿日期：2000-05-30

基金项目：上海师范大学学生学术科研项目

作者简介：郑兵(1963-)，男，上海师范大学数学科学学院博士研究生.

则其给出 Fourier 级数(2)的一个球型平均

$$T_\epsilon(f;x) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} \varphi_\epsilon(\lambda+\beta) d_\lambda f * \chi_\lambda(x), \tag{4}$$

其中 $\varphi_\epsilon(\lambda+\beta)=\varphi(\epsilon(\lambda+\beta))$，$\beta$ 为 G 的李代数的所有正根之和之半. 且当 $f(x)\in L^p(G)$ $(1\leqslant p<\infty)$或 $C(G)$时，球型平均算子 $T_\epsilon(f;x)$是 $L^p(G)$或 $C(G)$上的有界线性算子.

引理 1[2] 若存在 $\delta>0$，使得 $D_0^{-1}(h)(D\psi)(h)|\leqslant A(1+|h|)^{-n-\delta}$，

$$|\varphi(\lambda)| \leqslant A(1+|\lambda|)^{-n-\delta}, \tag{5}$$

则对 $f(x)\in L^p(G)$ $(1\leqslant p<\infty)$或 $C(G)$，算子 $T_\epsilon(f;x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}\varphi_\epsilon(\lambda+\beta)d_\lambda f * \chi_\lambda(x)$满足下列条件：

(1) $\sup_{\epsilon>0}\{\| T_\epsilon(f;x)\|\}\leqslant A(\varphi,G)\| f\|$.

(2) $\lim_{\epsilon\to 0^+}\| T_\epsilon(F;x)-f(x)\| =0$.

其中，范数 $\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_{L^p}$或 $\|\cdot\|_C$.

关于线性型平均算子(4)的饱和类问题，文[3]证明了如下的一个一般结果.

引理 2[3] 设 $f(x)\in L^p(G)$ $(1\leqslant p<\infty)$或 $C(G)$，$\varphi(0)=1$. 如果有界线性算子族

$$T_\epsilon(f;x) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} \varphi_\epsilon(\lambda+\beta) d_\lambda f * \chi_\lambda(x)$$

在 $L^p(G)$ $(1\leqslant p<\infty)$或 $C(G)$上强收敛于 $f(x)$，且存在一个单调趋于 0 的函数 $\tilde{\varphi}(\epsilon)$，使得

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1-\varphi_\epsilon(\lambda+\beta)}{\tilde{\varphi}(\epsilon)} = \psi(\lambda)\neq 0,\ \lambda\in\tilde{G},\ \lambda\neq 0, \tag{6}$$

则 (1) $\{T_\epsilon(f;x)\}$在 $L^p(G)$或 $C(G)$中饱和，饱和阶为 $\tilde{\varphi}(\epsilon)$.

(2) 若$\{T_\epsilon(f;x)\}$关于 ϵ 一致有界，既存在 $M>0$，对任意的 $\epsilon>0$，$\| T_\epsilon\|\leqslant M$，则有

$$\begin{aligned} S\subseteq \{f(x)\in L^p(G)\ 或\ C(G) \mid 存在\ g(x)\in L^p(G)\ 或\ L^\infty(G),\\ 使\ \psi(\lambda)C_{ij}^\lambda(f) = C_{ij}^\lambda(g),\ i,j=1,2,\cdots,d_\lambda\}, \end{aligned} \tag{7}$$

这里 S 是$\{T_\epsilon(f;x)\}$的饱和类，$C_{ij}^\lambda(f)$，$C_{ij}^\lambda(g)$分别是 $f(x)$，$g(x)$的 Fourier 系数.

设 $\varphi(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且适合 $\varphi(0)=1$，$\int_0^{+\infty}|\varphi(t)|\mathrm{d}t<\infty$. 置

$$H_k^\varphi(c) = \frac{1}{c}\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{u}{c}\right)u^{k+1}J_k(u)\mathrm{d}u,$$

$$W_k^\varphi(c) = \frac{H_k^\varphi(c)}{c^{2k-1}},$$

则

$$\varphi(|\lambda|)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}l}\int_H\psi(|h|)e^{-i(\lambda,h)}\mathrm{d}h,$$

这里 $J_k(u)$是 k 阶 Bessel 函数. $\psi(|h|)=W_k^\varphi(|h|)$是 $\varphi(\lambda)$的 *Fourier* 变换，$l=\dim H$. 对于紧 Lie 群 G 及其微分算子 $D=\prod_{\alpha>0}D_\alpha$，$\alpha$ 为李代数的正根，取 $k=\frac{1}{2}(l-2)$，则可以证明[2]

$$(DW_k^\varphi\psi)(h) = D_0(h)W_{\frac{1}{2}n-1}^\varphi(|h|).$$

特别，若取 $\varphi(t)=e^{-t}$或 $\varphi(t)=e^{-t^2}$，则由(4)可分别得到紧 Lie 群上 Fourier 级数的 Abel-Poisson 平均和 Gauss-Weierstrass 平均.

2 Abel-Poisson 平均饱和类

定义 2 设 $f(x)\in L(G)$，称 $A_R(f;x)=e^{\frac{|\beta|}{R}}\sum_{\lambda\in\hat{G}}e^{-\frac{|\lambda+\beta|}{R}}d_\lambda\chi_\lambda * f(x)$ $(R\geqslant|\beta|)$为紧 Lie 群 G 上 $f(x)$的 Fourier 级数的 Abel-Poisson 平均.

对于 $\varphi(t)=e^{-t}, t\in[0,+\infty)$. 易知对任意的 $h\in H$，存在常数 $A>0$，使得 $|\varphi(h)|\leqslant A(1+|h|)^{-n-1}$. 另一方面，因为 $\psi(|h|)=\hat{\varphi}(\lambda)=W_1^n(|h|)$，且

$$W_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{2}}(|h|)=\frac{H_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}(|h|)}{|h|^{n-1}}=\frac{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}}(1+|h|)^{-n-1}.$$

由引理 1 知，$A_R(f;x)$ 在 $L^p(G)$ 或 $C(G)$ 上按范数收敛于 $f(x)$ $(R\to\infty)$，且算子列 $\{A_R\}$ 的范数关于 R 一致有界.

定理 3　Abel-Poisson 平均在 $L^p(G)$ 或 $C(G)$ 上按范数强收敛于 $f(x)$，并且是饱和的，饱和阶为 $\frac{1}{R}$，在 $C(G)$ 中的饱和类为 $S=\{f(x)\in C(G)\}\mid(|\beta|I+\Omega)\tilde{I}_1(f)\in L^\infty(G)\}$，这里 Ω 是 G 上弱意义下的 Laplace 算子，$\tilde{I}_1$ 是 Bessel 势.

证明　因为 $|\lambda+\beta|^2-|\beta|^2=|\lambda|^2+2(\lambda,\beta)\geqslant 0$，所以当 $\lambda\in\hat{G}, \lambda\neq 0$ 时，有

$$\lim_{R\to 0}\frac{1-e^{\frac{1}{R}(|\beta|-|\lambda+\beta|)}}{\frac{1}{R}}=|\lambda+\beta|-|\beta|\neq 0.$$

故由引理 2 知

$$S\subseteq\{f(x)\in C(G)\mid 存在 g(x)\in L^\infty(G)，使(|\lambda+\beta|-|\beta|)C_{ij}^\lambda(f)=C_{ij}^\lambda(g), i,j=1,2,\cdots,N(\lambda)\}\quad(8)$$

下证 $g(x)=[(|\beta|^2I+\Omega)\tilde{I}_1-|\beta|I](f)(x)$. 事实上，若 $f(x)\in C(G)$，则由 $\tilde{I}_1(f)(x)=\int_G f(xy^{-1})\tilde{\varphi}_1(y)\mathrm{d}y$ 知 $\tilde{I}_1(f)(x)\in C(G)$，其中 $\tilde{\varphi}_1(x)\sim\sum_{\lambda\in\hat{G}}|\lambda+\beta|^{-1}d_\lambda\chi_\lambda(x), \tilde{\varphi}_1(x)\in L(G)$. 因此对任意的 $\lambda\in\hat{G}, \lambda\neq 0$，有

$$\begin{aligned}\int_G\tilde{I}_1(f)(x)\Omega\varphi_{ij}^\lambda(x)\mathrm{d}x&=(|\lambda+\beta|^2-|\beta|^2)\int_G\tilde{I}_1(f)(x)\varphi_{ij}^\lambda(x)\mathrm{d}x=\\&(|\lambda+\beta|C_{ij}^\lambda(f)-|\beta|^2|\lambda+\beta|^{-1}C_{ij}^\lambda(f)=\\&\int_G(g(x)+|\beta|f(x)-|\beta|^2\tilde{I}_1(f)(x)\varphi_{ij}^\lambda(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而，在弱意义下有　$\Omega\tilde{I}_1(f)(x)=g(x)+|\beta|f(x)-|\beta|^2\tilde{I}_1(f)(x)$,

即　$g(x)=(|\beta|^2I+\Omega)\tilde{I}_1f(x)-|\beta|f(x)$.

又由 $f(x)\in C(G)$ 知，$g(x)\in L^\infty(G)$，当且仅当 $(|\beta|^2I+\Omega)\tilde{I}_1f(x)\in L^\infty(G)$. 所以由(8)知

$$S\subseteq\{f(x)\in C(G)\mid(|\beta|^2I+\Omega)\tilde{I}_1f(x)\in L^\infty(G)\}.\quad(9)$$

再证 $S\supseteq\{f(x)\in C(G)\mid(|\beta|^2I+\Omega)\tilde{I}_1f(x)\in L^\infty(G)\}$. 设 $\nabla=(|\beta|^2I+\Omega)\tilde{I}_1$，则对任意的 $f(x)\in\{f(x)\in C(G)\mid(|\beta|^2I+\Omega)\tilde{I}_1f(x)\in L^\infty(G)\}$，有 $\nabla f(x)=L^\infty(G)$，且

$$|A_R(|\beta|f-\nabla f;x)|\leqslant M\||\beta|f-\nabla f\|_\infty,\quad(10)$$

而

$$\begin{aligned}\int_G\left(\int_0^{\frac{1}{R}}A_{\frac{1}{\eta}}(|\beta|f-\nabla f;x)\mathrm{d}\eta\right)\varphi_{ij}^\lambda(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{1}{R}}\left(\int_G A_{\frac{1}{\eta}}(|\beta|f-\nabla f;x)\varphi_{ij}^\lambda(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\eta=\\&\int_0^{\frac{1}{R}}e^{\eta(|\beta|-|\lambda+\beta|)}(|\beta|-|\lambda+\beta|)C_{ij}^\lambda(f)\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\int_G[A_R(f;x)-f(x)]\varphi_{ij}^\lambda(x)\mathrm{d}x&=[e^{\frac{1}{R}(|\beta|-|\lambda+\beta|)}-1]C_{ij}^\lambda(f)=\\&\int_0^{\frac{1}{R}}e^{\frac{1}{R}(|\beta|-|\lambda+\beta|)}(|\beta|-|\lambda+\beta|)C_{ij}^\lambda(f)\mathrm{d}\eta,\end{aligned}$$

故 $$A_R(f;x)-f(x)=\int_0^{\frac{1}{R}}A_{\frac{1}{\eta}}(|\beta|f-\nabla f;x)\mathrm{d}\eta.$$

从而 $$|A_R(f;x)-f(x)|=\int_0^{\frac{1}{R}}\left|A_{\frac{1}{\eta}}(|\beta|f-\nabla f;x)\right|\mathrm{d}\eta\leqslant M\||\beta|f-\nabla f\|_{\infty}\cdot\frac{1}{R}.$$

亦 $|A_R(f;x)-f(x)|=O(\frac{1}{R})$. 即 $f(x)\in S$. 定理得证. □

3 Gauss-Weierstrass 平均饱和类

设 $\varphi(t)=e^{-t^2},t\in[0,\infty)$. 则由(4)可定义紧 Lie 群上可积函数 Fourier 级数的 Gauss-Weierstrass 平均.

定义 3 设 $f(x)\in L(G)$,称 $W_R(f;x)=e^{\frac{|\beta|^2}{R^2}}\sum\limits_{\lambda\in\hat{G}}e^{-\frac{|\lambda+\beta|^2}{R^2}}d_\lambda\chi_\lambda*f(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的 Gauss-Weierstrass 平均,其中 $R>0$.

与 Abel-Poission 平均的情形相仿,根据引理 1,容易验证 Gauss-Weierstrass 平均在 $L^p(G)$ 或 $C(G)$ 上按范数强收敛于 $f(x)$. 其饱和性有如下的结果.

定理 4 Gauss-Weierstrass 平均在 $L^p(G)$ 或 $C(G)$ 中饱和,饱和阶 $\frac{1}{R^2}$,在 $C(G)$ 中的饱和类为 $S=\{f(x)\in C(G)\,|\,\Omega f(x)\in L^\infty(G)\}$,这里 Ω 是 G 上弱意义下的 Laplace 算子.

定理 4 的证明与定理 3 的证明完全类似,这里不再赘述.

感谢导师王国荣教授及朱德通教授的关心与支持.

参考文献:

[1] 洛伦茨 G G. 函数逼近论[M]. 上海:上海科技出版社,1981.
[2] 郑学安. 紧致齐性空间上的调和分析[M]. 上海:上海科技出版社,2000.
[3] 郑兵. 紧 Lie 群上 Fourier 级数的球平均饱和类(I)[J]. 西北师范大学学报(自然科学版),1999,35(1).
[4] 郑学安. 紧 Lie 群上 Fourier 级数的球平均求和(I)[J]. 东北数学,1989,5(3):301-308.

The Saturation Classes of Certain Spherical Means on Compact Lie Group(II)

ZHENG Bing
(College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: In this paper the saturation of Abel-Poisson means and Guass-weierstrass means on compact Lie groups be discussed in the space $C(G)$, and the characterization of saturation classes of the two kinds of spherical means be given out.

Key words: compact Lie group; Abel-poisson means; Gauss-Weierstrass means, saturation classes