第24卷 第3期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 24, No. 3
1995年9月　　J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences)　　Sep. , 1995

矩阵之积的加权 Moore-Penrose 逆的逆序律

魏益民*
(复旦大学数学研究所)

提　要　给出了矩阵之积的加权 Moore-Penrose 逆的逆序律及其应用．

关键词　加权 Moore-Penrose 逆；逆序；加权 EP 矩阵；加权 Hermite 阵；加权正交投影算子；指标

中图法分类号　O151.21

0　引　言

Arghiriade 在文献[1]中讨论了 $(AB)^+=B^+A^+$ 成立的单个充分必要条件：A^*ABB^* 是 EP 矩阵，即

$$R(A^*ABB^*)=R(BB^*A^*A).$$

文献[2]给出了

$$(AB)^+_{MP}=B^+_{NP}A^+_{MN}.$$

成立的充分必要条件

$$R(A^\#AB)\subset R(B)\text{ 和 }R(BB^\#A^\#)\subset R(A^\#).$$

本文首先定义了加权 EP 矩阵、加权 Hermite 矩阵的概念，并给出了

$$(AB)^+_{MP}=B^+_{NP}A^+_{MN}.$$

成立的单个充分必要条件 $A^\#ABB^\#$ 是加权 EP 矩阵，即

$$R(A^\#ABB^\#)=R(BB^\#A^\#A).$$

这个结果推广了文献[1]中的相应结论．最后讨论了矩阵之积的加权 Moore-Penrose 逆的逆序律的若干应用．

1　准备知识

本节给出一些定义和引理，为下文做准备．

定义 1.1[3]　设 $A\in C_r^{m\times n}$，M，N 分别是 m 和 n 阶 Hermite 正定阵，则存在唯一的矩阵 $X\in C_r^{n\times m}$ 满足

$$AXA=A,\ XAX=X,\ (MAX)^*=MAX,\ (NXA)^*=NXA.$$

其中 X 称为矩阵 A 的加权 Moore-Penrose 逆，记作 $X=A^+_{MN}$．

收稿日期：1994-10-25

*　本校计算数学94届研究生

当 M 和 N 分别为 m 和 n 阶单位阵 I_m, I_n 时，$A^+_{I_m, I_n} = A^+$，A^+ 称为矩阵 A 的 Moore-Penrose 逆．当 A 为非异方阵时，$A^+ = A^{-1}$．

定义 1.2[4] $A \in C^{m\times n}$ 的加权共轭转置阵 $A^{\#} \in C^{n\times m}$ 定义为 $A^{\#} = N^{-1}A^*M$．其中 M，N 分别是 m 和 n 阶 Hermite 正定阵．

定义 1.3 $A \in C^{n\times n}$，若满足 $A^{\#} = A$，则称其为加权 Hermite 阵．特别，若 $M = N = I_n$ 时，有 $A^{\#} = A^*$，此时 A 即为 Hermite 阵．

定义 1.4 $A \in C^{n\times n}$，若满足 $R(A^*) = R(A)$，则称其为加权 EP 矩阵．特别，当 $M = N = I_n$ 时，有 $R(A^*) = R(A)$，此时 A 即为 EP 矩阵[5]．

定义 1.5 设 $U \in C^{n\times n}$，若 U 满足 $U = U^2 = U^{\#}$，则称 U 为加权正交投影算子．特别，当 $M = N = I_n$ 时，称 U 为正交投影算子[5]．

定义 1.6[5] 方阵 A 若满足 $R(A^2) = R(A)$，则称 A 的指标是 1．

引理 1.1[4] 加权共轭转置阵满足下列性质：$(A+B)^{\#} = A^{\#} + B^{\#}$，$(AB)^{\#} = B^{\#}A^{\#}$，$(A^{\#})^{\#} = A$，$(A^{\#})^* = (A^*)^{\#}$．

引理 1.2[2,3,5,6,7,8] 加权 Moore-Penrose 逆 A^+_{MN} 有下列性质：

(1) $A^+_{MN} = N^{-\frac{1}{2}}(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^+M^{\frac{1}{2}}$，

(2) $(A^+_{MN})^* = (A^*)^+_{N^{-1},M^{-1}}$，

(3) $(A^+_{MN})^{\#} = (A^{\#})^+_{NM}$，$(A^+_{MN})^+_{NM} = A$，

(4) $A^{\#} = A^+_{MN}AA^{\#} = A^{\#}AA^+_{MN}$，

(5) $(AA^+_{MN})^{\#} = AA^+_{MN}$，$(A^+_{MN}A)^{\#} = A^+_{MN}A$，

(6) $R(A^{\#}A) = R(A^{\#})$，$R(AA^{\#}) = R(A)$，

(7) $A^+_{MN} = (A^*MA)^+_{N^{-1},N}A^*M = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^+_{M,M^{-1}}$．

引理 1.3[2] 设 $A \in C^{m\times n}$，$B \in C^{n\times p}$，M, N, P 分别是 m, n 和 p 阶 Hermite 正定阵，则

$$(AB)^+_{MP} = B^+_{NP}A^+_{MN}$$

成立的充分必要条件是 $R(A^{\#}AB) \subset R(B)$ 和 $R(BB^{\#}A^{\#}) \subset R(A^{\#})$．

引理 1.4[5] 设 F 是指标为 1 的方阵，且 G 满足 $R(FG) \subset R(G)$，则 $R(FG) = R(F) \cap R(G)$．

2 主要结论

定理 2.1 设 $A \in C^{m\times n}$，$B \in C^{n\times p}$，M, N, P 分别是 m, n 和 p 阶 Hermite 正定阵，则

$$(AB)^+_{MP} = B^+_{NP}A^+_{MN}.$$

成立的充分必要条件是 $A^{\#}ABB^{\#}$ 是加权 EP 矩阵，即

$$R(A^{\#}ABB^{\#}) = R(BB^{\#}A^{\#}A).$$

证 只要证明 $A^{\#}ABB^{\#}$ 是加权 EP 矩阵的条件等价于引理 1.3 的两个条件，从而由引理 1.3 即得所需结果．

令 $C = A^{\#}ABB^{\#}$，显然

$$R(C) \subset R(A^{\#}AB), R(C^{\#}) \subset R(BB^{\#}A^{\#}).$$

由引理 1.2(5)

$$C(B^+_{NP})^{\#} = A^{\#}A[BB^{\#}(B^+_{NP})^{\#}] = A^{\#}A[B(B^+_{NP}B)^{\#}] =$$
$$A^{\#}A[BB^+_{NP}B] = A^{\#}AB,$$

$$C^{\#}A^{+}_{MN} = BB^{\#}(A^{\#}AA^{+}_{MN}) = BB^{\#}A^{\#},$$

由此可得　　$R(A^{\#}AB) \subset R(C),\ R(BB^{\#}A^{\#}) \subset R(C^{\#}).$

故成立　　$R(C) = R(A^{\#}AB),\ R(C^{\#}) = R(BB^{\#}A^{\#}).$

因此，只要证明 $R(C) = R(C^{\#})$ 成立的充分必要条件是 $R(C) \subset R(B)$ 和 $R(C^{\#}) \subset R(A^{\#})$.

先证明充分性(假设 $R(C) \subset R(B)$ 和 $R(C^{\#}) \subset R(A^{\#})$).

易得 $A^{\#}A$ 和 $BB^{\#}$ 是加权 Hermite 矩阵(定义 1.3)由引理 1.2(6)，可得

$$R[(A^{\#}A)^2] = A^{\#}AR(A^{\#}A) = A^{\#}AR(A^{\#}) = A^{\#}R(AA^{\#}) = A^{\#}R(A) = R(A^{\#}A)$$

根据定义 1.6，可知 $A^{\#}A$ 的指标是 1.

同理可证 $BB^{\#}$ 的指标也是 1.

又由引理 1.2(6)，

$$R(A^{\#}A) = R(A^{\#}),\ R(BB^{\#}) = R(B),$$

在引理 1.4 中取

$$F = A^{\#}A,\ G = BB^{\#},$$

由假设 $R(C) = R(FG) \subset R(B) = R(G)$，可得

$$R(C) = R(FG) = R(A^{\#}A) \cap R(B^{\#}B) = R(A^{\#}) \cap R(B).$$

注意到

$$C^{\#} = BB^{\#}A^{\#}A = GF,$$

同样由引理 1.4 得

$$R(C^{\#}) = R(GF) = R(BB^{\#}) \cap R(A^{\#}A) = R(B) \cap R(A^{\#})$$

故　　$R(C) = R(C^{\#})$，即 $A^{\#}ABB^{\#}$ 是加权 EP 阵.

再证必要性(假设 $R(C) = R(C^{\#})$).

由

$$R(C) = R(C^{\#}) = R(BB^{\#}A^{\#}A) \subset R(B),$$

及

$$R(C^{\#}) = R(C) = R(A^{\#}ABB^{\#}) \subset R(A^{\#}).$$

知　　$R(C) \subset R(B)$ 和 $R(C^{\#}) \subset R(A^{\#})$ 成立.　　□

在定理 2.1 中取 $M = I_m, N = I_n$ 即有如下推论

推论 2.1[1]　设 $A \in C^{m\times n}, B \in C^{n\times p}$，则 $(AB)^+ = B^+A^+$ 成立的充分必要条件是 A^*ABB^* 是 EP 矩阵，即

$$R(A^*ABB^*) = R(BB^*A^*A).$$

3　应　用

定理 3.1　设 $A \in C^{m\times n}$，M, N 分别是 m, n 阶 Hermite 正定阵，则

(1) $A^{+}_{MN} = (A^{\#}A)^{+}_{NN}A^{\#} = A^{\#}(AA^{\#})^{+}_{MM}$,

(2) $(A^{\#}A)^{+}_{NN} = (A^*MA)^{+}_{N^{-1},N}N,\ (AA^{\#})^{+}_{MM} = M^{-1}(AN^{-1}A^*)^{+}_{M,M^{-1}}$

证　易验证

$$(A^{\#})^{\#}A^{\#}AA^{\#} = AA^{\#}(A^{\#})^{\#}A^{\#} = AA^{\#}AA^{\#}$$

成立.

由定理 2.1 可得

$$(A^{\#}A)^+_{NN} = A^+_{MN}(A^{\#})^+_{NM}.$$

上式两边右乘 $A^{\#}$，利用引理 1.2(3)，(5)，得

$$(A^{\#}A)^+_{NN}A^{\#} = A^+_{MN}(A^{\#})^+_{NM}A^{\#} = A^+_{MN}(A^+_{MN})^{\#}A^{\#} =$$

$$A^+_{MN}(AA^+_{MN})^{\#} = A^+_{MN}AA^+_{MN} = A^+_{MN}.$$

同理可证

$$A^+_{MN} = A^{\#}(AA^{\#})^+_{MM}.$$

根据定理 2.1 可以对 $(A^{\#}A)^+_{NN}$ 或 $(AA^{\#})^+_{MM}$ 进一步化简.

因为

$$A^{\#}A = N^{-1}A^*MA = N^{-1}(A^*MA)$$

而

$$(N^{-1})^{\#}N^{-1}(A^*MA)(A^*MA)^{\#} = (N\cdot N^{-1}N)N^{-1}(A^*MA)N^{-1}(A^*MA)N^{-1} =$$

$$(A^*MA)N^{-1}(A^*MA)N^{-1} = (A^*MA)(A^*MA)^{\#}(N^{-1})^{\#}N^{-1}.$$

即

$$(A^{\#}A)^+_{NN} = [N^{-1}(A^*MA)]^+_{NN}.$$

满足定理 2.1 的条件，

故

$$(A^{\#}A)^+_{NN} = (A^*MA)^+_{N^{-1}N}\cdot(N^{-1})^+_{NN^{-1}} = (A^*MA)^+_{N^{-1}N}\cdot N.$$

同理

$$(AA^{\#})^+_{MM} = M^{-1}(AN^{-1}A^*)^+_{M,M^{-1}}.$$ □

注 由定理 3.1 的(1)和(2)立得引理 1.2 的(7)式.

推论 3.1[5] 设 $A\in C^{m\times n}$，则

$$A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+.$$

定理 3.2 设 $U\in C^{n\times n}$，$V\in C^{n\times p}$，N，P 分别是 n，p 阶 Hermite 正定阵，若 U 是加权正交设影算子，且 $UV=V$，则

$$(UV)^+_{NP} = V^+_{NP}U.$$

证 由题设知

$$U^{\#}UVV^{\#} = UVV^{\#} = VV^{\#},$$

且

$$VV^{\#}U^{\#}U = VV^{\#}U^{\#} = V(UV)^{\#} = VV^{\#}.$$

故

$$U^{\#}UVV^{\#} = VV^{\#}U^{\#}U = VV^{\#}.$$

即满足定理 2.1 的条件. 由定义 1.1，直接可验证 $U^+_{NN} = U$.

根据定理 2.1，

$$(UV)^+_{NP} = V^+_{NP}U^+_{NN} = V^+_{NP}U.$$ □

推论 3.2[6] 设 $U\in C^{n\times n}$，$V\in C^{n\times p}$. U 是正交投影算子，若 $UV=V$，则

$$(UV)^+ = V^+U.$$

定理 3.3 设 $A\in C^{m\times n}$，$B\in C^{n\times p}$，M，N，P 分别为 m，n 和 p 阶 Hermite 正定阵，若

$AB=0$，则

$$B_{NP}^{+}A_{MN}^{+}=0.$$

证　易验证定理 2.1 的条件满足，故

$$B_{NP}^{+}A_{MN}^{+}=(AB)_{MP}^{+}=0.$$

推论 3.3[6]　设 $A\in C^{m\times n}, B\in C^{n\times p}$，若 $AB=0$，则 $B^{+}A^{+}=0$.

推论 3.4[7]　设 $A\in C^{m\times n}, B\in C^{n\times p}$，$M, N, P$ 分别是 m, n 和 p 阶 Hermite 正定阵，若 $AB_{NP}^{+}=0$，则 $BA_{MN}^{+}=0$.

参考文献

1 Arghiriade E. Remarques sur l'inverse généralizse d'un produit de matrices. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur, 1967, 42(8): 621～625

2 魏益民．矩阵之积的加权 Moore-Penrose 逆．上海师范大学学报(自然科学版)，1994，22(2)：102～109

3 Rao C R, Mitra S K. Generalized Inverse of Matrices and its Applications. New York: Wiley, 1971

4 王国荣．加权 Moore-Penrose 逆的扰动理论．应用数学与计算数学，创刊号，1987，1：48～60

5 Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized Inverses: Theory and Applications. Wiley-Interscience, New York, 1974

6 何旭初，孙文瑜．广义逆矩阵引论．江苏科技出版社，1991

7 Miao Jianming. General Expressions for the Moore-Penrose Inverse of a 2×2 Block Matrix. Linear Algebra and its Applications, 1991, 151: 1～15

8 陈果良．加权条件数在矩阵扰动问题中的极小性质．华东师范大学学报，1992，1：1～7

9 王国荣．矩阵与算子广义逆．北京：科学出版社，1994

The Reverse-order Law of Weighted Moore-Penrose of Matrix Products

Wei Yimin

(Institute of Mathematics, Fudan University)

Abstract　The reverse-order law of weighted Moore-Penrose inverse of matrix prodects and its applications are presented.

Key words　weighted Moore-Penrose inverse; reverse order; weighted EP matrix; weighted Hermite matrix; weighted orthogonal projector; index