非广义多边形路的2连通图的圈数

施永兵

(上海师范大学 数学科学学院, 上海 200234)

摘　要: 若 G 中一条路 P 的每个内点 v 都有 $d_G(v)=2$, 则称 P 为 G 的简单路. 一个2连通可平面图 G 称为广义多边形路, 如果用下述方法得到的图 G^* 是路: 对应于 $\overline{G}$ 的每个内部面 f ($\overline{G}$ 是 G 的平图) 有一个 G^* 的顶点 f^*, G^* 的两个顶点 f^* 和 g^* 在 G^* 中相邻当且仅当 $\overline{G}$ 中相应的两个内部面的边界交于一条 $\overline{G}$ 的简单路. 令 $j=|E(G)|-|V(G)|$和 $m(G)$ 为 G 的含圈数. 论文证明了下述结果: 设 G 是非广义多边形路的2连通图, 则 $m(G)\geq\frac{j^2+5j}{2}-1$.

关键词: 2连通图; 广义多边形树; 圈数

中图分类号: O157.5　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-5137(1999)03-0017-04

0　引　言

若 G 中一条路 P 的每个内点都有 $d_G(v)=2$, 则称 P 为 G 的简单路. 一个2连通可平面图 G 称为广义多边形树(或广义多边形路), 如果用下述方法得到的图 G^* 是树(或路): 对应于 $\overline{G}$ 的每个内部面 f ($\overline{G}$ 是 G 的平图) 有一个 G^* 的顶点 f^*, G^* 的两个顶点 f^* 和 g^* 在 G^* 中相邻当且仅当 $\overline{G}$ 中相应的两个内部面的边界交于一条 $\overline{G}$ 的简单路. 显然广义多边形路也是广义多边形树. 许绍杰在[3]中已证明了下述

定理0.1　2连通图 G 没有同胚于 K_4 的子图当且仅当 G 是广义多形树.

令 $j=|E(G)|-|V(G)|$, $m(G)$ 为 G 的含圈数. 作者在[1]中证明了下述:

定理0.2　设 G 是2连通图, 则

$$m(G)\geq(j+1)(j+2)/2.$$

作者又在[3]中证明了下述:

定理0.3　设 G 是含同胚于 K_4 的子图的2连通图, 则

$$m(G)\geq\frac{j^2+5j}{2}.$$

本文将在附加条件下改进定理0.2, 而推广定理0.3得到下述结果.

主要定理　设 G 是非广义多边形路的2连通图, 则

收稿日期: 1999-05-12

作者简介: 施永兵(1947-), 男, 上海师范大学数学科学学院教授, 从事图论研究.

$$m(G) \geq \frac{j^2+5j}{2}-1.$$

这一结果将对 P Erdös[4]于 1975 年提出的确定具有 n 个顶点没有等长圈的图的最大边数 $f(n)$ 的问题有重要意义.

1 一些定义

设 G 是一个 2 连通图, C 是 G 的任一圈. 我们假定把不在 C 上的顶点和边全画在 C 的内部. 令 $P_0=C$, 用下述方法构造路的序列 $P_1, P_2, \cdots, P_k$: 对 $i=1, 2, \cdots, k$, 从 $G-\bigcup_{j=0}^{i-1}E(P_j)$ 中取路 P_i, 使它的两个端点且仅仅两个端点在 $\bigcup_{j=0}^{i-1}P_j$ 中, 而 $E(G)-\bigcup_{j=0}^{k}E(P_j)=\varnothing$. 称 $(P_1, P_2, \cdots, P_k)$ 是 $G-E(C)$ 的一个路分解. 每个 $P_i(i=1, 2, \cdots, k)$, 称为 G 的关于 C 的内路. 在不引起混淆时, 简称为 G 的内路.

给定图 G, 对任意圈 C 和任一 $G-E(C)$ 的路分解, 路分解中路的数目是唯一确定的. 这一结果由下述命题给出.

命题 1 给定 2 连通图 G, C 是 G 的任一圈, 则 $G-E(C)$ 的任一路分解的内路数等于 $|E(G)|-|V(G)|$.

如果两条内路的端点都在圈 C 上, 则显然这两条路是内不相交的.

设 P_1 和 P_2 是 G 的两条内路, 如果存在 4 个顶点 u, v, u' 和 v', 使 $P_1=uv$ 和 $P_2=u'v'$ 且依次序 u, u', v, v' 按顺时针方向出现在圈 C 上, 则称 P_1 和 P_2 是互相偏斜的.

设 P_1 和 P_2 是 G 的两条内路, 若 P_1 和 P_2 不是互相偏斜的, 则称 P_1 和 P_2 是互相平行的.

两条内路 P 和 R 称为互相独立的, 若存在一条内路 Q 满足 P, Q 和 R 是平行的, 并且 P 和 R 被 Q 分离(P, R, Q 的端点可以是重合的).

G 的一族平行内路称为相关的, 如果其中的任意两条内路都不是独立的.

G 的一族平行内路(至少 3 条)称为独立的, 如果其中没有 3 条内路是相关的.

容易看出, 若图 G 是多边形树, 则 G 是由一个圈 C 以及 C 内 $|E(G)|-|V(G)|$ 条互相平行的内路组成. 若 G 是广义多边形路, 则 G 是由一个圈 C 以及 C 内 $|E(G)|-|V(G)|$ 条互相平行的内路组成, 且当 $|E(G)|-|V(G)|\geq 3$ 时, 这些内路必定是独立的.

2 主要定理的证明

为证明主要定理, 我们先证下述

引理 2 设 G 是非广义多边形路的广义多边形树, 则 G 中存在圈 C 使 $G-E(C)$ 的任一路分解有 3 条相关的内路.

证明 设 G 是非广义多边形路的广义多边形树, 则 G 是可平面图. 令 $\overline{G}$ 是 G 的平图, 则 $\overline{G}$ 中存在 4 个内部面 f_1, f_2, f_3 和 f_4 使得 f_4 的边界 C_4 和 $f_i(i\in\{1, 2, 3\})$ 的边界 C_i 交于一条简单路 P_i. 令 P_i 表示 $C_i-E(P_i)$ 的非平凡分支($i=1, 2, 3$), 易知 P_i 是路. 从 C_4 中用路 P_1', P_2 和 P_3 分别替代路 P_1, P_2 和 P_3 得到一个圈 C, 显然 $G-E(C)$ 的任一路分解存在 3 条

相关内路 P_1, P_2 **和** P_3 . □

主要定理的证明　若 G 含有同胚于 K_4 的子图, 则根据定理 0. 3,

$$m(G) \geq \frac{j^2+5j}{2} > \frac{j^2+5j}{2} - 1,$$

故定理成立.

因此我们不妨假设 G 不含同胚于 K_4 的子图, 则根据定理 0. 1, G 是广义多边形树. 由于 G 不是广义多边形路, 从引理 2 推出 G 中存在圈 C 使 $G-E(C)$ 的任一路分解都有 3 条相关内路. 现对 $G-E(C)$ 的内路数 $j=|E(G)|-|V(G)|$ 用数学归纳法.

当 $j=3$ 时, G 恰有 3 条相关内路, 容易算出 $m(G)=11$, 而 $(j^2+5j)/2-1=(3^2+5\times3)-1=11$, 故定理对 $j=3$ 成立.

假设当 $j=k(k\geq3)$ 时定理成立, 即 $m(G)\geq(k^2+5k)/2-1$. 现考虑 $j=k+1$. 设 C 是 G 的一个圈且 C 内部有 3 条相关内路 (u_1,v_1), (u_2,v_2) 和 (u_3,v_3). 构造 $G-E(C)$ 的路分解 $(P_1, P_2, \cdots, P_{k+1})$ 使 $P_1=(u_1,v_1)$, $P_2=(u_2,v_2)$ 和 $P_3=(u_3,v_3)$.

令 G^* 是从 G 中通过删除 P_{k+1} 的所有边和内点得到的 G 的子图. 显然 G^* 也是 2 连通图且有 3 条相关内路. 根据归纳假设 $m(G^*)\geq(k^2+5k)/2-1$.

现在计算 G 中含 P_{k+1} 的圈数. 由于 G 是 2 连通图, G 的任意两条边位于一个公共圈上, 推出对每个整数 $1\leq i\leq k$, 路 P_{k+1} 和 P_i 的某一子路位于一个公共圈上. 令 $G_{k+1}=G$, $P^*_{k+1}=P_{k+1}$, 用下述过程构造一个圈序列 $C_k, C_{k-1}, \cdots, C_4$: 对 $i=k, k-1, \cdots, 4$, 我们能从 G_{i+1} 中选择圈 C_i 使它含有路 P^*_{i+1} 和恰有一个 P_i 的非平凡子路. 令 G_i 是 $G_i \doteq G_{i+1}-(E(C_i)\cap E(P_i))$ 的非平凡分支. 容易看出 $G_i-E(C)$ 有一个路分解 $(P_1, P_2, \cdots, P_{i-1}, P^*_i)$, 其中 $P^*_i=P^*_{i+1}$ (若 C_i 包含 P_i) 或 $P^*_i=P^*_{i+1}\cup H_i$ (H_i 是从 $H_i \doteq P_i-(E(C_i)\cap E(P_i))$ 通过删除孤立点得到的). 因此 G_i 是 2 连通图且对每个 i ($i=k, k-1, \cdots, 4$), P^*_i 含 P_{k+1}. 特别地, $G_4-E(C)$ 有一个路分解 (P_1, P_2, P_3, P^*_4), 其中 P^*_4 含 P_{k+1}.

容易算出 $m(G_4)\geq17$. 令 G_3 是 $G_3 \doteq G_4-E(P^*_4)$ 的非平凡分支, 则 $m(G_3)=11$. 因此 G_4 至少有 6 个包含 P^*_4 的不同的圈. 从而 G 至少有 $k-3+6$ 个含有 P_{k+1} 的不同的圈. 因此

$$\begin{aligned} m(G) &\geq m(G^*)+k-3+6 \geq \\ &(k^2+5k)/2-1+k-3+6= \\ &[(k+1)^2+5(k+1)]/2-1. \end{aligned}$$

□

参考文献:

[1] SHI Yong-bing. On maximum cycle distributed graphs[J]. Discrete Math, 1988, 71: 57-71.

[2] SHI Yong-bing. On simple MCD graphs containing a subgraph homeomorphic to K_4 [J]. Discrete Math, 1994, 126: 325-338.

[3] XU Shao-ji. Classes of Chromatically equivalent graphs and polygon trees[J]. Discrete Math, 1994, 133: 267-278.

[4] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. Macmillan, New York, 1976.

The Number of Cycles in a 2-Connected Graph Being Not a Generalized Polygon Path

SHI Yong-bing
(College of Mathmatical Science, Shanghai Teachers University, Shanghai, 200234, China)

Abstract: A path P in G is called a simple path of G if, for each interior vertex v of P, $d_G(v) = 2$. A 2-connected planar graph G is called a generalized polygon path if G^* formed by the following method is a path: corresponding to each interior face f of $\overline{G}$ ($\overline{G}$ is a plane graph of G), there is a vertex f^* of G^*; two vertices f^* and g^* are adjacent in G^* if and only if the boundaries of the corresponding interior faces of $\overline{G}$ intesect a simple path of $\overline{G}$. Let $j = |E(G)| - |V(G)|$ and $m(G)$ be the number of cycles in G. We prove the following result: Let G be a 2-connected graph being not a generalized polygon path, then $m(G) \geq \frac{j^2 + 5j}{2} - 1$.

Key words: 2-connected graph; generalized polygon path; cycle