广义 Petersen 图 P(n, 2) 的 Hamilton 圈的个数

黄济华
（浙江冶金经济专科学校）

蔡小涛
（上海师范学院）

摘 要

本文讨论了广义 Petersen 图 P(n,2) 的 Hamilton 圈的个数 $h(n)$。文献 [2] 中，Watkins 证明了 $h(n)>0$ 当且仅当 $n\neq 5(mod\ 6)$，Thomason 在文献 [3] 中证明了 $h(6k+3)=3$，本文给出了其余情况之下 $h(n)$ 的值。

广义 Petersen 图 $P(n,k)$ 定义如下：$P(n,k)=G(V,E)$，其中 $V=A\cup B$，$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$，$A\cap B=\varnothing$，且 $E=\{a_ib_i\}\cup\{a_ia_{i+1}\}\cup\{b_ib_{i+k}\}$，$1\leqslant i\leqslant n$，这里后两个集合中边的下标在 $mod\ n$ 之下取值。

广义 Petersen 图引起了广泛的讨论，其中 Hamilton 性是一个重要方面。关于这方面的工作可参阅文献[1]。

本文主要寻求 $P(n,2)$ 的 Hamilton 圈（以下简称H圈）的个数，记成 $h(n)$。现有的结论有以下两个：

(1) Watkins 在文献[2]中证明了 $h(n)>0$ 当且仅当 $n\neq 5(mod\ 6)$。

(2) Thomason 在文献[3]中证明了 $h(6k+3)=3$。

为了方便起见，将 $P(n,2)$ 画成如图 1 中的形式，并称A为外部点集，B为内部点集。

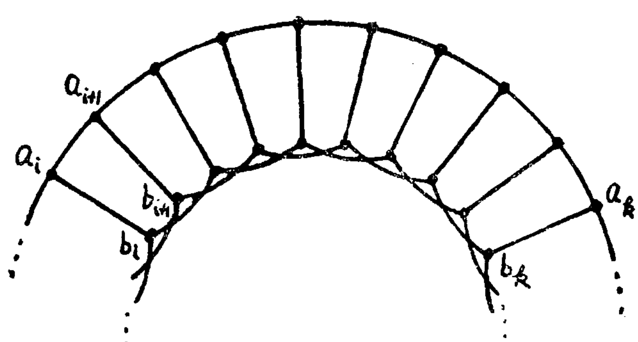

图 1

本文于 1983 年 9 月 30 日收到

据定义，易证：

引理 h 是 $P(n,2)$ 的一个H圈，则 h 必是图2中，$N=\{L_2,\ N_{2t}\}$ 或 $M=\{M_2,\ M'_2,\ M_3\}$的一些“节”的首尾相接的形式；且有：

（i） M中的任一节只能与M中的节相连接，N中的任一节只能与N中的节相连接；

（ii） 若 h 仅含M中的节，则 $h=M_2,\ \overbrace{M_3,M_3,\cdots,M_3}^{k\text{个}},\ M'_2$ 或 $h=\overbrace{M_3,M_3,\cdots,M_3}^{k\text{个}}$；

（iii） 若 h 仅含N中的节，则 L_2 和 N_{2t} 间隔出现（ t 为大于零的整数）。

命题 1 n 为奇数时，$P(n,2)$ 不含N型H圈

证明：N型H圈中每一节都含偶数个外部点，由引理即得证。

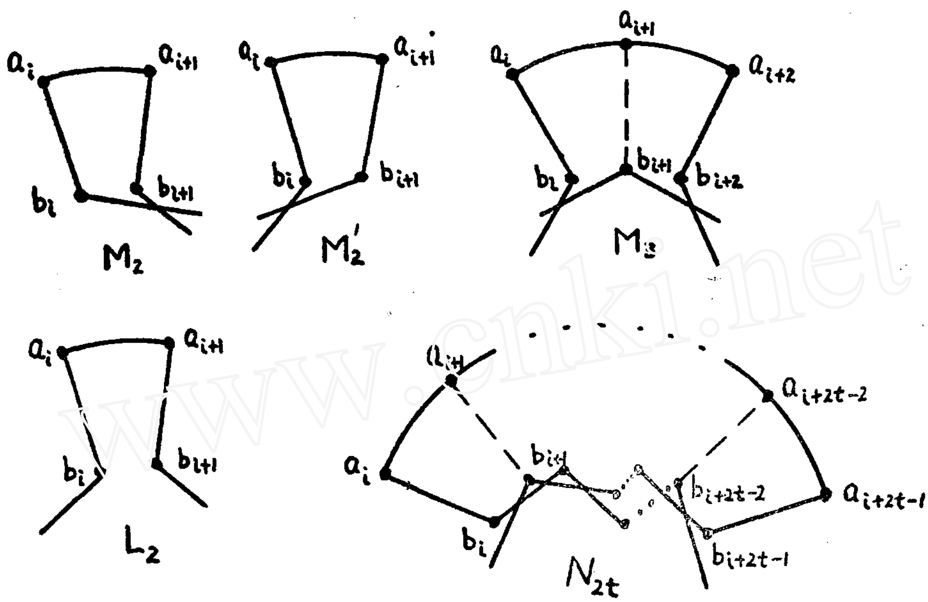

图 2

命题 2 $P(n,2)$ 含H圈 $M_3,\ \cdots,\ M_3$ 当且仅当 $n\equiv 3(mod\ 6)$

证明：若 $P(n,2)$ 含H圈 $h=M_3,\cdots,M_3$，总可令 $\frac{n}{3}=k$。在此情形之下，对 $P(n,2)$ 构作图，

$$G_k(V,\ E),$$

其中
$$V=\{u_i,\ v_i\,|\,i=1,\ \cdots,\ k\}$$
$$E=\{u_i v_{i-1},\ u_i v_{i+1}\,|\,i=1,\ \cdots,\ k\},$$

其下标在 $mod\ k$ 之下取值(如图3)。

实际上，每个 u_i 相应于一个 M_3 中的三个相连的外部顶点；v_i 相应于这个 M_3 中间的那个内部点和它的两个内部邻点，G_k 中的边 $u_j v_{j+1}$ 相应于相邻的二个 M_3 节中一条由第一个 M_3 的外部顶点到第二个 M_3 中间的那个内部顶点的一条路。由此可见，$P(n,2)$ 有 H圈$M_3,\ \cdots,\ M_3$ 当且仅当 G_k 中有H圈。而 G_k 有H圈当且仅当 k 为奇数。

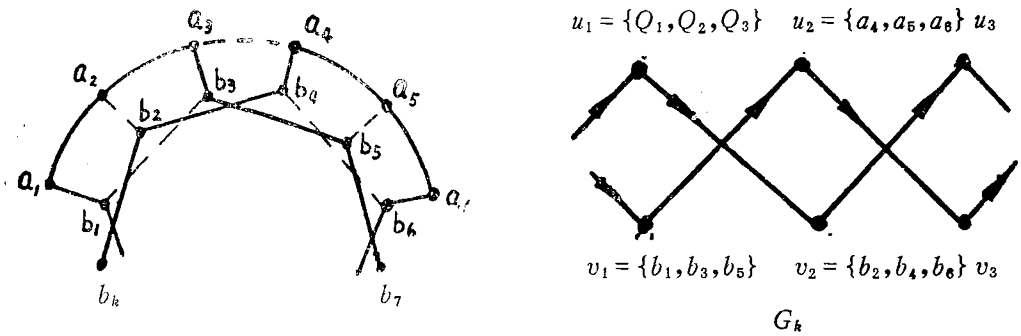

图 3

命题 3 $P(n,\ 2)$ 有H圈 $M_2,\ \overbrace{M_3,\cdots,M_3}^{k\text{个}},M'_2$ 当且仅当 $n\equiv 1$ 或 $4\ (mod\ 6)$。

证明：构作图 $G'_k=(V'_1E'_1)$，其中 $V'=\{u_i,\ v_i|i=1,\cdots,\ k\}\cup\{x,\ y\}$， $E'=\{u_i v_{i+1}|i=1,\ \cdots,\ k-1\}\cup\{u_i v_{i-1}|i=2,\ \cdots,\ k\}\cup\{x u_1,\ xv_1,\ u_k y,\ v_k y\}$。

这里 u_i 与 v_i 同命题2中构作的图 G_k 一样，而 x 相应于 M_2； y 相应于 M'_2。这样，$P(n,\ 2)$ 中存在H圈 $M_2,\ \overbrace{M_3,\cdots,M_3}^{k\text{个}},\ M'_2$ 当且仅当 G'_k 存在一个H圈。而事实上对任一 $k\geqslant 1$ 都有 $G'_k=C_{2k+2}$，，命题成立。

综合以上三个命题，有

定理 1 $h(6k+1)=6k+1,\ h(6k+3)=3,\ h(6k+5)=0$

证明：n 为奇数时，由命题1知 $P(n,\ 2)$ 无N型H圈，而由引理，$P(n,\ 2)$ 的 H 圈仅可能有命题2、3给出的形式，从而推出 $h(6k+5)=0$。由命题2，$P(6k+3,2)$ 恰含 $M_3,\ M_3,\cdots M_3$ 型H圈，这样的圈恰有3个。由命题3，$P(6k+1,\ 2)$ 恰含 $M_2,\ M_3,\ \cdots,\ M_3,\ M'_2$ 型H圈，这样的圈共有 $6k+1$ 个。

这个定理中后两个式子已被证明过，而第一个式子是以前未发现的。

下面就 n 为偶数时讨论 $h(n)$。由命题3可知，仅当 $n\equiv 4\ (mod\ 6)$ 时 $P(n,2)$ 含 M 型 H 圈，这样的圈有 n 个，所以仅需要考虑N型H圈的个数。

命题 4 $P(2n,\ 2)$ 含H圈

$$h=L_2,\ N_{2d_1},\ L_2,\ N_{2d_2},\ \cdots,\ L_2,\ L_{2d_k}$$

当且仅当

$$2\sum_{i=1}^{k} d_i+2k=2n$$

证明：必要性是显然的。

首先，显然有 $P(2m,\ 2)$ 含H圈 $L_2,\ N_2,\ L_2,\ N_2,\ \cdots,\ L_2,N_2$ 当且仅当

$$2m\equiv 0(mod\ 4)。$$

对 $2n$ 的每一个分解 $2n=2\sum_{i=1}^{k}d_i+2k$，先构作 $P(4k,\ 2)$ 的一个 $L_2,\ N_2,\ L_2,\ N_2,\cdots,\ L_2,\ N_2$ 型H圈，再把每个 N_2 分别扩张成一个 N_{2d_i}，由于 N_2 与 N_{2di} 对 L_2 的连接方式一致，故扩张成的

$$L_2,\ N_{2d_1},\ L_2 N_{2d_2},\cdots,\ L_2,N_{2d_k}$$

恰为 $P(2n,\ 2)$ 的一个H圈。

由上述命题可知，寻求 $P(2n, 2)$ 的一个 N 型 H 圈，只要考察 L_2 的位置即可。为此，对 $P(2n, 2)$ 的外部顶点重新标号 $1, 1', 2, 2', \cdots, n, n'$。

对每一自然数 m，集 $\{1,2,\cdots n\}$ 的一切 m 元子集，按顺序排列为 $i_1, i_2, \cdots, i_m$，若满足

$$i_{j+1}-i_j>1 \quad j=1, \cdots, m-1 \text{ 和 } n+i_1-i_m>1 \qquad (*)$$

则可导出 $P(2n, 2)$ 的两个包含 m 个 L_2 的 N 型 H 圈：第一个取 i_j、i'_j 和相应的两个内部顶点为 L_2，每两个之间用一个 N_{2d_j} 相接（这里 $d_j=i_{j+1}-i_j-1\geqslant 1$）；另一个取 i'_j、i_j+1 和两个相应的内部顶点为 L_2，每二个 L_2 中用一个 $N_{2}d_j$ 相接。反之，易见任一 $P(2n, 2)$ 的 N 型 H 圈必是 $\{1, \cdots, n\}$ 的某个 m 元顺序子集所导出的两个 H 圈之一。因此记 A_m 为 $\{1,\cdots, n\}$ 的满足（$*$）的 m 元顺序子集的个数，则 $P(2n, 2)$ 的 N 型 H 圈的个数恰为

$$2\sum_{m=1}^{n} A_m$$

运用 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 r 元无重不相连组合数为 $\binom{n-r+1}{r}$ 的公式（这个公式可在许多组合论的书中找到，例如文献[4]），经过简单的转换，可知

$$A_n=\binom{n-m+1}{m}-\binom{n-m-1}{m-2}=\binom{n-m}{m}+\binom{n-m-1}{m-1}$$

再利用命题 3，即得：

定理 2

$$h(2n)=\begin{cases} 2\sum\limits_{m=1}^{n}\left[\binom{n-m+1}{m}-\binom{n-m-1}{m-2}\right]=2\sum\limits_{m=1}^{[n/2]}\left[\binom{n-m}{m}+\binom{n-m-1}{m-1}\right] & \text{当 } 2n\equiv 0, 2 \pmod 6 \\ 2n+2\sum\limits_{m=1}^{n}\left[\binom{n-m+1}{m}-\binom{n-m-1}{m-2}\right]=2n+2\sum\limits_{m=1}^{[n/2]}\left[\binom{n-m}{m}+\binom{n-m-1}{m-1}\right] & \text{当 } 2n\equiv 4 \pmod 6 \end{cases}$$

参 考 文 献

[1] Brian Alspach Peter, J. Robinson, Moshe Rosenfeld, A Result on Hamilton Cycles in Generalized Petersen Graph, J. Combin. Theory Series B, 1981. Vol. 31 No. 2.

[2] Watkins, J. Combin. Theory, 1969. 6, 152-164.

[3] Andrew Thomason, J. G. Theory, 1982 Vol 6 No. 2, 219.

[4] Marshall Hall, Combinatorial Theory, Blaisdell Publishing Company, A Division of Ginn and Company, Waltham, Massachusetts, 1967. 3.

Numbers of Hamilton Cycles on Generalized Petersen Graph P(n, 2)

Huang Jihua Cai Xiaotao

Abstract

In this paper, the numbers h(n) of Hamilton cycles on generalized petersen graph p(n, 2) are discussed. Watkins[2] has shown that $h(n)>0$ if and only if $m\not\equiv 5 \pmod 6$. Thomason[3] has also derived $h(6k+3)=3$. The numbers h(n) for the rest are given in this paper.