# 关于分布函数的Fuzzy积分的收敛定理*

黄金丽　　郑道朋

本文建立了一系列关于分布函数的收敛定理，其中主要的结论是〔定理 5〕：当弱分布函数 $\lim\limits_{k\to\infty}G_k(x)=G_0(x)$ 时有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_F h_k om=f_F h_o om$。

## 引　言

1972年M.Sugeno等在众多的技术应用中建立了类似于概率期望的Fuzzy积分概念(〔3〕-〔7〕)。1974 年 M. Sugeno 在博士论文〔1〕中提出了Fuzzy积分中重要的 Beppo—Levi 型性质（也称准不动点定理），1979年N.Batle和E.Trillas在〔2〕中给出严格的证明。

本文从准不动点定理出发，建立一系列关于分布函数的 Fuzzy 积分收敛定理，为Fuzzy积分的逼近估值，提供了理论基础。

## 一、基 本 概 念

1.1 $F$—测定空间的定义：

设$X$为非空集，$\mathsf{F}$是含有$\phi$，$X$，闭于集合的单调增加极限的$X$的子集类；

映射$m$：$\mathsf{F}\to[o,1]$满足下列条件：

$FM1$)、$m(\phi)=o$，$m(X)=1$；

$$\forall A,\ B\in\mathsf{F},\ A\subseteq B\Longrightarrow m(A)\leqslant m(B)$$

$FM2$)、$\forall F$，$F_n\in\mathsf{F}$，$F_n\uparrow F\Longrightarrow m(F_n)\uparrow m(F)$，则称$(X,\ \mathsf{F},\ m)$为$F$—测度空间。($F$—指Fuzzy)。

1.2 $F$—可测函数的定义：

设论域$X$上的Fuzzy子集之隶属函数为：

$h(x)$：$X\to[o,1]$，若$\forall\alpha\in[o,1]$，有$h^{-1}[\alpha,1]\in\mathsf{F}$ ($h^{-1}(\alpha,1]\in\mathsf{F}$)，则称$h(x)$为强(弱)可测函数。

记作：$h(x)\in\mathsf{P}_F(X)(\breve{\mathsf{P}}_F(X))$，

这里$\mathsf{P}_F(X)(\breve{\mathsf{P}}_F(X))$是$X$上全部强(弱)可测函数之集合。

1.3 $F$—积分定义：

设$(X,\ \mathsf{F},\ m)$为$F$—测度空间，$h\in\mathsf{P}_F(X)$则称，

本文于80年10月9日收到

* 本文承蒙上海铁道学院楼世博老师，上海师院刘俊杰老师等的指导、帮助，在此深表感谢！

$$\overset{-}{f}hom = \mathop{Sup}_{x\in[0,1]} x\wedge m(h^{-1}[x, 1])$$

$$\overset{=}{f}hom = \mathop{Sup}_{x\in[0,1]} x\wedge m(h^{-1}(x, 1])$$

分别为$h(x)$关于测度$m$的强，弱$F$—积分。

1.4 准不动点定理：

设$G(x)$：$[0, 1]\to[0, 1]$单调下降，

则称
$$x_0 = \mathop{Sup}_{x\in[0,1]} x\wedge G(x)$$

为$G$的准不动点。(Pseudo—fixed point)。

在[2]中给出了：$x_0$是$G$的准不动点的充要条件是：

$$G(x_0+0)\leqslant x_0\leqslant G(x_0-0)$$

1.5 在[2]中证明了当$h$强可测时必弱可测：

且
$$\overset{=}{f}hom = \overset{-}{f}hom$$

1.6 分布函数的定义：

设$h(x)\in\widetilde{P}_F(X)$则称$m(h^{-1}(x, 1])$为$h$的弱分布函数。

## 二、Fuzzy 积分收敛定理

**定理 1**：设$(X, \mathrm{F}, m)$为$F$—测度空间，$h(x)\in\widetilde{P}_F(X)$，

$$G(x)\triangleq m(h^{-1}(x, 1]), \quad 令 \quad G_0 = \mathop{Inf}_{x\in[0,1]} |G(x)-x|,$$

则有(1)
$$G_0 = (x_0 - G(x_0))\wedge(G(x_0-0)-x_0)$$

(2)
$$G(x'')\leqslant G(x_0+0)\leqslant x_0\leqslant G(x_0-0)\leqslant G(x')$$

$$\forall x', x''\in[0, 1], \ x'<x_0<x''$$

(最短距离定理)。

证：$\forall x>x_0$，有$G(x)\leqslant G(x_0)=G(x_0+0)\leqslant x_0<x$，因而$|G(x)-x|=x-G(x)\geqslant x_0-G(x_0)$。

$$\forall x<x_0 有 G(x)\geqslant G(x_0-0)\geqslant x_0>x$$

因而 $|G(x)-x|=G(x)-x>G(x_0-0)-x_0$

∵ $x=x_0$时，$G(x_0)=G(x_0+0)\leqslant x_0$

∴ $|G(x_0)-x_0|=x_0-G(x_0)$

由于$G_0 = \mathrm{Min}(\mathop{Inf}_{x\in(0,x_0)}|G(x)-x|, \mathop{Inf}_{x\in[x_0,1]}|G(x)-x|)$

即得结论(1)。

而结论(2)显然成立。

〔系〕：若$G(x)\epsilon C[o, 1]$时，有$G_0=o$且准不动点 $x_o$是方程$x=G(x)$的唯一根。（即$x_o$是曲线$y=G(x)$与直线$y=x$的唯一交点。）

证：由〔定理 1〕有：$x_o=G(x_o)$

倘若$\exists x_1\epsilon[o, 1]$，$x_1\neq x_o$使$x_1=G(x_1)$

则(i)　当$x_1>x_o$时，有$G(x_1)\leqslant G(x_o)=x_o<x_1$矛盾。

(ii)　当$x_1<x_o$时，有$x_1<x_o=G(x_o)\leqslant G(x_1)$ 矛盾。

∴方程$x=G(x)$除$x_o$外无他根。

下列定理中都假定可测类F闭于集合的有限交。

**定理 2**：设$(X, \mathsf{F}, m_k)$为$F$—测度空间，$k=0, 1, 2, \cdots$

$h(x)\epsilon \mathsf{P}_F(X)$，集$F\epsilon \mathsf{F}$，

$$\forall x\epsilon[o, 1], G_K(x)\triangleq m_k(h^{-1}(x, 1])\downarrow m_o(h^{-1}(x, 1])\triangleq G_0(x) \tag{2.1}$$
$$(G_K(x)\triangleq m_k(h^{-1}(x, 1]\cap F)\downarrow m_o(h^{-1}(x, 1]\cap F)\triangleq G_0(x))$$

则　(1)　$\int hom_k\downarrow\int hom_o$

(2)　$(\int_F hom_k\downarrow\int_F hom_o)$

证：1)由(2.1)有$G_K(x)\geqslant G_0(x)$，$\forall k=1, 2, \cdots$，

从而　$\overline{\int} hom_k\geqslant\overline{\int} hom_0$；

记：$x_k\triangleq\overline{\int} hom_k$，$k=0, 1, 2\cdots$，则$x_o\leqslant x_k$。

2)由（基本概念1.4）有$\forall k=0, 1, 2, \cdots$，

$$G_K(x_k+o)\leqslant x_k\leqslant G_K(x_k-o) \tag{2.2}$$

依(2.1)有：
$$G_K(x_o)\downarrow G_0(x_o)=G_0(x_o+o) \tag{2.3}$$

3)显然有　$G_0(x_o)=G_0(x_o+o)\leqslant x_o\leqslant x_k\leqslant G_k(x_k-o)\leqslant G_K(x_o)$

由(2.3)式推出：　$x_k\downarrow x_o$，

考虑到　$\overline{\int} hom_k=\int hom_k$

即得(1)结论。

4)将$h(x)$改为$1_F(x)\wedge h(x)$，（其中$1_F(x)$是集$F$上的特征函数）就可得(2)结论。

**定理 3**：设$(X, \mathsf{F}, m_k)$为$F$—测度空间，$k=0, 1, 2, \cdots$，$h(x)\epsilon \mathsf{P}_F(X)$；集$F\epsilon \mathsf{F}$，

$$\forall x\epsilon[o, 1], G_K(x)\triangleq m_k(h^{-1}(x, 1])\uparrow m_o(h^{-1}(x, 1])\triangleq G_0(x) \tag{2.4}$$
$$(G_K(x)\triangleq m_k(h^{-1}(x, 1]\cap F)\uparrow m_o(h^{-1}(x, 1]\cap F)\triangleq G_0(x))$$

则(1)　$\int hom_k\uparrow\int hom_o$

(2)　$(\int_F hom_k\uparrow\int_F hom_o)$

证：1) 由(2.4)有$G_K(x)\leqslant G_0(x)$，$\forall k=1, 2, \cdots$，

从而　$x_k\triangleq\overline{\int} hom_k\leqslant\overline{\int} hom_o\triangleq x_o$

2) 由（基本概念1.4）有$\forall$ $k=0, 1, 2, \cdots$，

$$G_K(x_k+o)\leqslant x_k\leqslant G_K(x_k-o)$$

依(2.4)有，
$$G_K(x_o)\uparrow G_0(x_o)=G_0(x_o+o) \tag{2.5}$$

3）∵　　$o\leqslant x_k\leqslant x_o$，$\forall k=1, 2, \cdots$，

∴　　$\exists t\in[o, 1]$，使$\lim\limits_{k\to\infty} x_k=t$

现只需证　　$t=x_o$ 即可

倘若　　$t<x_o$ 有$G_K(t)\uparrow G_0(t)\geqslant G_0(x_o-o)\geqslant x_o$

因　　$x_k\leqslant t$　故 $x_k\geqslant G_k(x_k+o)=G_k(x_k)\geqslant G_k(t)$

上式中令 $k\to\infty$ 取极限即得　$t\geqslant x_o$ 与假设矛盾。∴$t=x_o$

利用$\overline{f} hom_k=f hom_k$，　$k=0, 1, 2, \cdots$，即得结论(1)。

4）把$h(x)$换为$l_F^{(x)}\wedge h(x)$就得结论(2)。

**定理 4：**　设$(X, \mathrm{F}, m)$为$F$—测度空间，

$h_k(x)\in\widetilde{\mathrm{P}}_F(X)$，$k=0, 1, 2, \cdots$，集$F\in\mathrm{F}$，

且　　$G_K(x)\triangleq m(h_k^{-1}(x, 1]\cap F)\downarrow(或\uparrow)m(h_0^{-1}(x, 1]\cap F)\triangleq G_0(x)$

则　　$\int_F h_k om\downarrow(或\uparrow)\int_F h_o om$

证：根据〔2〕有　　$\overline{\int} h_k om=\mathop{Sup}\limits_{x\in[o, 1]}[x\wedge G_K(x)]$

其后证明同定理2，3。

**定理5**：设$(X, \mathrm{F}, m)$为$F$—测度空间，F闭于集合的有限交和有限并；

$h_k(x)\in\widetilde{\mathrm{P}}_F(X)$，$k=0, 1, 2, \cdots$，集$F\in\mathrm{F}$；$h_k(x)$的分布函数为：

$$G_K(x)\triangleq m(h^{-1}{}_k(x, 1]\cap F),\ k=0, 1, 2, \cdots,$$

$$\forall x\in[o, 1],\ \lim_{k\to\infty}G_K(x)=G_0(x)$$

则　　$$\lim_{k\to\infty}\int_F h_k om=\int_F h_o om$$

（关于分布函数的$F$一积分收敛定理）

证：　　先令集　$F=X$

1）∵$|G_K(x)-G_0(x)|=[(G_k(x)\vee G_0(x))-G_0(x)]+[G_0(x)-(G_K(x)\wedge G_0(x))]$

令　　$L_K(x)\triangleq G_K(x)\wedge G_0(x)$

$H_K(x)\triangleq G_K(x)\vee G_0(x)$

则　$L_K(\cdot)$，$H_K(\cdot)$：$[o, 1]\to[o, 1]$，是单调下降右连续的函数。

显然有
$$L_K(x)\leqslant G_K(x)\leqslant H_K(x)\qquad \forall x\in[o, 1]$$
$$L_K(x)\leqslant G_0(x)\leqslant H_K(x)$$

故
$$|G_K(x)-G_0(x)|\geqslant H_K(x)-G_0(x)\geqslant 0$$
$$|G_K(x)-G_0(x)|\geqslant G_0(x)-L_K(x)\geqslant 0$$

因此　　$$\lim_{k\to\infty}H_K(x)=\lim_{k\to\infty}L_K(x)=G_0(x)$$

将　$G_K(x)$，$\overline{f} hom_k$，　$\overline{f} hom_o$依次换为$H_K(x)$，$\mathop{Sup}\limits_{x\in[o, 1]}[x\wedge H_K(x)]$，$\mathop{Sup}\limits_{x\in[o, 1]}[x\wedge G_0(x)]$再利用定理2的方法可证：

$$\lim_{k\to\infty}\mathop{Sup}_{x\in[o, 1]}[x\wedge H_K(x)]=\mathop{Sup}_{x\in[o, 1]}[x\wedge G_0(x)]$$

2）在定理 3 中，将$G_K(x)$，$\overline{\int} hom_k$，$\overline{\int} hom_o$依次换为$L_K(x)$，$\underset{x\in[o,\ 1]}{Sup}[x\wedge L_K(x)]$，$\underset{x\in[o,\ 1]}{Sup}[x\wedge G_O(x)]$。

并令 $$x_k=\underset{x\in[o,\ 1]}{Sup}[x\wedge L_K(x)],\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

立即可得定理 3 的1)，2)之平行结果，仅需注意此时的（2.5）式应换为$\lim\limits_{k\to\infty} L_K(x_o)=G_O(x_o)=G_O(x_o+o)$，它不一定是单调极限。

3）要证明 $$\lim_{k\to\infty} x_k=x_o;$$

用反证法：倘若$\{x_k\}$不收敛于$x_o$，$\because\{x_k\}\subseteq R^1$空间之紧集$[o,\ 1]$，且$x_k\leqslant x_o$，$\forall k=1,\ 2,\ \cdots$，则在$\{x_k\}$中可选到子列$\{x_{k_\nu}\ \ \nu=1,\ 2\cdots\}$使
$$\lim_{\nu\to\infty} x_{k\nu}=t<x_o,\qquad t\epsilon[o,\ 1]$$

现考察$L_{k_\nu}(t)$：

$\because$ $$L_K(x_k+o)\leqslant x_k\leqslant L_K(x_k-o)$$
$$G_O(x_o+o)\leqslant x_o\leqslant G_O(x_o-o)$$

$\therefore$ $$\lim_{\nu\to\infty} L_{k_\nu}(t)=G_O(t)\geqslant G_O(x_o-o)\geqslant x_o$$

因$\lim\limits_{\nu\to\infty} x_{k_\nu}=t$，故可取$t'$，$t<t'<x_o$，必存在正整数$N$使当$\nu>N$时有$x_{k_\nu}<t'<x_o$，

于是 $$t'>x_{k_\nu}\geqslant L_{k_\nu}(x_{k_\nu}+o)=L_{k_\nu}(x_{k_\nu})\geqslant L_{k_\nu}(t')$$

同理可证： $$\lim_{\nu\to\infty} L_{k_\nu}(t')=G_O(t')\geqslant G_O(x_o-o)\geqslant x_o$$

在前式中令$\nu\to\infty$取极限得：
$$t'\geqslant\lim_{\nu\to\infty} L_{k_\nu}(t')\geqslant x_o$$

与$t'<x_o$矛盾。

故 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x_o$　　即　　$x_o=\lim\limits_{k\to\infty}\underset{x\epsilon[o,\ 1]}{Sup}[x\wedge L_k(x)]$

因为 $$\underset{x\in[0,1]}{Sup}[x\wedge L_K(x)]\leqslant\overline{\int} h_k om=\underset{x\in[o,\ 1]}{Sup}[x\wedge G_K(x)]\leqslant\underset{x\in[o,\ 1]}{Sup}[x\wedge H_K(x)]$$

所以 $$\lim_{k\to\infty}\overline{\int} h_k om=\overline{\int} h_o om=x_o$$

因 $$\overline{\int} h_k om=\int h_k om,\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

从而 $$\lim_{k\to\infty}\int h_k om=\int h_o om$$

4）若集$F\epsilon\mathscr{F}$ 则把$h_k(x)$，$h_o(x)$分别换为$h_k(x)\wedge 1_F(x)$，$h_o(x)\wedge 1_F(x)$即得
$$\lim_{k\to\infty}\int_F h_k om=\int_F h_o om$$

## 三、结　　论

本文给出分布函数的 Fuzzy 积分收敛定理，在数学上关于积分的收敛定理有其重要意义。在现实生活中可用Fuzzy积分对具有暧昧事物进行估值（评价）。例如每次估值所得的 Fuzzy 积分值$\{x_n\}=\{0.7,0.5,0.8,\ 0.63,\cdots\}$，它的每一个值都不足以令人信服，若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_o$则我

们显然用$x_0$作为该事物的合理的估值。这就涉及到Fuzzy积分 $x_n$在什么条件下收敛？其极限是什么？也就是我们所探讨的问题。

## 参 考 文 献

〔1〕M.Sugeno: "Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications", Doctoral dissertation, Tokyo Institute of Technology, (1974)

〔2〕N.Batle and E. Trillas, "Entropy and Fuzzy Integral", J. Math. Anal. Appl, 69, 469～474 (1979)

〔3〕菅野: "Fuzzy測度とFuzzy积分", 计测自动制御学会论文集, 8, 2, 218～226(1972)

〔4〕L. A. Zadeh, "Probability Measures of Fuzzy Events" J. Math. Anal. Appl.23,421～427 (1968)

〔5〕M. Sugeno, "Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals", Trans. S. I. C. E (In Japanese), Vol.8, №2, (1972)

〔6〕M. Sugeno; "Constructing Fuzzy Measures and Grading Similarity of patterns by Fuzzy Integrals", Trans. S. I. C. E. (In Japanese), Vol. 9 (1973)

〔7〕M. Sugeno and T.Terano: "An Approach to the Identification of Human Characteristics by Applying Fuzzy Integrals" Proc. 3rd IFAC Sympo. On Identification and System parameter Estimation, Hauge (1973)

## Convergence Theorems of Fuzzy Integral for Distribution Functions

Huang Jinli Zheng Daopeng

### Abstract

This Paper deals with convergence theorems of Fuzzy Integral. It is the major result that if a sequence of weak distribution functions $\{G_k\}$ converges to a weak distribution function $G_0$ everywhere, then the sequence of corresponding F-integrals also converges and converges to the F-integral of the limit function.

Moreover, during the process of these proofs we have applied an analytic method to fuzzy integral theory.