上海师范学院学报 1983年 第3期

Fuzzy关系的Sup-T合成

吴 望 名

摘 要

本文把Schweizer和Sklar提出的t-范T引进到Fuzzy关系的合成中去，建立Fuzzy关系Sup-T合成的若干性质，讨论了T传递性、T相似关系，并得出了T型Fuzzy关系方程的最大解。

一、引 言

六十年代初，Schweizer和Sklar[1]引入的t-范概念，近来已被应用到Fuzzy群[2][3]、Fuzzy环[10]、Fuzzy线性空间和Fuzzy凸集[5][6]中，由于t-范可作为反映逻辑“与”的一般算子，且算子$\wedge$(min)，·（代数积），$\mathbb{A}$（有界积）等都是特殊的t-范，因此t-范进入Fuzzy数学，使Fuzzy集的运算更具一般性。本文尝试把t-范引进到Fuzzy关系的合成中来，讨论了Fuzzy关系的sup-T合成的若干问题。虽然sup-T合成比Zadeh[7]定义的sup-*合成稍狭，但由于连续t-范（本文只限于讨论连续t-范）的特性，sup-T合成保留了sup-min合成的许多好的性质，已有的建立在sup-min合成基础上的Fuzzy关系理论有相当部分可拓广到sup-T合成上来。本文主要结果是：

1. 建立Fuzzy关系的sup-T合成的若干基本性质。
2. 讨论了Fuzzy关系的T传递性和T传递闭包，得到Fuzzy关系是T传递的一个充要条件。
3. 引入T相似关系的概念，建立T相似关系与T度量、度量之间的本质联系。
4. 解决了求T型Fuzzy关系方程的最大解问题。

本文中未加定义的术语与记号均采用[4]。

二、Sup-T合成的基本性质

设X、Y、Z是给定的非空集。对于$X\times Y$上任一Fuzzy关系R（即$R\in\mathscr{F}(X\times Y)$），$Y\times Z$上任一Fuzzy关系$S$，定义$X\times Z$上的Fuzzy关系$R\textcircled{T}S$如下：

$$\mu_{R\textcircled{T}S}(x,z)=\operatorname*{Sup}_{y\in Y}[\mu_R(x,y)\top\mu_S(y,z)],\qquad \forall x\in X,\ \forall z\in Z$$

其中T是连续的t-范，即T:$[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$满足下列性质： $\forall a,b,c\in[0,1]$

$(T1)$ $$a\top b=b\top a$$

本文于1983年1月24日收到

(T2) $$(a\top b)\top c = a\top(b\top c)$$
(T3) $$a\top 1 = a$$
(T4) $$\text{若 } a\leqslant b \text{ 则 } a\top c\leqslant b\top c$$
(T5) $$a\top x \text{ 在 } [0,1] \text{ 上关于 } x \text{ 连续}$$

由于 $\wedge$, $\cdot$, $\wedge$ 都是连续的 t 范，因此 sup-min 合成、sup-product 合成以及 sup-$\wedge$ 合成都是 sup-$\top$合成的特例。但 T_w（其定义见[4]）是不连续的 t-范，因此 sup-T_w 合成不在我们讨论的 sup-$\top$合成范围之内。

命题 2.1 设 $a_i\in[0,1]$，$i\in I$，I 是某个非空指标集，$b\in[0,1]$。若$\top$是连续 t-范，则

$$(\sup_{i\in I} a_i)\top b = \sup_{i\in I}(a_i\top b)$$

证 由 $(T4)$，易得

$$(\sup_{i\in I} a_i)\top b \geqslant \sup_{i\in I}(a_i\top b)$$

令 $c=\sup_{i\in I} a_i$，若 $c\neq 0$，对任意 $\varepsilon\in(0,c]$，必存在一个 $i_0\in I$，使 $a_{i_0}\geqslant c-\varepsilon$，从而

$$\sup_{i\in I}(a_i\top b)\geqslant a_{i_0}\top b\geqslant (c-\varepsilon)\top b$$

由 $(T5)$ 得

$$\operatorname{suo}_{i\in P}(a_i\top b)\geqslant \lim_{\varepsilon\to 0}[(c-\varepsilon)\top b] = [\lim_{\varepsilon\to 0}(c-\varepsilon)]\top b$$
$$= c\top b = (\sup_{i\in I} a_i)\top b$$

因此

$$\sup_{i\in I}(a_i\top b) = (\sup_{i\in I} a_i)\top b$$

若 $c=0$，则 $\forall i\in I$，$a_i=0$，又 $0\top b\leqslant 0\top 1=0$，从而 $0\top b=0$，于是

$$(\sup_{i\in I} a_i)\top b = \sup_{i\in I}(a_i\top b) = 0 \qquad \square$$

命题 2.2 设 $R\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times Y)$，$S\in\tilde{\mathscr{P}}(Y\times Z)$，$T\in\tilde{\mathscr{P}}(Z\times W)$

则

$$(R\textcircled{T}S)\textcircled{T}T = R\textcircled{T}(S\textcircled{T}T)$$

证

$$\begin{aligned}
&\mu_{(R\circledast S)\circledast T}(x,w)\\
&=\sup_{z\in Z}\sup_{y\in Y}\{[\mu_R(x,y)\top\mu_s(y,z)]\top\mu_T(z,w)\}\\
&=\sup_{y\in Y}\sup_{z\in Z}\{\mu_R(x,y)\top[\mu_s(y,z)\top\mu_T(z,w)]\}\\
&=\mu_{R\circledast(S\circledast T)}(x,w) \qquad \forall x\in X,\ \forall w\in W
\end{aligned} \qquad \square$$

命题 2.3 设 $R,R_i\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times Y)$，$S,S_i\in\tilde{\mathscr{P}}(Y\times Z)$，$i\in I$，$I$是某个非空指标集，则

(i) $$R\textcircled{T}(\bigcup_{i\in I} S_i) = \bigcup_{i\in I}[R\textcircled{T}S_i]$$

(ii) $$R\textcircled{T}(\bigcap_{i\in I} S_i)\subseteq \bigcap_{i\in I}[R\textcircled{T}S_i]$$

(iii) $$(\bigcup_{i\in I} R_i)\textcircled{T}S = \bigcup_{i\in I}[R_i\textcircled{T}S]$$

(iv) $$(\bigcap_{i\in I} R_i)\textcircled{T}S\subseteq \bigcap_{i\in I}[R_i\textcircled{T}S]$$

证 $$\forall x\in X,\qquad \forall z\in Z$$

$$\mu_{R\circledast\bigcup_{i\in I}S_i}(x,z)$$

$$=\sup_{y\in Y}[\mu_R(x,y)\top\mu_{\underset{i\in I}{\cup}S_i}(y,z)]$$

$$=\sup_{y\in Y}[\mu_R(x,y)\top\sup_{i\in I}\mu_{S_i}(y,z)]$$

$$=\sup_{y\in Y}\sup_{i\in I}[\mu_R(x,y)\top\mu_{S_i}(y,z)]$$

$$=\sup_{i\in I}\sup_{y\in Y}[\mu_R(x,y)\top\mu_{S_i}(y,z)]$$

$$=\sup_{i\in I}\mu_{R\circledT S_i}(x,z)=\mu_{\underset{i\in I}{\cup}(R\circledT S_i)}(x,z)$$

$$\mu_{R\circledT\underset{i\in I}{\cap}S_i}(x,z)=\sup_{y\in Y}[\mu_R(x,y)\top\mu_{\underset{i\in I}{\cap}S_i}(y,z)]$$

$$=\sup_{y\in Y}[\mu_R(x,y)\top\inf_{i\in I}\mu_{S_i}(y,z)]\leqslant\sup_{y\in Y}\inf_{i\in I}[\mu_R(x,y)\top\mu_{S_i}(y,z)]$$

$$\leqslant\inf_{i\in I}\sup_{y\in Y}[\mu_R(x,y)\top\mu_{S_i}(y,z)]=\mu_{\underset{i\in I}{\cap}(R\circledT S_i)}(x,z)$$

因此得(i)。(ii)。类似可证(iii)，(iv)。 □

命题 2.4 设 $R\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times Y)$， S_1，$S_2\in\tilde{\mathscr{P}}(Y\times Z)$ $T\in\tilde{\mathscr{P}}(Z\times W)$。若 $S_1\subseteq S_2$，则

$$R\circledT S_1\subseteq R\circledT S_2,\qquad S_1\circledT T\subseteq S_2\circledT T$$

证 $\qquad S_1\subseteq S_2\Rightarrow S_1\cup S_2=S_2$

$$\Rightarrow R\circledT(S_1\cup S_2)=R\circledT S_2$$

$$\Rightarrow(R\circledT S_1)\cup(R\circledT S_2)=R\circledT S_2$$

$$\Rightarrow R\circledT S_1\subseteq R\circledT S_2$$

类似可证另一个不等式。 □

命题 2.5 设 $R\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times Y)$，$S\in\tilde{\mathscr{P}}(Y\times Z)$，则 $(R\circledT S)^{-1}=S^{-1}\circledT R^{-1}$

证 利用 $(T1)$ 得

$$\mu_{(R\circledT S)^{-1}}(z,x)=\mu_{R\circledT S}(x,z)=\sup_{y\in Y}[\mu_R(x,y)\top\mu_S(y,z)]$$

$$=\sup_{y\in Y}[\mu_{R^{-1}}(y,x)\top\mu_{S^{-1}}(z,y)]=\sup_{y\in Y}[\mu_{S^{-1}}(z,y)\top\mu_{R^{-1}}(y,x)]$$

$$=\mu_{S^{-1}\circledT R^{-1}}(z,x),\qquad\forall z\in Z,\qquad\forall x\in X。$$ □

命题 2.6 设 $R\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times Y)$， $S\in\tilde{\mathscr{P}}(Y\times Z)$ $\forall\alpha\in[0,1]$ 令 $\alpha^{(2)}=\alpha\top\alpha$，则

$$(R\circledT S)_{\bar{\alpha}}\subseteq R_{\bar{\alpha}}oS_{\bar{\alpha}},\qquad R_\alpha oS_\alpha\subseteq(R\circledT S)_{\alpha^{(2)}}$$

证 $\qquad \mu_{(R\circledT S)_{\bar{\alpha}}}(x,z)=1\Rightarrow\mu_{R\circledT S}(x,z)>\alpha$

$$\Rightarrow\exists y_0\in Y\text{ 使 }\mu_R(x,y_0)\top\mu_S(y_0,z)>\alpha$$

$$\Rightarrow\exists y_0\in Y\text{ 使 }\mu_R(x,y_0)>\alpha\text{ 且 }\mu_S(y_0,z)>\alpha$$

$$\Rightarrow\exists y_0\in Y\text{ 使 }\mu_{R_{\bar{\alpha}}}(x,y_0)=1\text{ 且 }\mu_{S_{\bar{\alpha}}}(y_0,z)=1$$

$$\Rightarrow\exists y_0\in Y\text{ 使 }\mu_{R_{\bar{\alpha}}}(x,y_0)\wedge\mu_{S_{\bar{\alpha}}}(y_0,z)=1$$

$$\Rightarrow\mu_{R_{\bar{\alpha}}oS_{\bar{\alpha}}}(x,z)=1\qquad(\forall x\in X,\ \forall z\in Z)$$

于是，$(R\circledT S)_{\bar{\alpha}}\subseteq R_{\bar{\alpha}}oS_{\bar{\alpha}}$。另一方面，

$$\mu_{R_\alpha oS_\alpha}(x,z)=1\Rightarrow\sup_{y\in Y}[\mu_{R_\alpha}(x,y)\wedge\mu_{S_\alpha}(y,z)]=1$$

$$\Rightarrow\exists y_0\in Y\text{ 使 }\mu_{R_\alpha}(x,y_0)\wedge\mu_{S_\alpha}(y_0,z)=1$$

$$\Rightarrow\exists y_0\in Y\text{ 使 }\mu_R(x,y_0)\geqslant\alpha\text{ 且 }\mu_S(y_0,z)\geqslant\alpha$$

$$\Rightarrow\exists y_0\in Y\text{ 使 }\mu_R(x,y_0)\top\mu_S(y_0,z)\geqslant\alpha\top\alpha=\alpha^{(2)}$$

$$\Rightarrow \mu_{R\circledT S}(x,y)=\sup_{y\in Y}[\mu_R(x,y)\top\mu_S(y,z)]\geqslant\alpha^{(2)}$$

$$\Rightarrow \mu_{(R\circledT S)_{\alpha^{(2)}}}(x,y)=1$$

于是，$R_\alpha o S_\alpha\leqslant(R\circledT S)_{\alpha^{(2)}}$ □

命题 2.7 设 $R\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times Y)$，$S\in\tilde{\mathscr{P}}(Y\times Z)$，若 $\forall x\in X$，$z\in Z$，$\exists\, y_0\in Y$ 使

$$\mu_{R\circledT S}(x,z)=\mu_R(x,y_0)\top\mu_S(y_0,z),$$

则

$$(R\circledT S)_\alpha\subseteq R_\alpha o S_\alpha$$

命题 2.8 设 $R\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times Y)$，$S\in\tilde{\mathscr{P}}(Y\times Z)$，若 $\forall\, a,b,c\in[0,1]$，由 $a>c$，$b>c$ 可得 $a\top b>c\top c$，则

$$R_{\bar\alpha}oS_{\bar\alpha}\subseteq(R\circledT S)_{\overline{\alpha^{(2)}}}$$

命题 2.7 与 2.8 的证明可仿命题 2.6 的证明得之，从略。

由命题 2.6—2.8 立刻可得：设 $R\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times Y)$，$S\in\tilde{\mathscr{P}}(Y\times Z)$，则 $(RoS)_{\bar\alpha}=R_{\bar\alpha}oS_{\bar\alpha}$，若 Y 是有限集，则 $(RoS)_\alpha=R_\alpha oS_\alpha$。

命题 2.9 $(\tilde{\mathscr{P}}(X\times X),\ \cup,\ \cap,\ \circledT)$ 是完备格序群胚

证 显然 $(\tilde{\mathscr{P}}(X\times X),\ \cup,\ \cap)$ 是完备分配格，由命题 2.2 知 $(\tilde{\mathscr{P}}(X\times X),\ \circledT)$ 是半群，令 $E\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times X)$ 使

$$\mu_E(x,y)=\begin{cases}1 & \text{当 } x=y\\ 0 & \text{当 } x\neq y\end{cases}$$

则 $\forall\, R\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times X)$，有 $R\circledT E=E\circledT R=R$，从而 $(\tilde{\mathscr{P}}(X\times X),\ \circledT)$ 是群胚。再由命题 2.3 得 $(\tilde{\mathscr{P}}(X\times X),\ \cup,\ \cap,\ \circledT)$ 是完备格序群胚 □

三、X 上的 Fuzzy 关系的 T 传递性

设 X 是给定非空集，记 $\mathscr{R}(X)=\tilde{\mathscr{P}}(X\times X)$，称 $\mathscr{R}(X)$ 中的元为 X 上的 Fuzzy 关系，简称关系。

$$\forall\, R\in\mathscr{R}(X),\quad 令\ R^{(1)}=R,\quad R^{(m)}=R\circledT R^{(m-1)}\quad(m=2,3,\cdots),$$

$R^T=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}R^{(m)}$，称 R^T 为 R 的 T 传递闭包。若 $R^{(2)}\subseteq R$ 称 R 是 T 传递的。

命题 3.1 $\forall R\in\mathscr{R}(X)$，$R^T$ 是包含 R 的最小 T 传递关系

证

$$\begin{aligned}(R^T)^{(2)}&=R^T\circledT R^T=\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}R^{(m)}\right)\circledT\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}R^{(n)}\right)\\&=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}[R^{(m)}\circledT R^{(n)}]=\bigcup_{m,n=1}^{\infty}R^{(m+n)}\\&=R^{(2)}\cup R^{(3)}\cup\cdots\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}R^{(k)}=R^T\end{aligned}$$

因此 R^T 是 T 传递的，且 $R^T\supseteq R$。若 S 是包含 R 的 T 传递关系，且设 $S\supseteq R^{(m)}\ (m\geqslant1)$，则

$$S\supseteq S\circledT S\supseteq S\circledT R^{(m)}\supseteq R\circledT R^{(m)}=R^{(m+1)}$$

因此 $S\supseteq R^{(k)}\ (k=1,2,3,\cdots)$，从而 $S\supseteq\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}R^{(k)}=R^T$，所以 R^T 是包含 R 的最小 T 传递关系。 □

命题 3.2 $\forall R\in\mathscr{R}(X)$，$R$ 是 T 传递的当且仅当 $R=R^T$

证 若 $R=R^T$，由命题 3.1 知 R 是 T 传递的。反之，若 R 是 T 传递关系，则 $R^{(2)}\subseteq R$，从而

$$R\supseteq R^{(2)}\supseteq R^{(3)}\supseteq\cdots\supseteq R^{(m)}\supseteq\cdots$$

于是

$$R^T=\bigcup_{m=1}^{\infty}R^{(m)}=R \qquad \square$$

命题 3.3 设 $|X|=n\geqslant 2$，$R\in\mathscr{R}(X)$，且 $\mathrm{E}\subseteq R$，则 $R^T=R^{(n-1)}$

证 由 $\mathrm{E}\subseteq R$，得 $R=\mathrm{E}ⓣR\subseteq RⓣR$，即 $R\subseteq R^{(2)}$，从而 $R^{(m)}\subseteq R^{(m+1)}$ $(m=1,2,\cdots)$，下面证明 $R^{(n-1)}=R^{(n)}$

$\forall x,y\in X$，若 $x=y$ 则 $\mu_{R^{(n)}}(x,x)=\mu_{R^{(n-1)}}(x,x)=1$，若 $x\neq y$，则

$$\mu_{R^{(n)}}(x,y)=\sup_{z_1,\cdots,z_{n-1}\in X}[\mu_R(x,z_1)\top\mu_R(z_1,z_2)\top\cdots\top\mu_R(z_{n-1},y)]$$

由于 $|X|=n$，故 $x,z_1,\cdots,z_{n-1},y$ 中必有两个元相同，令 $x=z_0,y=z_n$，则 $\exists\, z_i,z_j$ $(i<j)$ 使 $z_i=z_j$。于是

$$\begin{aligned}&\mu_R(z_0,z_1)\top\cdots\top\mu_R(z_{n-1},z_n)\\ \leqslant\ &\mu_R(z_0,z_1)\top\cdots\top\mu_R(z_{i-1},z_i)\top\mu_R(z_j,z_{j+1})\top\cdots\top\mu_R(z_{n-1},z_n)\\ \leqslant\ &\mu_{R^{(k)}}(z_0,z_n)\quad(k\leqslant n-1)\leqslant\mu_{R^{(n-1)}}(x,y)\end{aligned}$$

从而得 $\mu_{R^{(n)}}(x,y)\leqslant\mu_{R^{(n-1)}}(x,y)$，$\forall x,y\in X$。因此，$R^{(n)}\subseteq R^{(n-1)}$，又 $R^{(n-1)}\subseteq R^{(n)}$ 故 $R^{(n)}=R^{(n-1)}$。于是

$$R^T=\bigcup_{m=1}^{\infty}R^{(m)}=R^{(n-1)} \qquad \square$$

四、T 相 似 关 系

设 $R\in\mathscr{R}(X)$，若 $\mathrm{E}\subseteq R$，$R=R^{-1}$，$R^{(2)}\subseteq R$，则称 R 为 X 上的 T 相似关系。当 $\top$ 分别为 $\wedge$，A 时，T 相似关系分别退化为相似关系和类似关系[4]。

设 $\perp$ 是 t-范 $\top$ 对偶的余范，即 $\forall a,b\in[0,1]$

$$a\perp b=1-[(1-a)\top(1-b)]$$

且 d：$X\times X\to[0,1]$ 满足

(D1) $\quad d(x,x)=0,\quad \forall x\in X$

(D2) $\quad d(x,y)=d(y,x)\quad \forall x,y\in X$

(D3) $\quad d(x,z)\leqslant d(x,y)\perp d(y,z)\quad \forall x,y,z\in X$

则称 d 为 X 上的一个 T 度量。

设 $R\in\mathscr{R}(X)$，定义 R^C 为 $\mu_{R^C}(x,y)=1-\mu_R(x,y)$。称 R^C 为 R 的补。

命题 4.1 R 是 X 上的 T 相似关系当且仅当 μ_{R^C} 是 X 上的一个 T 度量

证 因为

(i) $$\begin{aligned}\mathrm{E}\subseteq R&\Longleftrightarrow\mu_R(x,x)=1,\quad\forall x\in X\\ &\Longleftrightarrow\mu_{R^C}(x,x)=0,\quad\forall x\in X\end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned}R=R^{-1}&\Longleftrightarrow\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x),\quad\forall x,y\in X\\ &\Longleftrightarrow\mu_{R^C}(x,y)=\mu_{R^C}(y,x),\quad\forall x,y\in X\end{aligned}$$

(iii) $$R^{(2)}\subseteq R \Longleftrightarrow \mu_R(x,z)\geqslant \mu_R(x,y)\top\mu_R(y,z), \quad \forall x,y,z\in X$$
$$\Longleftrightarrow \mu_{R^C}(x,z)\leqslant \mu_{R^C}(x,y)\perp\mu_{R^C}(y,z) \quad \forall x,y,z\in X$$

所以命题成立 □

设 R 是 X 上的 T 相似关系。$\forall x\in X$，定义 $R_x\in\widetilde{\mathscr{P}}(X)$ 为 $\mu_{R_x}(y)=\mu_R(x,y)$，$\forall y\in X$. 称 R_x 为含 x 的 Fuzzy 类。集 $X/R=\{R_x|x\in X\}$ 称为 Fuzzy 商集。

命题 4.2 设 R 是 X 上的 T 相似关系，X/R 是 Fuzzy 商集，则

(1) $$\mu_R(x,y)=0 \text{ 当且仅当 } R_x\top R_y=O$$

其中 $R_x\top R_y$，$O\in\widetilde{\mathscr{P}}(X)$，适合

$$\mu_{R_x\top R_y}(z)=\mu_{R_x}(z)\top\mu_{R_y}(z), \quad \mu_O(z)=0, \quad \forall z\in X$$

(2) $$\mu_R(x,y)=1 \text{ 当且仅当 } R_x=R_y$$

(3) $$\bigcup_{x\in X}R_x=I，\text{这里 } I\in\widetilde{\mathscr{P}}(X) \text{ 适合 } \mu_I(z)=1,\ \forall z\in X$$

证 逐条验证之

(1) 设 $\mu_R(x,y)=0$，则

$$\mu_{R_x\top R_y}(z)=\mu_R(x,z)\top\mu_R(y,z)=\mu_R(x,y)\top\mu_R(z,y)$$
$$\leqslant\sup_{z\in X}[\mu_R(x,z)\top\mu_R(z,y)]\leqslant\mu_R(x,y)=0, \quad \forall z\in X$$

于是 $R_x\top R_y=O$，反之，若 $R_x\top R_y=O$，则 $\mu_{R_x}\top R_y(x)=0$ 从而 $\mu_R(x,x)\top\mu_R(y,\ x)=0$，即得 $$\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)=1\top\mu_R(y,x)=0$$

(2) 设 $\mu_R(x,y)=1$。由于 R 是 T 传递的，故 $\forall z\in X$ 有

$$\mu_R(y,z)=\mu_R(x,y)\top\mu_R(y,z)\leqslant\mu_R(x,z),$$

此外有 $$\mu_R(x,z)=\mu_R(x,y)\top\mu_R(z,x)\leqslant\mu_R(z,z)=\mu_R(y,z),$$

所以 $\mu_R(y,z)=\mu_R(x,z)$， 即 $\mu_{R_x}(z)=\mu_{R_y}(z)$， 因此 $R_x=R_y$。

反之，由 $R_x=R_y$，可得

$$\mu_{R_x}(x)=\mu_{R_y}(x),$$

从而 $$\mu_R(x,z)=\mu_{R_y}(x)=1$$

(3) $$\mu_{\bigcup_{x\in X}R_x}(z)=\sup_{x\in X}\mu_R(x,z)\geqslant\mu_R(z,z)=1,$$

因此 $$\bigcup_{x\in X}R_x=I$$ □

$[0,1]$ 上的 t-范 $\top$ 称为正则的，如果

$$a\top b\geqslant a\wedge b \qquad (\forall a,b\in[0,1])$$

易见 $\wedge$，$\cdot$，A 都是正则 t-范。

命题 4.3 设 $\top$ 是连续正则 t-范，R 是 T 相似关系。d：$X/R\times X/R\to[0,1]$，适合

$$d(R_x,R_y)=\mu_{R^C}(x,y), \quad \forall x,y\in X$$

则 d 是 X/R 上的一个度量，即

1) $$d(R_x,R_y)=0 \quad \text{当且仅当} \quad R_x=R_y$$

2) $$d(R_x,R_y)=d(R_x,R_x) \quad \forall x,y\in X$$

3) $$d(R_x,R_z)\leqslant d(R_x,R_y)+d(R_y,R_z) \quad \forall x,y,z\in X$$

证 由定义及命题 4.2 得

1) $$d(R_x,R_y)=0 \Longleftrightarrow \mu_{R^C}(x,y)=0 \Longleftrightarrow \mu_R(x,y)=1 \Longleftrightarrow R_x=R_y$$

2) $$d(R_x,R_y)=\mu_{R^C}(x,y)=\mu_{R^C}(y,x)=d(R_y,R_x)$$

3) $$\begin{aligned} d(R_x,R_z)&=\mu_{R^C}(x,z)=1-\mu_R(x,z)\\ &\leqslant 1-\sup_{y\in X}[\mu_R(x,y)\top\mu_R(y,z)]\\ &\leqslant 1-[\mu_R(x,y)T\mu_R(y,z)]\\ &\leqslant 1-[\mu_R(x,y)\wedge\mu_R(y,z)]\\ &=\mu_{R^C}(x,y)\vee\mu_{R^C}(y,z)\\ &\leqslant\mu_{R^C}(x,y)+\mu_{R^C}(y,z)\\ &=d(R_x,R_y)+d(R_y,R_z),\qquad \forall x,y,z\in X \end{aligned}$$

因此 d 是 X/R 上的度量。 □

五、⊤ 型 Fuzzy 关系方程的最大解

考察

$$Q\textcircled{\scriptsize T}R=S$$

其中 $Q\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times Y)$, $R\in\tilde{\mathscr{P}}(Y\times Z)$, $S\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times Z)$。

已知 S 与 R(或 Q) 来求 Q(或 R)，这就是解 T 型 Fuzzy 关系方程。当 $\top=\wedge$ 时，它退化为普通的 Fuzzy 关系方程，Sanchez[9] 解决了求 Fuzzy 关系方程的最大解问题。下面仿照 Sanchez 的方法，来求 T 型 Fuzzy 关系方程的最大解(如果解存在的话)。

在 $[0,1]$ 中定义一个运算 α:

$$a\alpha b=\sup\{x\,|\,a\top x\leqslant b\}\qquad \forall a,b\in[0,1]$$

易见当 $a\leqslant b$ 时，$a\alpha b=1$；当 $a>b$ 时，由于⊤是连续的 t-范，故方程 $a\top x=b$ 有最大解，设它为 $h(a,b)$，则 $a\alpha b=h(a,b)$

引理 5.1 $\forall a,b,c\in[0,1]$ 有

(i) $$a\alpha(b\vee c)\geqslant a\alpha b$$

(ii) $$a\alpha(a\top b)\geqslant b\geqslant a\top(a\alpha b)$$

证 (i) $$a\alpha(b\vee c)=\sup\{x\,|\,a\top x\leqslant b\vee c\}\geqslant\sup\{x\,|\,a\top x\leqslant b\}=a\alpha b$$

(ii) $$\begin{aligned} a\alpha(a\top b)&=\sup\{x\,|\,a\top x\leqslant a\top b\}\geqslant b\geqslant\sup\{a\top x\,|\,a\top x\leqslant b\}\\ &=a\top\sup\{x\,|\,a\top x\leqslant b\}=a\top(a\alpha b) \end{aligned}$$ □

设 $Q\in\tilde{\mathscr{P}}(X\times Y)$, $R\in\tilde{\mathscr{P}}(Y\times Z)$, 定义 $Q\circledast R$ 如下

$$\mu_{Q\circledast R}(x,z)=\inf_{y\in Y}[\mu_Q(x,y)\alpha\mu_R(y,z)],\qquad \forall x\in X,\quad \forall z\in Z$$

命题 5.1 设 $Q\textcircled{\scriptsize T}R=S$, 则

(1) $$R\subseteq Q^{-1}\circledast(Q\textcircled{\scriptsize T}R)$$

(2) $$Q\textcircled{\scriptsize T}(Q^{-1}\circledast S)\subseteq S$$

证 令 $U=Q^{-1}\circledast(Q\textcircled{\scriptsize T}R)$，利用引理 5.1，有

$$\mu_U(y,z)=\inf_{x\in X}\{\mu_{Q^{-1}}(y,x)\alpha\sup_{t\in Y}[\mu_Q(x,t)\top\mu_R(t,z)]\}$$

$$=\inf_{x\in X}\{\mu_{Q^{-1}}(y,x)\alpha[(\top\mu_Q(x,y)\mu_R(y,z))\vee\sup_{t\neq y}(\mu_Q(x,t)\top\mu_R(t,z))]\}$$

$$\geqslant\inf_{x\in X}\{\mu_Q(x,y)\alpha[\mu_Q(x,y)\top\mu_R(y,z)]\}$$

$$\geqslant\inf_{x\in X}\mu_R(y,z)=\mu_R(y,z)\qquad\forall y\in Y,\quad\forall z\in Z$$

所以 $U\supseteq R$ 得（1） 为证（2），令 $V=Q(\mathrm{T})(Q^{-1}\otimes S)$，再利用引理5.1，有

$$\mu_V(x,z)=\sup_{y\in Y}\{\mu_Q(x,y)\top\inf_{t\in X}[\mu_Q(t,y)\alpha\mu_S(t,z)]\}$$

$$\leqslant\sup_{y\in Z}[\mu_Q(x,y)\top(\mu_Q(x,y)\alpha\mu_S(x,z))]$$

$$\leqslant\sup_{y\in Y}\mu_S(x,z)=\mu_S(x,z)\qquad\forall x\in X,\quad\forall z\in Z$$

□

命题5.2 设 $Q\in\tilde{\mathscr{F}}(X\times Y)$， $S\in\tilde{\mathscr{F}}(X\times Z)$， $R\in\tilde{\mathscr{F}}(Y\times Z)$。
若

$$\mathscr{R}=\{R\mid Q(\mathrm{T})R=S\}\neq\varnothing$$

则 $Q^{-1}\otimes S$ 是 $\mathscr{R}$ 中最大元。

证 若 $\mathscr{R}\neq\varnothing$，则 $\exists R\in\tilde{\mathscr{F}}(Y\times Z)$ 使 $Q(\mathrm{T})R=S$，由命题5.1得

$$R\subseteq Q^{-1}\otimes(Q(\mathrm{T})R)=Q^{-1}\otimes S,$$

再利用命题2.4及命题5.1得

$$S=Q(\mathrm{T})R\subseteq Q(\mathrm{T})(Q^{-1}\otimes S)\subseteq S。$$

因此 $Q^{-1}\otimes S\in\mathscr{R}$。此外，$\forall R\in\mathscr{R}$， 都有 $R\subseteq Q^{-1}\otimes S$， 故 $Q^{-1}\otimes S$ 是 $\mathscr{R}$ 中的最大元。 □

推论

$$\mathscr{R}=\{R\mid Q(\mathrm{T})R=S\}\neq\varnothing$$

的充要条件是

$$Q(\mathrm{T})(Q^{-1}\otimes S)=S$$

例 设

$$Q=\begin{pmatrix}.2&0&.8&1\\.4&.3&0&.7\\.5&.9&.2&0\end{pmatrix},\qquad S=\begin{pmatrix}.7&.3&1\\.4&.4&.7\\.8&.9&.2\end{pmatrix}$$

$T=\wedge$，则 $\forall a,b\in[0,1]$ 有

$$a\alpha b=\begin{cases}1 & 当\quad a\leqslant b\\1-a+b & 当\quad a>b\end{cases}$$

计算

$$Q^{-1}\otimes S=\begin{pmatrix}1&1&.7\\.9&1&.3\\.9&.5&1\\.7&.3&1\end{pmatrix}$$

由于 $Q(\mathrm{T})(Q^{-1}\otimes S)=S$，故 $Q^{-1}\otimes S$ 是 $\mathscr{R}=\{R\mid Q(\mathrm{T})R=S\}$ 的最大元。

命题5.3 设 $\mathscr{Q}=\{Q\mid Q(\mathrm{T})R=S\}\neq\varnothing$，其中

$$R\in\tilde{\mathscr{F}}(Y\times Z),\qquad S\in\tilde{\mathscr{F}}(X\times Y),\qquad Q\in\tilde{\mathscr{F}}(X\times Y),$$

则 $(R\otimes S^{-1})^{-1}$ 是 $\mathscr{Q}$ 的最大元。

证　因 $$\mathscr{Q}=\{Q|Q\textcircled{T}R=S\}=\{Q|R^{-1}\textcircled{T}Q^{-1}=S^{-1}\}\neq\varnothing,$$
令 $$\mathscr{Q}'=\{Q^{-1}|R^{-1}\textcircled{T}Q^{-1}=S^{-1}\}$$
则 $\mathscr{Q}'\neq\varnothing$，由命题5.2知

$(R^{-1})^{-1}\otimes S^{-1}=R\otimes S^{-1}$ 是 $\mathscr{Q}'$ 的最大解。因此 $(R\otimes S^{-1})^{-1}$ 是 $\mathscr{Q}$ 的最大元。 □

关于 $\mathscr{R}=\{R|Q\textcircled{T}R=S\}$ 的结构，有如下命题。

命题5.4 设 $$\mathscr{R}=\{R|Q\textcircled{T}R=S\}\neq\varnothing$$ 有

(i) 若 R_1，$R_2\in\mathscr{R}$，则 $R_1\cup R_2\in\mathscr{R}$

(ii) 若 R_1，$R_2\in\mathscr{R}$，且 $R_1\subseteq R_3\subseteq R_2$，则 $R_3\in\mathscr{R}$

证　设 R_1，$R_2\in\mathscr{R}$，由命题2.3得
$$Q\textcircled{T}(R_1\cup R_2)=(Q\textcircled{T}R_1)\cup(Q\textcircled{T}R_2)=S\cup S=S$$
因此 $R_1\cup R_2\in\mathscr{R}$。又若 $R_1\subseteq R_3\subseteq R_2$，由命题2.4得
$$S=Q\textcircled{T}R_1\subseteq Q\textcircled{T}R_3\subseteq Q\textcircled{T}R_2=S$$
因此 $R_3\in\mathscr{R}$。 □

参　考　文　献

[1] B. Schweizer and A. Sklar, Statistical metric spaces, Pacific Jour. Math., 10(1960), 313-334.

[2] J. M. Anthony and Sherwood, Fuzzy groups redefined, Jour. Math. Anal. Appl., 69(1979), 124-130.

[3] J. M. Anthony and Sherwood, A characterization of fuzzy subgroups, Fuzzy Sets and Systems, 7(1982), 297-305.

[4] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy Sets and Systems, Theory and Applications, Academic Press, 1980.

[5] Yu Yandong, Fuzzy linear Spaces redefined, Thesis, Yancheng Teachers College, 1982.

[6] Yu Yandong, On the convex fuzzy sets, ibid, 1982.

[7] L. A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, Infor. Science, 3 (1971), 177-200.

[8] R. R. Yager, Some properties of fuzzy relationships, Cyber. Systems, 12 (1981), 123-140.

[9] E. Sanchez, Resolution of composite fuzzy relation equations, Infor. Control, 30(1976), 38-48.

[10] 马骥良，于纯海， Fuzzy 环 (I)，东北师大学报（自然），1(1982)，23-28.

The sup-T Composition of Fuzzy Relations

Wu Wangming

Abstract

In this paper, the concept of t-norm, due to Schweizer and Sklar, is introduced into the composition of fuzzy relations. Some elementary properties of sup-T composition are established, and the T transitivity of a relation and T similarity relations are discussed. Finally, the greatest solution (if any) of equations of type T fuzzy relations is obtained.