第29卷第4期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 29, No. 4
2000年12月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Dec. 2000

8-12 ②

关于非广义多边形路的2连通简单MCD图

施永兵

(上海师范大学 数学科学学院，上海 200234)

O157.5

摘　要：令 S_n 是具有 n 个顶点没有两个等长圈的简单图的集合. 若 S_n 中不存在图 G' 使 $|E(G')| > |E(G)|$，则称图 G 是简单 MCD 图. 若简单 MCD 图 G 是 2 连通的，则称 G 是 2 连通简单 MCD 图. 若 G 中一条路 P 的每个内点 v 都有 $d_G(v) = 2$，则称 P 为 G 的简单路. 一个 2 连通可平面图 G 称为广义多边形路，如果用下述方法得到图 G^* 是路：对应于 $\bar{G}$ 的每个内部面 f($\bar{G}$ 是 G 的平图)有一个 G^* 的顶点 f^*，G^* 的两个顶点 f^* 和 g^* 在 G^* 中相邻当且仅当 $\bar{G}$ 中相应的两个内部面的边界交于一条 $\bar{G}$ 的简单路. 作者证明了下述结果：当且仅当 $n \in \{10, 11, 14, 15, 16, 21, 22\}$ 时，存在 n 个顶点的非广义多边形路的 2 连通简单 MCD 图.

关键词：图；MCD 图；2 连通简单图　非广义多边形路

中图分类号：O157.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2000)04-0009-04

令 $F_n(S_n)$ 是具有 n 个顶点没有两个等长圈图(简单图)的集合. $F_n(S_n)$ 中具有最大边数的图称为MCD(简单MCD图). 若简单MCD图 G 是2连通的，则称 G 是2连通简单MCD图. 用 $f(n)$($f^*(n)$) 表示 MCD 图(简单 MCD 图)的边数. 确定 $f(n)$ 是 Erdos 于 1975 年提出的一个至今未解决的问题(见[1]p247，问题11). 与确定 $f(n)$ 直接有关的问题是确定MCD图.

由[2]，对每个整数 $n \geq 2$，存在 n 个顶点含环和 2 圈的 MCD 图. 从而我们从每个 $n-1$ 个顶点的简单 MCD 图出发，构造 n 个顶点的 MCD 图，并且 $f(n) = f^*(n-1) + 3$. 于是确定 $f(n)$ 和 MCD 图的问题转化为确定 $f^*(n)$ 和简单 MCD 问题.

若 G 中一条路 P 的每个内点 v 都有 $d_G(v) = 2$，则称 P 为 G 的简单路. 一个 2 连通可平面图 G 称为广义多边形树(或广义多边形路). 如果用下述方法得到图 G^* 是树(或路)：对应于 $\bar{G}$ 的每个内部面 f ($\bar{G}$ 是 G 的平图)有一个 G^* 的顶点 f^*，G^* 的两个顶点 f^* 和 g^* 在 G^* 中是相邻的当且仅当 $\bar{G}$ 中相应的两个内部面的边界交于一条 $\bar{G}$ 的简单路. 显然广义多边形路也是广义多边形树. 许绍杰在[6]中已证明了下述结果.

定理 A　2 连通简单图 G 没有同胚于 K_4 的子图，当且仅当 G 是广义多边形树.

作者在[4]中已证明了下述结果.

收稿日期：2000-05-20

作者简介：施永兵(1947-)，男，上海师范大学数学科学学院教授，从事图论研究.

定理 B 当且仅当 $n\in\{10,11,14,15,16,21,22\}$ 时，存在 n 个顶点的包含同胚于 K_4 的子图的 2 连通简单 MCD 图.

本文将推广定理 B，得到下述主要结果.

定理 1 当且仅当 $n\in\{10,11,14,15,16,21,22\}$ 时，存在 n 个顶点的非广义多边形路的 2 连通简单 MCD 图.

由于当 $n\in\{10,11,14,15,16,21,22\}$ 时，由定理 B 知存在 n 个顶点的包含同胚于 K_4 的子图的 2 连通简单 MCD 图. 因此也存在 n 个顶点的非广义多边形路的 2 连通简单 MCD 图. 故对定理 1，事实上只要证明下述定理.

定理 2 当 $n\notin\{10,11,14,15,16,21,22\}$ 时，不存在 n 个顶点的非广义多边形路的 2 连通简单 MCD 图.

为证定理 2，首先引入路分解概念.

设 G 是一个 2 连通简单图，C 是 G 的任一圈. 本文总认为把不在 C 上的顶点和边全画在 C 的内部. 令 $P_0=C$，且下述方法构造路的序列 $P_1,P_2,\cdots,P_k$：对 $i=1,2,\cdots,k$，从 $G-\bigcup_{j=0}^{i-1}E(P_j)$ 中取路 P_i，使它的两个端点且仅仅两个端点在 $\bigcup_{j=0}^{i-1}P_j$ 中，而 $E(G)-\bigcup_{j=0}^{i-1}E(P_j)=\Phi$. 易见，因 G 是 2 连通的，故上述方法可行的. 我们称 $(P_1,P_2,\cdots,P_k)$ 是 $G-E(C)$ 的一个路分解. 每个 $P_i(i=1,2,\cdots,k)$，称为 G 的关于 C 的内路，在不引起混淆时，简称为 G 的内路.

关于 G 的内路数，我们也有下述

命题 A[2] 给定 2 连通简单图 G，C 是 G 中任一圈，j 是 $G-E(C)$ 的任一路分解的内路数，则 $j=|E(G)|-|V(G)|$.

应用路分解概念和数学归纳法，容易证明下述

命题 B[7] 设 G 是非广义多边形路的 2 连通简单 MCD 图，$j=|E(G)|-|V(G)|$，则 G 的含圈数 $m(G)\geqslant(j^2+5j)/2-1$.

定理 2 的证明 用反证法. 假设定理不成立，则对某一自然数 $n\notin\{10,11,14,15,16,21,22\}$，存在具有 n 个顶点的非广义多边形路的 2 连通简单 MCD 图.

由文献[3]中已得到 $f^*(n)\geqslant n+k+[(\sqrt{8n-24k^2+8k+1}-5)/2]$，其中

$$k=[(\sqrt{21n-5}+11)/21],\tag{1}$$

所以 G 至少有 j 条内路，这里

$$j=k+[(\sqrt{8n-24k^2+8k+1}-5)/2].\tag{2}$$

由命题 B，$m(G)\geqslant(j^2+5j)/2-1$. 于是

$$n\geqslant(j^2+5j)/2+1.\tag{3}$$

从(2)得

$$n<(j^2+5j)/2+5+(7k-2-2j)(k-1)/2.\tag{4}$$

从(1)得

$$21k^2-22k+6\leqslant n<21k^2+20k+5.\tag{5}$$

结合(2)和(5)得

$$j - 1 < 7k \leqslant j + 6 . \tag{6}$$

从(4)和(6)式的右边推出

$$n < (j^2 + 5j)/2 + 5 + (4 - j)(k - 1)/2 . \tag{7}$$

若 $k \geqslant 3$，则从(6) 推出 $j \geqslant 15$. 此时从(7) 得 $n < (j^2 + 5j)/2 - 6$，与(3) 矛盾.

若 $k = 2$，则从(5) 和(6) 分别得到 $46 \leqslant n < 129$ 和 $8 \leqslant j < 15$. 此时从(7)得

$$n < (j^2 + 5j)/2 + 3. \tag{8}$$

结合(3)和(8)，得

$$n = (j^2 + 5j)/2 + i, \ i = 1,2. \tag{9}$$

若 $k = 1$，则 $5 \leqslant n < 46$ 且 $1 \leqslant j < 8$. 从(7)推出

$$n < (j^2 + 5j)/2 + 5 . \tag{10}$$

结合(3)和(10)，得

$$n = (j^2 + 5j)/2 + i, \ i = 1,2,3,4. \tag{11}$$

由于 G 不是广义多边形路的 2 连通图，所以 $j \geqslant 2$，结合(9) 和(11) 仅有下述三种情况：

情况 1　$n = (j^2 + 5j)/2 + i$，$i = 3,4$. 且 $10 \leqslant n \leqslant 45$. 此时 $n \in \{10,11,15,16,21,22,28,29,36,37,45\}$. 由于 $n \notin \{10,11,14,15,16,21,22\}$，所以 $n \in \{28,29,36,37,45\}$. 我们能证明不存在 28 个顶点的非广义多边形路的 2 连通简单 MCD 图(另文发表).

对每个 $n \in \{29,36,37,45\}$，我们可以构造 n 个顶点和 $n + 1 + [(\sqrt{8n - 15} - 3)/2]$ 条边的没有两个等长圈的简单 MCD 图[4]. 因此 $f^*(n) \geqslant n + 1 + [(\sqrt{8n - 15} - 3)/2]$. 这与[4] 中命题 3.3 矛盾.

情况 2　$n = (j^2 + 5j)/2 + 1$，且 $8 \leqslant n < 129$.

根据命题 B，$m(G) \geqslant (j^2 + 5j)/2 - 1$. 又从 G 是简单 MCD 图，推出 $m(G) \geqslant (j^2 + 5j)/2 - 1$. 显 G 是 UPC 图（UPC 图的定义见文献[4]）. 从[4] 中命题 3.1 知，G 不含同胚于 K_4 子图的. 因此 G 是外可平面的 UPC 图. 根据文献[5] 中定理 2 及 $n \geqslant 8$ 得到 $G \in \{G_8^{(1)}, G_8^{(2)}\}$. 于是 G 是广义多边形路，矛盾.

情况 3　$n = (j^2 + 5j)/2 + 2$，且 $9 \leqslant n < 129$.

由于 G 是简单 MCD 图，故 $m(G) \leqslant (j^2 + 5j)/2$. 此时仅考虑两种情况.

情况 3.1　$m(G) = (j^2 + 5j)/2$. 此时 G 必含同胚于 K_4 的子图，结合[4] 中命题 3.2 知 G 恰有一对偏斜桥. 因此 G 是 3-UPC[1] 图. 根据[4] 中定理 2.8 知 $G \in \{G_{14}^{(1)}, G_{14}^{(2)}, G_{14}^{(3)}\}$. 于是 $n = 14$，矛盾.

情况 3.2　$m(G) \leqslant (j^2 + 5j)/2 - 1$. 根据命题 B，$m(G) \geqslant (j^2 + 5j)/2 - 1$. 因此 $m(G) = (j^2 + 5j)/2 - 1$ 且 G 不含同胚于 K_4 的子图. 我们能证明此时 G 有两个等长圈(另文发表)，矛盾.

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. Macmillan, New York, 1976.

[2] SHI Yong-bing. On maximum cycle-distributed graphs[J]. Discrete Math, 1988, 71: 57-71.

[3] SHI Yong-bing. The number of edges in a maximum cycle distributed graph[J]. Discrete Math, 1992, 104: 205-209.

[4] SHI Yong-bing. On simple MCD graphs containing a subgraph homeomorphic to K_4 [J]. Discrete Math, 1994, 126: 325-338.

[5] SHI Yong-bing, YAP H P, TEO S K. On uniquely r- pancyclic graphs[J]. Ann New York Acad Sci, 1989, 576: 487-499.

[6] XU Shao-ji. Classes of chromatically equivalent graphs and polygon trees[J]. Discrete Math, 1994, 133: 267-278.

[7] 施永兵. 非广义多边形路的2连通图的圈数[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 1999, 28(3): 17-20.

On 2-connected Simple MCD-graphs Being not Generalized Polygon Paths

SHI Yong-bing

(College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Let S_n be the set of simple graphs on n vertices in which no two cycles have the same length. A graph G in S_n is called a simple MCD-graph if there exists no graph G' in S_n with $|E(G')| > |E(G)|$. A path P in G is called a simple path of G if, for each interior vertex v of P, $d_G(v) = 2$. A planar graph G is called a generalized polygon path if G^* formed by the following method is a path Corresponding to each interior face f of $\bar{G}$($\bar{G}$ is a plane graph G) there is a vertex f^* of G^*; two vertices f^* and g^* are adjacent in G^* if and only if the boundaries of the corresponding interior faces of $\bar{G}$ intersect on a simple path of $\bar{G}$. We prove that there exists a 2-connected simple MCD-graph on n vertices being not a generalized polygon path if and only if $n \in \{10, 11, 14, 15, 16, 21, 22\}$.

Key words: cycle; MCD-graph; 2-connected simple graph