第23卷 第2期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 23, No. 2
1994年6月　　J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences)　　Jun. , 1994

矩阵之积的加权 Moore-Penrose 逆

魏益民
(数学系)

提　要　本文给出了矩阵之积的加权 Moore-Penrose 逆的表示及逆序性质，同时指出了1992年某文中的一个错误.

关键词　加权广义逆；加权 (M,N)-奇异值分解；逆序；矩阵之积
中图法分类号　O151.21

0 引　言

Cline 在文献[1]中讨论了矩阵 $(AB)^+$ 的表示，即 $(AB)^+ = B_1^+ A_1^+$，这里 $B_1 = A^+ AB$，$A_1 = AB_1B_1^+$. Ben-Israel 和 Greville 在文献[2]中给出了 $(AB)^+ = B^+ A^+$ 的充要条件：$R(A^*AB) \subset R(B)$ 和 $R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$. 本文讨论了 $(AB)^+_{MP}$ 的表示及 $(AB)^+_{MP} = B^+_{NP}A^+_{MN}$ 的充要条件，推广了文献[1,2]中的相应结论，同时指出了文献[7]中的一个错误.

1 准备知识

定义1.1[2]　设 $A \in C_r^{m\times n}$，M,N 分别为 m 阶和 n 阶 Hermite 正定阵，则存在唯一的矩阵 $X \in C_r^{n\times m}$，满足

$$AXA = A, XAX = X, (MAX)^* = MAX, (NXA)^* = NXA$$

这里 X 称为 A 的加权 Moore-Penrose 逆，记作 $X = A^+_{MN}$.

当 M 和 N 分别为 m 和 n 阶单位阵 I_m 和 I_n 时，$A^+_{I_mI_n} = A^+$，A^+ 称为 A 的 Moore-Penrose 逆.

当 A 为非异方阵时，$A^+ = A^{-1}$.

定义1.2[6]　$A \in C^{m\times n}$ 的加权共轭转置阵 $A^\# \in C^{n\times m}$ 定义为 $A^\# = N^{-1}A^*M$.

定义1.3[4,6]　设 $A \in C^{m\times n}$ 的加权 (M,N)-奇异值，它是下列集合 $\mu_{MN}(A) = \{\mu \mid \mu \geq 0, \mu$ 是 $\frac{||Ax||_M}{||x||_N}$ 的稳定值$\}$中的元素.

这里
$$||x||_N = (x^*Nx)^{\frac{1}{2}} = ||N^{\frac{1}{2}}x||_2, x \in C^n$$
$$||x||_M = (x^*Mx)^{\frac{1}{2}} = ||M^{\frac{1}{2}}x||_2, x \in C^m$$
$$||A||_{MN} = \sup_{||x||_N=1} ||Ax||_M, A \in C^{m\times n}, x \in C^n$$

本文于1993年3月29日收到.

$$||B||_{NM} = \sup_{||x||_M=1} ||Bx||_N, B \in C^{n\times m}, x \in C^m.$$

引理1.1[6] 加权共轭转置阵满足下列性质.

$$(A+B)^{\#} = A^{\#} + B^{\#}, (AB)^{\#} = B^{\#}A^{\#}, (A^{\#})^{\#} = A, (A^{\#})^* = (A^*)^{\#}$$

引理1.2[4,6] 设 $A \in C_r^{m\times n}$. 则存在加权 M 酉阵 $U \in C^{m\times m}$ 和加权 N^{-1} 酉阵 $V \in C^{n\times n}$，使得 $A = U\begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix} V^*$. 其中 $D = \mathrm{diag}(\mu_{MN}^1, \mu_{MN}^2, \cdots, \mu_{MN}^r)$，

$\mu_{MN}^1 \geqslant \mu_{MN}^2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{MN}^r > 0$ 为 A 的加权 (M,N)-奇异值，而加权酉阵 U 和 V 满足如下关系式：

$$U^*MU = I_m; V^*N^{-1}V = I_n.$$

由此，易得

$$A_{MN}^+ = N^{-1}V\begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} U^*M$$

其中

$$D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\mu_{MN}^1}, \frac{1}{\mu_{MN}^2}, \cdots, \frac{1}{\mu_{MN}^r}\right)$$

引理1.3[3] 设 $A \in C^{m\times n}$，B 和 C 分别是 m 阶、n 阶非异矩阵，则

(1) $B^{-1}\cdot R(BA) = R(A) = R(AC)$

(2) $N(BA) = N(A) = C\cdot N(AC)$

引理1.4[2] A_{MN}^+ 有以下性质：

(1) $A_{MN}^+ = N^{-\frac{1}{2}}(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^+ M^{\frac{1}{2}}$

(2) $(A_{MN}^+)^* = (A^*)_{N^{-1}M^{-1}}^+$.

引理1.5 (1) $R(A_{MN}^+A) = R(A_{MN}^+) = R(A^{\#})$

(2) $R(AA_{MN}^+) = R(A)$

(3) $N(AA_{MN}^+) = N(A_{MN}^+) = N(A^{\#})$

(4) $N(A_{MN}^+A) = N(A)$

(5) $\mathrm{rank}(A_{MN}^+A) = \mathrm{rank}(AA_{MN}^+) = \mathrm{rank}(A_{MN}^+) = \mathrm{rank}(A^{\#}) = \mathrm{rank}(A)$

证 由[2]可知，

$$AA_{MN}^+ = P_{R(A),M^{-1}N(A^*)}, \qquad A_{MN}^+A = P_{N^{-1}R(A^*),N(A)}$$

故

$$R(AA_{MN}^+) = R(A), \qquad N(A_{MN}^+A) = N(A),$$

(2),(4) 证毕.

由引理1.3和定义1.2知：

$$N(AA_{MN}^+) = M^{-1}N(A^*) = N(A^*M) = N(N^{-1}A^*M) = N(A^{\#})$$

$$R(A_{MN}^+A) = N^{-1}R(A^*) = R(N^{-1}A^*) = R(N^{-1}A^*M) = R(A^{\#})$$

$$\begin{aligned} R(A_{MN}^+) &= R[N^{-\frac{1}{2}}(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^+ M^{\frac{1}{2}}] = N^{-\frac{1}{2}}R[(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^+ M^{\frac{1}{2}}] \\ &= N^{-\frac{1}{2}}R[(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^+] = N^{-\frac{1}{2}}R[(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^*] \\ &= N^{-\frac{1}{2}}R(N^{-\frac{1}{2}}A^*M^{\frac{1}{2}}) = R(N^{-1}A^*M^{\frac{1}{2}}) = R(N^{-1}A^*M) = R(A^{\#}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(A_{MN}^+) &= N[N^{-\frac{1}{2}}(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^+ M^{\frac{1}{2}}] = N[(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^+ M^{\frac{1}{2}}] \\ &= M^{-\frac{1}{2}}N[(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^+] = M^{-\frac{1}{2}}N[(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^*] \\ &= M^{-\frac{1}{2}}N[N^{-\frac{1}{2}}A^*M^{-\frac{1}{2}}) = N(N^{-\frac{1}{2}}A^*M) = N(N^{-1}A^*M) = N(A^{\#}) \end{aligned}$$

故 (1),(3)成立.

由 (1),(2) 即可得(5)成立.

2 主要结论

定理2.1 设 $A \in C^{m\times n}, B \in C^{n\times p}, M, N, P$ 分别为 m, n, p 阶 Hermite 正定阵,则 $(AB)^+_{MP} = \widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{A}^+_{MN}$,

这里 $\widetilde{B} = A^+_{MN}AB \in C^{n\times p}$, $\widetilde{A} = A\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP} \in C^{m\times n}$.

证 显然 $AB = AA^+_{MN}AB = A\widetilde{B} = A\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{B} = \widetilde{A}\widetilde{B}$.

令
$$Y = AB = \widetilde{A}\widetilde{B}, X = \widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{A}^+_{MN}$$
因
$$\widetilde{A} = A\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP} = A\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP} = \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP}$$
而
$$YX = \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{A}^+_{MN} = \widetilde{A}\widetilde{A}^+_{MN}$$
故
$$YXY = \widetilde{A}\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A}\widetilde{B} = \widetilde{A}\widetilde{B} = Y \tag{2.1}$$
$$XYX = \widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A}\widetilde{A}^+_{MN} = \widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{A}^+_{MN} = X \tag{2.2}$$
且
$$MYX = M\widetilde{A}\widetilde{A}^+_{MN} \text{ 是 Hermite 矩阵.} \tag{2.3}$$

下面证明 PXY 是 Hermite 阵.

$$A^+_{MN}\widetilde{A} = A^+_{MN}A\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP} = A^+_{MN}AA^+_{MN}AB\widetilde{B}^+_{NP}$$
$$= A^+_{MN}AB\widetilde{B}^+_{NP} = \widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP}$$
$$\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP} = \widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A}$$

又因为 $N\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A}$ 和 $N\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{N}$, 均是 Hermite 矩阵,

所以 $N\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP} = N\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A}$,

对上式取共轭转置,$(\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{N})^*(N\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A})^* = (N\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A})^*$

$$(N\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP})^*\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A} = N\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A}$$
$$N\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A} = N\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A}$$
即有
$$\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A} = \widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A}$$
又
$$\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A} = A^+_{MN}\widetilde{A}\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A} = A^+_{MN}\widetilde{A}$$
故
$$\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A} = \widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP}$$
由此可得
$$PXY = P\widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{A}^+_{MN}\widetilde{A}\widetilde{B} = P\widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{B}\widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{B} = P\widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{B} \tag{2.4}$$
即 PXY 是 Hermite 矩阵.

于是
$$(AB)^+_{MP} = \widetilde{B}^+_{NP}\widetilde{A}^+_{MN}.$$

推论2.1 设 $A \in C^{m\times n}, B \in C^{n\times p}$, 若 M, N, P 分别为 m, n, p 阶单位阵,

则
$$(AB)^+ = \widetilde{B}^+\widetilde{A}^+,$$
其中
$$\widetilde{B} = A^+AB, \widetilde{A} = A\widetilde{B}\widetilde{B}^+.$$

注 推论2.1即是文献[1]的结果.

[7]中引理3:设 $A \in C^{m\times n}, B \in C^{n\times n}$, 则 $(AB)^+_{MN} = B^+_{NN}A^+_{MN}$ 成立的充要条件为 $R(A^*AB) \subset R(B), R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$. 由于作者的疏忽,这个结论是错误的.

下面给出一个反例:

设
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in R^{3\times 2}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in R^{2\times 2}.$$

由[2]中的 Greville 递推算法得: $A^{+}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,

易得
$$B^{+}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

显然
$$AB=A,$$

故
$$(AB)^{+}=A^{+}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix},$$

$$B^{+}A^{+}=A^{+}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix},$$

即
$(AB)^{+}=B^{+}A^{+}$,由[2]得:
$$R(A^{*}AB)\subset R(B),R(BB^{*}A^{*})\subset R(A^{*})$$

又令 $M=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&3\end{bmatrix}$,$N=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$,$M,N$ 均是 Hermite 正定阵.

由[5]得
$$A_{MN}^{+}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&0&-2\\1&0&2\end{bmatrix}$$

易得
$$B_{NN}^{+}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-2\\1&2\end{bmatrix},$$

然而
$$(AB)_{MN}^{+}=A_{MN}^{+}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&0&-2\\1&0&2\end{bmatrix}$$

$$B_{NN}^{+}A_{MN}^{+}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1&0&-2\\1&0&2\end{bmatrix}$$

显然
$(AB)_{MN}^{+}\neq B_{NN}^{+}A_{MN}^{+}$,此时虽然有
$$R(A^{*}AB)\subset R(B),R(BB^{*}A^{*})\subset R(A^{*})\quad 成立.$$

这说明[7]中引理3的结论错误.

下面给出 $(AB)_{MP}^{+}=B_{NP}^{+}A_{MN}^{+}$ 成立的充要条件.

定理2.2 设 $A\in C^{m\times n}$,$B\in C^{n\times p}$,M,N,P 分别是 m,n,p 阶 Hermite 正定阵,则 $(AB)_{MP}^{+}=B_{NP}^{+}A_{MN}^{+}$,的充要条件是 $R(A^{\#}AB)\subset R(B),R(BB^{\#}A^{\#})\subset R(A^{\#})$.

证 先证充分性

由假设及引理1.5知,
$$BB_{NP}^{+}A^{\#}AB=A^{\#}AB \tag{2.5}$$

和
$$A_{MN}^{+}ABB^{\#}A^{\#}=BB^{\#}A^{\#} \tag{2.6}$$

由(2.5)得
$$NBB_{NP}^{+}A^{\#}AB=NA^{\#}AB$$

取共轭转置,

得
$$B^{*}A^{*}(A^{\#})^{*}NBB_{NP}^{+}=B^{*}A^{*}(A^{\#})^{*}N$$

右边乘以 A_{MN}^{+},左边乘以 $(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}$,

$$(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}B^{*}A^{*}(A^{*})^{*}NBB_{NP}^{+}A_{MN}^{+}=(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}B^{*}A^{*}(A^{*})^{*}NA_{MN}^{+}$$

$$(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}B^{*}A^{*}(A^{*})^{*}NBB_{NP}^{+}A_{MN}^{+}=(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}B^{*}A^{*}(A^{*})^{*}NA_{MN}^{+}$$

$$(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}(AB)^{*}MAN^{-1}NBB_{NP}^{+}A_{MN}^{+}=(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}B^{*}A^{*}MAN^{-1}NA_{MN}^{+}$$

$$[M(AB)(AB)^{+}_{MP}]^{*}ABB^{+}_{NP}A^{+}_{MN}=(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}B^{*}A^{*}(MAA^{+}_{MN})^{*}$$

$$M(AB)(AB)^{+}_{MP}(AB)B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}=(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}B^{*}A^{*}A^{*+}_{N^{-1}M^{-1}}A^{*}M$$

$$MABB^{+}_{NP}A^{+}_{MN}=(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}B^{*}A^{*}M$$

$$MABB^{+}_{NP}A^{+}_{MN}=[M(AB)(AB)^{+}_{MP}]^{*}$$

$$MABB^{+}_{NP}A^{+}_{MN}=MAB(AB)^{+}_{MP}$$

故

$$ABB^{+}_{NP}A^{+}_{MN}=AB(AB)^{+}_{MP}. \tag{2.7}$$

对(2.6)左边乘以 B^{+}_{NP}，右边乘以 $M^{-1}(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}$

有

$$B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}ABB^{\#}A^{\#}M^{-1}(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}=B^{+}_{NP}BB^{\#}A^{\#}M^{-1}(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}$$

$$B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}ABP^{-1}B^{*}A^{*}(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}=B^{+}_{NP}BP^{-1}B^{*}A^{*}(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}$$

$$B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}AB[P^{-1}(AB)^{*}(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}]^{*}=(P^{-1}B^{*}B^{*+}_{P^{-1}N^{-1}})^{*}B^{*}A^{*}(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}$$

$$B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}AB(AB)^{+}_{MP}ABP^{-1}=P^{-1}B^{*}B^{*+}_{P^{-1}N^{-1}}B^{*}A^{*}(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}$$

$$B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}ABP^{-1}=P^{-1}B^{*}A^{*}(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}$$

$$B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}ABP^{-1}=[P^{-1}(AB)^{*}(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}]^{*}$$

$$B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}ABP^{-1}=(AB)^{+}_{MP}(AB)P^{-1}$$

则

$$B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}AB=(AB)^{+}_{MP}AB \tag{2.8}$$

由(2.7) $AB(B^{+}_{NP}A^{+}_{MN})AB=AB(AB)^{+}_{MP}AB=AB$，

故

$$B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}\in AB\{1\}. \tag{2.9}$$

同样，由(2.7) $MAB(B^{+}_{NP}A^{+}_{MN})=M(AB)(AB)^{+}_{MP}$ 是 Hermite 矩阵，再由(2.8) $P(B^{+}_{NP}A^{+}_{MN})AB=P(AB)^{+}_{MP}AB$ 亦是 Hermite 矩阵.

而

$$\begin{aligned}B^{*}A^{*}&=B^{*}B^{*+}_{P^{-1}N^{-1}}B^{*}A^{*}A^{*+}_{N^{-1}M^{-1}}A^{*}\\&=B^{*}NN^{-1}B^{*+}_{P^{-1}N^{-1}}B^{*}NN^{-1}A^{*}A^{*+}_{N^{-1}M^{-1}}A^{*}\\&=B^{*}N(N^{-1}B^{*+}_{P^{-1}N^{-1}}B^{*})^{*}N(N^{-1}A^{*}A^{*+}_{N^{-1}M^{-1}})^{*}A^{*}\\&=B^{*}NBB^{+}_{NP}A^{+}_{MN}AN^{-1}A^{*}\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}&=B^{+}_{NP}BB^{+}_{NP}A^{+}_{MN}AA^{+}_{MN}\\&=B^{+}_{NP}N^{-1}(NBB^{+}_{NP})^{*}N^{-1}(NA^{+}_{MN}A)^{*}A^{+}_{MN}\\&=B^{+}_{NP}N^{-1}(B^{+}_{NP})^{*}B^{*}A^{*}(A^{*+}_{MN})^{*}NA^{+}_{MN}\end{aligned} \tag{2.11}$$

由(2.10)，(3,11) 知 $\mathrm{rank}(B^{+}_{NP}A^{+}_{MN})=\mathrm{rank}(B^{*}A^{*})=\mathrm{rank}(AB)$ (2.12)

由(2.9)及(2.12)即可推出 $B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}\in AB\{2\}$，

于是

$$(AB)^{+}_{MP}=B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}.$$

再证必要性：

$$\begin{aligned}B^{*}A^{*}=(AB)^{*}&=(AB)^{*}(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}(AB)^{*}\\&=P[P^{-1}(AB)^{*}(AB)^{*+}_{P^{-1}M^{-1}}]^{*}B^{*}A^{*}\\&=P(AB)^{+}_{MP}ABP^{-1}B^{*}A^{*},\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}P^{-1}B^{*}A^{*}&=(AB)^{+}_{MP}ABP^{-1}B^{*}A^{*}\\&=B^{+}_{NP}A^{+}_{MN}ABP^{-1}B^{*}A^{*}\end{aligned}$$

两边乘以 $ABP^{-1}B^*NB$，

$$\begin{aligned}ABP^{-1}B^*NBP^{-1}B^*A^* &= ABP^{-1}B^*NBB^+_{NP}A^+_{MN}ABP^{-1}B^*A^*\\ &= ABP^{-1}B^*(NBB^+_{NP})^*A^+_{MN}ABP^{-1}B^*A^*\\ &= ABP^{-1}B^*(B^+_{NP})^*B^*NA^+_{MN}ABP^{-1}B^*A^*\\ &= ABP^{-1}B^*B^{*+}_{P^{-1}N^{-1}}B^*NA^+_{MN}ABP^{-1}B^*A^*\\ &= ABP^{-1}B^*NA^+_{MN}ABP^{-1}B^*A^*\end{aligned}$$

故

$$ABP^{-1}B^*[N - NA^+_{MN}A]BP^{-1}B^*A^* = 0 \tag{2.13}$$

下面证明 $N - NA^+_{MN}A$ 是 Hermite 半正定阵，

显然 $NA^+_{MN}A$ 是 Hermite 矩阵.

由引理1.2，$NA^+_{MN}A = NN^{-1}V\begin{bmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*MU\begin{bmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*$

$$= V\begin{bmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}I_m\begin{bmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*$$

$$= V\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*$$

而 $V^*N^{-1}V = I_n$，有 $N = VV^*$，这里 V 非奇异

故

$$\begin{aligned}N - NA^+_{MN}A &= VV^* - V\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*\\ &= V[I_n - \begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}]V^*\\ &= V\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix}V^* \text{ 是半正定阵.}\end{aligned}$$

即 $N - NA^+_{MN}A$ 是 Hermite 半正定阵.

于是 $N - NA^+_{MN}A$ 可表示为：$N - NA^+_{MN}A = L\cdot L^*$，

由(2.13)，得 $ABP^{-1}B^*LL^*BP^{-1}B^*A^* = 0$

$$(L^*BP^{-1}B^*A^*)^*(L^*BP^{-1}B^*A^*) = 0,$$

即

$$L^*BP^{-1}B^*A^* = 0$$

于是

$$LL^*BP^{-1}B^*A^* = 0$$

也就是

$$(N - NA^+_{MN}A)BP^{-1}B^*A^* = 0$$

则有 $(I - A^+_{MN}A)BP^{-1}B^*A^* = 0$，这与(2.6)等价

用类似方法可得(2.5).

推论2.2 设 $A \in C^{m\times n}$，$B \in C^{n\times p}$，若 M,N,P 分别是 m,n,p 阶单位阵，则 $(AB)^+ = B^+A^+$ 的充要条件是

$$R(A^*AB) \subset R(B) \text{ 和 } R(BB^*A^*) \subset R(A^*)$$

注 推论2.2即是文献[2]的结果.

推论2.3 设 $A \in C^{m\times n}$，$B \in C^{n\times n}$，M,N 分别是 m,n 阶 Hermite 正定阵，

则

$$(AB)^+_{MN} = B^+_{NN}A^+_{MN} \tag{2.14}$$

成立的充要条件为 $R(A^\#AB) \subset R(B)$ 和 $R(BB^\#A^\#) \subset R(A^\#)$.

特别地，若 B 为非异阵，(2.14)为

$$(AB)^+_{MN} = B^{-1}A^+_{MN}$$

推论2.4 设 $A, E \in C^{m\times n}$，满足 $R(E) \subset R(A)$，$R(E^*) \subset R(A^*)$，且 $||A^+_{MN}E||_{NN} < 1$，

则有
$$(A+E)^+_{MN} = (I + A^+_{MN}E)^{-1}A^+_{MN} \quad (2.15)$$

证 由 $||A^+_{MN}E||_{NN} < 1$，知 $B = I + A^+_{MN}E$ 非奇异，

又
$$R(E) \subset R(A),$$

所以
$$A + E = A + AA^+_{MN}E = A(I + A^+_{MN}E) = AB.$$

下面只须证明 A 和 $B = I + A^+_{MN}E$ 有逆序性：

$$[A(I + A^+_{MN}E)]^+_{MN} = (I + A^+_{MN}E)^{-1}A^+_{MN}$$ 即可

由推论2.3知(2.14)成立，等价于

$$R(A^\# AB) \subset R(B) \quad (2.16)$$

和
$$R(BB^\# A^\#) \subset R(A^\#) \quad (2.17)$$

因为 B 非奇异，故(2.16)总成立.

另外
$$\begin{aligned} BB^\# A^\# &= B(AB)^\# \\ &= (I + A^+_{MN}E)[A+E]^\# \\ &= (I + A^+_{MN}E)(A^\# + E^\#) \\ &= A^\# + E^\# + A^+_{MN}E(A^\# + E^\#) \end{aligned} \quad (2.18)$$

由引理1.3及定义1.2知 $R(E^*) \subset R(A^*)$ 等价于 $R(E^\#) \subset R(A^\#)$，

由引理1.5，可得

$$R[A^+_{MN}E(A^\# + E^\#)] \subset R(A^+_{MN}) = R(A^\#) \quad (2.19)$$

从而由(2.18)，(2.19)知 $R(BB^\# A^\#) \subset R(A^\#)$ 成立，

推论2.4证毕.

注 推论2.3，推论2.4纠正并改进了文献[7]中引理3，引理4的结果.

本文是在导师王国荣、匡蛟勋两位先生的热情帮助下完成，谨此致谢.

参考文献

[1] Randall E. Cline, Note on the generalized inverse of the product of matrices, *SIAM Review* 1964, 6:57—58

[2] A. Ben-Israel, T. N. E. Greville, Generalized Inverse, Theory and Applications, John Wiley, New York, 1974

[3] G. W. Stewart, Introduction to matrix computations, Academic Press, New York, 1973

[4] C. F. Van Loan, Generalizing the singular value decomposition, *SIAM. J Numer. Anal*, 1976, 13:76—83

[5] Wang Guorong, A finite algorithm for computing the weighted Moore-Penrose inverse A^+_{MN}, *Applied Mathematics and Computation*, 1987, 23:277—289

[6] 王国荣，加权 Moore-Penrose 逆的扰动理论，应用数学与计算数学学报，创刊号，1987，1:48—60

[7] 陈果良，加权条件数在矩阵扰动问题中的极小性质，华东师范大学学报，1992，1:1—7

Weighted Moore-Penrose Inverse of Matrix Products

Wei Yimin

(Department of Mathematics)

Abstract

The representation and the reverse-order property of the weighted Moore-Penrose inverse of a matrix product are presented. Meanwhile, a mistake appeared in a certain paper in 1992 is pointed out.

Keywords weighted Moore-Penrose inverse; generalized singular value decomposition; reverse order; product of matrices