

# 基于琼斯矩阵的 FIR 晶体光滤波器设计方法\*

刘继红<sup>1,2</sup> 方 强<sup>3</sup> 阴亚芳<sup>2,3</sup>

(1 中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710068)

(2 中国科学院研究生院, 北京 100039)

(3 西安邮电学院电子与信息工程系, 西安 710061)

**摘 要** FIR 晶体光滤波器由夹在两个偏振片之间的  $N$  个厚度相同的晶片构成, 设计过程中需要根据要求的频率响应求出各个晶体波片的光轴方向和输出端偏振片的通光方向. 提出了一种基于琼斯矩阵的反向递推设计方法. FIR 晶体光滤波器的琼斯矩阵是各个晶片以及偏振片琼斯矩阵的乘积, 利用这一关系可以建立简单的反向递推关系, 并计算出与输出偏振分量对应的正交偏振分量, 通过迭代运算确定所有元件的角度参数. 实例设计的结果与使用其它方法得到的结果一致, 设计过程简单.

**关键词** 光滤波器; 设计方法; 琼斯矩阵; FIR 滤波器

**中图分类号** TN201 **文献标识码** A

## 0 引言

FIR 晶体光滤波器由夹在两个偏振片之间的  $N$  个晶体波片构成, 这种光滤波器在光通信、天文观测等领域具有广泛应用<sup>[1~7]</sup>, 基本结构主要有 Solc 和 Lyot 两种<sup>[1,7]</sup>. 目前研究较多的是类似于 Solc 的结构, 每个波片的光轴方向以及输出端偏振片的通光方向由需要的频率响应决定.

光滤波器设计包括两步: 一是根据需要的滤波特性确定滤波器频率响应, 可使用数字信号处理中相关的设计方法求解<sup>[8]</sup>; 二是根据频率响应确定滤波器的结构参数, 对于 FIR 晶体光滤波器而言, 需要确定各个晶片的光轴方向和输出端偏振片的通光方向, 这也是本文的研究对象. Harris 等人提出了反向传递法<sup>[1]</sup>, 该方法利用脉冲响应的概念, 可以设计任意周期性频率响应, 目前多用这种方法设计, 但设计步骤繁杂. 也有采用模拟退火算法等优化方法得到一组可行解的研究<sup>[4~6]</sup>, 但这种方法收敛性无法保证, 参数设置需要一定技巧. 本文利用 FIR 晶体光滤波器琼斯矩阵是各个晶片以及偏振片琼斯矩阵的乘积这一关系, 提出了一种简单、物理概念清晰的设计方法, 可以实现任意周期性频率响应的设计.

构成滤波器的晶体波片厚度可以相同, 也可以是整数倍关系, 实现相同阶数的滤波器, 后者需要的晶片数目比前者少, 易于调试, 但由于可设计的参数减少, 并不是任意倍数关系的组合都可以实现要求的频率响应; 另外, 采用等厚度波片设计所得结果

中, 如果有前后相邻波片的光轴夹角为零或接近零时, 则可以看成是一个波片, 因此, 采用晶片厚度成整数倍关系的结构可以看成是晶片厚度相同结构的近似和特例. 本文以使用相同厚度晶片的结构为对象提出设计方法.

## 1 FIR 晶体光滤波器的琼斯矩阵

图 1 是  $N$  阶晶体光滤波器示意图. 光束从入射偏振片  $P_1$  进入滤波器, 依次通过  $N$  个厚度为  $L$  的晶体波片, 最后从偏振片  $P_2$  出射. 定义  $\phi_1, \phi_2 \dots \phi_N$

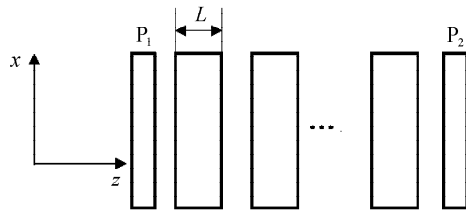


图 1 FIR 晶体光滤波器结构

Fig. 1 Schematic diagram of FIR crystal optical filter

是  $N$  个晶片和  $x$  轴的夹角,  $\phi_0, \phi_{N+1}$  是  $P_1, P_2$  通光方向与  $x$  轴的夹角. 任意一波片的琼斯矩阵为

$$J_i = R(-\phi_i)D_iR(\phi_i) = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} e^{-j\omega a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

式中  $a=L|n_o-n_e|/c$  表示每个晶片引起的延时, 其大小决定了滤波器频率响应的自由光谱范围, 与设计方法无关, 下文取单位延时  $a=1$ .

偏振片  $P_1, P_2$  的旋转矩阵为

$$J_i = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{bmatrix} \quad i=0, N+1 \quad (2)$$

不失一般性, 设  $P_1$  的通光方向与  $x$  轴相同, 则

\* 国家科技攻关计划项目(编号: 2002BA106B07-5)

Tel: 029-85383281 Email: ljh\_ong@sina.com.cn

收稿日期: 2004-11-23

$\phi_0=0, J_0$  是单位矩阵, 从而  $N$  阶滤波器的琼斯矩阵

$$J^N = J_{N+1} J_N \cdots J_1 = \begin{bmatrix} \cos \phi_{N+1} & \sin \phi_{N+1} \\ -\sin \phi_{N+1} & \cos \phi_{N+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi_N & -\sin \phi_N \\ \sin \phi_N & \cos \phi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\omega} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_N & \sin \phi_N \\ -\sin \phi_N & \cos \phi_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi_{N-1} & -\sin \phi_{N-1} \\ \sin \phi_{N-1} & \cos \phi_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\omega} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\omega} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

定义  $\theta_1 = \phi_1, \theta_i = \phi_i - \phi_{i-1}, i = 2, 3, \cdots, N+1$ , 为简化表示, 定义符号  $s_i = \sin \theta_i, c_i = \cos \theta_i$ , 整理式(3), 可得

$$J^N = \begin{bmatrix} c_{N+1} e^{-j\omega} & s_{N+1} \\ -s_{N+1} e^{-j\omega} & c_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_N e^{-j\omega} & s_N \\ -s_N e^{-j\omega} & c_N \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} c_2 e^{-j\omega} & s_2 \\ -s_2 e^{-j\omega} & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & s_1 \\ -s_1 & c_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 2 设计方法

设  $J^N = \begin{bmatrix} A_N(e^{j\omega}) & C_N(e^{j\omega}) \\ B_N(e^{j\omega}) & D_N(e^{j\omega}) \end{bmatrix}$ , 对于一阶滤波器, 由式(4)可以得到  $J^1$  中各元素的表达式

$$A_1(e^{j\omega}) = c_1 c_2 e^{-j\omega} - s_1 s_2$$

$$B_1(e^{j\omega}) = c_1 s_2 e^{-j\omega} - s_1 c_2$$

$$C_1(e^{j\omega}) = s_1 c_2 e^{-j\omega} + c_1 s_2$$

$$D_1(e^{j\omega}) = -s_1 s_2 e^{-j\omega} + c_1 c_2$$

显然

$$C_1(e^{j\omega}) = -e^{-j\omega} B_1(e^{-j\omega})$$

$$D_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} A_1(e^{-j\omega})$$

可以证明

$$J_{N+1}^{-1} J^N = \begin{bmatrix} c_{N+1} e^{j\omega} & -s_{N+1} e^{j\omega} \\ s_{N+1} & c_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_N(e^{j\omega}) & C_N(e^{j\omega}) \\ B_N(e^{j\omega}) & D_N(e^{j\omega}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\omega} [c_{N+1} A_N(e^{j\omega}) - s_{N+1} B_N(e^{j\omega})] & e^{j\omega} [c_{N+1} C_N(e^{j\omega}) - s_{N+1} D_N(e^{j\omega})] \\ s_{N+1} A_N(e^{j\omega}) + c_{N+1} B_N(e^{j\omega}) & s_{N+1} C_N(e^{j\omega}) + c_{N+1} D_N(e^{j\omega}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

由式(10)和式(11)以及两矩阵相等, 则对应元素相等, 可得

$$A_{N-1}(e^{j\omega}) = e^{j\omega} [c_{N+1} A_N(e^{j\omega}) - s_{N+1} B_N(e^{j\omega})] \quad (12a)$$

$$B_{N-1}(e^{j\omega}) = s_{N+1} A_N(e^{j\omega}) + c_{N+1} B_N(e^{j\omega}) \quad (12b)$$

$$C_{N-1}(e^{j\omega}) = e^{j\omega} [c_{N+1} C_N(e^{j\omega}) - s_{N+1} D_N(e^{j\omega})] \quad (12c)$$

$$D_{N-1}(e^{j\omega}) = s_{N+1} C_N(e^{j\omega}) + c_{N+1} D_N(e^{j\omega}) \quad (12d)$$

多项式相等, 则对应幂次项系数相等, 由式(12a)、(12b)可得

$$c_{N+1} a_0 - s_{N+1} b_0 = 0 \quad (13)$$

$$s_{N+1} a_N + c_{N+1} b_N = 0$$

$$D_i(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} A_i(e^{-j\omega})$$

$$C_i(e^{j\omega}) = -e^{-j\omega} B_i(e^{-j\omega}) \quad i=1, 2, \cdots, N$$

从而,  $i$  阶滤波器的琼斯矩阵可表示为

$$J^i = \begin{bmatrix} A_i(e^{j\omega}) & -e^{-j\omega} B_i(e^{-j\omega}) \\ B_i(e^{j\omega}) & e^{-j\omega} A_i(e^{-j\omega}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

设入射光和出射光的琼斯矢量分别为  $E_{in} = [E_x \ E_y]^T, E_{out} = [E_{x'} \ E_{y'}]^T$ , 其中  $E_{x'}, E_{y'}$  分别表示与  $P_2$  通光方向平行和垂直的分量. 由  $E_{out} = J^N \times E_{in}$  可得

$$\begin{cases} E_{x'} = A_N(e^{j\omega}) E_x - e^{-jN\omega} B_N(e^{-j\omega}) E_y \\ E_{y'} = B_N(e^{j\omega}) E_x + e^{-jN\omega} A_N(e^{-j\omega}) E_y \end{cases} \quad (6)$$

当入射光  $E_{in} = [1 \ 0]^T$  时,  $A_N(e^{j\omega}), B_N(e^{j\omega})$  就是滤波器两个正交的频率响应分量. 令

$$A_N(e^{j\omega}) = a_0 + a_1 e^{-j\omega} + \cdots + a_N e^{-jN\omega} \quad (7)$$

$$B_N(e^{j\omega}) = b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \cdots + b_N e^{-jN\omega}$$

根据能量守恒, 二者应满足

$$|A_N(e^{j\omega})|^2 + |B_N(e^{j\omega})|^2 = 1 \quad (8)$$

现在需要根据给定的  $A_N(e^{j\omega})$  确定对应阶数滤波器结构中各元件的角度参数.

### 2.1 反向递推关系

由式(4)可知,  $N$  阶滤波器和  $N-1$  阶滤波器的琼斯矩阵之间存在如下关系

$$J^N = J_{N+1} J^{N-1} \quad (9)$$

从而

$$J^{N-1} = J_{N+1}^{-1} J^N \quad (10)$$

因为

$$J_{N+1}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{N+1} e^{-j\omega} & -s_{N+1} \\ -s_{N+1} e^{-j\omega} & c_{N+1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{N+1} e^{j\omega} & -s_{N+1} e^{j\omega} \\ s_{N+1} & c_{N+1} \end{bmatrix}$$

所以

于是

$$\theta_{N+1} = -\arctan(b_N/a_N) = \arctan(a_0/b_0) \quad (14)$$

当然, 若已知  $C_N(e^{j\omega}), D_N(e^{j\omega})$ , 由(12c)、(12d)也可以求出  $\theta_{N+1}$ .

给定  $A_N(e^{j\omega})$  后, 若已知  $B_N(e^{j\omega})$ , 即可由式(14)、(12a)、(12b)求出  $\theta_{N+1}$  和  $N-1$  阶滤波器的输出  $A_{N-1}(e^{j\omega}), B_{N-1}(e^{j\omega})$ . 显然, 利用相同的递推关系可以确定  $\theta_i (i=1, 2, \cdots, N)$ . 下面求解  $B_N(e^{j\omega})$ .

### 2.2 与输出响应分量正交的偏振分量

根据式(4)、(5), 由矩阵乘积的行列式可得

$$(e^{-jN\omega} A_N(e^{-j\omega})) A_N(e^{j\omega}) + (e^{-jN\omega} \times B_N(e^{-j\omega})) B_N(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega} \quad (15)$$

由式(15)可解出  $B_N(e^{j\omega}) B_N(e^{-j\omega})$  以  $e^{-j\omega}$  为变量的根, 这些根两两关于单位圆对称, 可选择具有对称关系中的任意一个或一对(若是复根)作为  $B_N(e^{j\omega})$  的根, 从而得到  $B_N(e^{j\omega})$  表达式, 具体求解办法请参阅文献[1]或下文的实例设计. 按这种方法可能存在多个  $B_N(e^{j\omega})$ , 因此有多种滤波器结构参数可实现  $A_N(e^{j\omega})$ , 这与文献[1]的讨论一致. 为了使  $A_N(e^{j\omega})$  和  $B_N(e^{j\omega})$  满足式(8)的要求, 需要对  $B_N(e^{j\omega})$  的系数进行修正, 由式(8)可得修正因子

$$\alpha = \sqrt{(1 - \sum_{i=0}^N a_i^2) / \sum_{i=0}^N b_i^2}$$

则修正后  $B_N(e^{j\omega}) = \alpha B_N(e^{j\omega})$ .

### 2.3 设计步骤

根据上述分析, 现归纳出具体设计步骤:

1) 由给定  $A_N(e^{j\omega})$ , 利用式(15)求出  $B_N(e^{j\omega})$ , 并用  $\alpha$  修正系数; 2) 根据式(14)求出  $\theta_{N+1}$ ; 3) 根据式

(12a)、(12b) 求出  $A_{N-1}(e^{j\omega})$ 、 $B_{N-1}(e^{j\omega})$ ; 4)  $N=N-1$ , 返回第 2 步, 直到  $\theta_i (i=1, 2, \dots, N+1)$  全部确定.

## 3 实例设计

给定一梳状滤波器的频率响应(参考文献[8]中所设计滤波器的频率响应)

$$A_5(e^{j\omega}) = -0.0310 - 0.0695e^{-j\omega} + 0.0972e^{-i2\omega} + 0.3174e^{-i3\omega} - 0.5658e^{-i4\omega} + 0.2525e^{-i5\omega}$$

由式(15)解得  $e^{-j5\omega} B_5(e^{-j\omega}) B_5(e^{j\omega})$  的根为

$$\begin{aligned} r_1 &= 2.5282 + 1.3832i & r_2 &= 2.5282 - 1.3832i \\ r_3 &= -0.9678 + 0.4262i & r_4 &= -0.9678 - 0.4262i \\ r_5 &= -0.8654 + 0.3812i & r_6 &= -0.8654 - 0.3812i \\ r_7 &= -1.0000 & r_8 &= -1.0000 \\ r_9 &= 0.3044 + 0.1665i & r_{10} &= 0.3044 - 0.1665i \end{aligned}$$

$B_5(e^{j\omega})$  所有可能的表达式系数与根的对应关系见表 1. 以表 1 中第一行的  $B_5(e^{j\omega})$  为例设计, 则有  $\theta_{N-1} = -6.5589$ . 其余步骤的设计结果见表 2.

表 1 滤波器正交输出分量计算结果

| 根的组合                              |        | $B_5(e^{j\omega})$ 的系数 $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ |         |         |         |        | 修正因子   |
|-----------------------------------|--------|---|---------|---------|---------|--------|--------|
| $r_1, r_2, r_3, r_4, r_7, r_8$    | 0.2696 | 0.5721  | 0.2920  | -0.1012 | -0.0616 | 0.0290 | 0.0290 |
| $r_1, r_2, r_5, r_6, r_7, r_8$    | 0.2411 | 0.5610  | 0.3344  | -0.0934 | -0.0755 | 0.0325 | 0.0325 |
| $r_3, r_4, r_9, r_{10}, r_7, r_8$ | 0.0325 | -0.0755   | -0.0934 | 0.3344  | 0.5610  | 0.2411 | 0.2411 |
| $r_5, r_6, r_9, r_{10}, r_7, r_8$ | 0.0290 | -0.0616   | -0.1012 | 0.2920  | 0.5721  | 0.2696 | 0.2696 |

表 2 各阶滤波器输出分量与角度参数计算结果

| 阶数    | 系数 $a_0, \dots, a_i$ |         |         |         | 系数 $b_0, \dots, b_i$ |        |        |         |         | $\theta_{i+1}$ | $\phi_{i+1}$ |           |
|-------|----------------------|---------|---------|---------|----------------------|--------|--------|---------|---------|----------------|--------------|-----------|
| $i=4$ | -0.0037              | 0.1299  | 0.3038  | -0.5691 | 0.2542               | 0.2714 | 0.5763 | 0.2789  | -0.1368 | 0.0035         | -0.7798      | -83.3953  |
| $i=3$ | 0.1377               | 0.3075  | -0.5709 | 0.2542  |                      | 0.2714 | 0.5745 | 0.2748  | -0.1290 |                | 26.9073      | -82.6155  |
| $i=2$ | 0.0143               | -0.6335 | 0.2850  |         |                      | 0.3044 | 0.6515 | -0.0133 |         |                | 2.6807       | -109.5228 |
| $i=1$ | -0.6633              | 0.2854  |         |         |                      | 0.3047 | 0.6211 |         |         |                | -65.3255     | -112.2035 |
| $i=0$ | 0.6836               |         |         |         |                      | 0.7299 |        |         |         |                | -46.8780     | -46.8780  |

由表 2 中参数  $\phi$  的计算结果可看出,  $\phi_2$  与  $\phi_3$  以及  $\phi_4$  与  $\phi_5$  近似相等, 因此滤波器结构中第 2、3 个波片和第 4、5 个波片可分别由 2 倍厚度的 1 个波片代替, 得到使用三个波片, 厚度比为 1:2:2 的滤波器结构. 在近似过程中根据实际滤波性能要求取不同的近似角度参数.

图 2、3 是理想滤波响应与设计结果以及取近似后 ( $\phi_2 = \phi_3 = -110^\circ, \phi_4 = \phi_5 = -83^\circ$ ) 的比较. 在通带和过渡带, 近似后的滤波特性与理想特性基本吻合, 在阻带衰减特性劣化约 3 dB(图 2); 设计结果与理想滤波特性在阻带仅有 0.3 dB 的差别(图 3), 在其他部分完全吻合. 以上结果证明了设计方法的正确性.

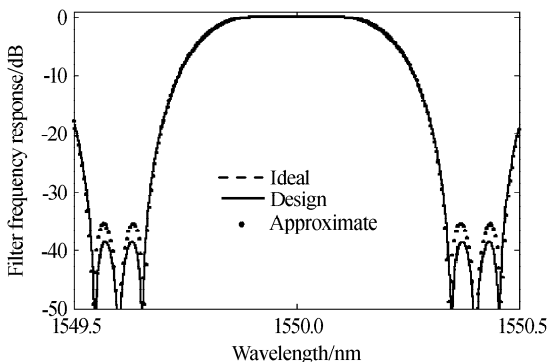


图 2 理想滤波响应与设计结果比较  
Fig. 2 Comparing ideal filter response with design results

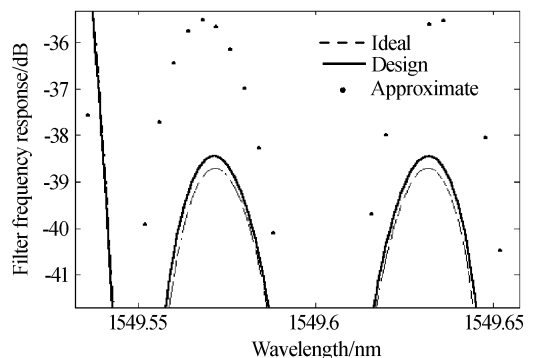


图 3 图 2 中阻带部分的放大图  
Fig. 3 Details of stop-band in Fig. 2

## 4 结论

FIR 晶体光滤波器的琼斯矩阵是各构成元件琼斯矩阵的乘积,利用矩阵乘法性质得出了与输出频率响应分量正交的分量,同时建立了简单的反向递推关系,所有角度参数通过  $N$  步迭代运算即可确定.提出的设计方法与现有设计方法相比过程简单,物理概念清晰,最后的设计实例证明了这一点.

### 参考文献

- Harris S E, Amman E O, Chang I C. Optical network synthesis using birefringent crystals. \* I. Synthesis of lossless network of equal-length crystals. *Journal of the Optical Society of America*, 1964, **54**(10):1267~1279
- 于连君,程光华,王屹山,等. 双折射滤光片消除激光热致双折射的研究. *光子学报*, 2004, **33**(7): 769~772  
Yu L J, Cheng G H, Wang Q S, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(7):769~772
- 程光华,董淑福,王屹山,等. 腔内有双折射滤光片的激光实际线宽. *光子学报*, 2003, **32**(7):790~793  
Cheng G H, Dong S F, Wang Y S, et al. *Acta Photonica*

- Sinica*, 2003, **32**(7):790~793
- Zhou Y, Zeng G J, Yu F H. Particle swarm optimization-based approach for optical finite impulse response filter design. *Applied Optics*, 2003, **42**(8):1503~1507
  - 周瑛,吴国忠,曾广杰,等. 用模拟退火算法设计光学有限脉冲响应滤波器. *光学学报*, 2003, **23**(8):1000~1004  
Zhou Y, Wu G Z, Zeng G J, et al. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(8):1000~1004
  - 张娟,刘立人,周煜,等. 双折射滤波器光谱透射率函数的平坦化优化计算. *光学学报*, 2003, **23**(4):426~430  
Zhang J, Liu L R, Zhou Y, et al. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(4):426~430
  - Zhao B. Tandom comb filter. US patent application publication, US 2002/0051277 A1, 2002-5-2
  - 胡广书. 数字信号处理:理论、算法与实现. 北京:清华大学出版社, 2003. 296~326  
Hu G S. *Digital Signal Processing: Theory, Algorithm and Realization*. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. 296~326

## Jones Matrix Based Synthesis for FIR Optical Filter Using Birefringent Crystals

Liu Jihong<sup>1,2</sup>, Fang Qiang<sup>3</sup>, Yin Yafang<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710068

<sup>2</sup> Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039

<sup>3</sup> Department of Electronic and Information Engineering, Xi'an Institute of Post and Telecommunication, Xi'an 710061

Received date: 2004-11-23

**Abstract** FIR optical filter using birefringent crystals consists of  $N$  cascaded crystal waveplates with the same thickness between an input and an output polarizer. The variables determined by synthesis procedure are the angles of the optic axes of the crystal waveplates and the angle of the output polarizer. A Jones matrix based step-down iteration synthesis procedure for filter of this kind is proposed. Jones matrix describing such filters is the product of Jones matrixes of waveplates and polarizers used in filter. A simple step-down iteration relation and the orthogonal frequency response correspond to frequency response of filter is determined by this condition. The experimental result agrees with that provided by the reference and shows that the synthesis procedure is simple.

**Keywords** Optical filter; Synthesis procedure; Jones matrix; FIR filter



**Liu Jihong** was born in 1977, graduated from Xi'an Institute of Post and Telecommunication in 1999 as a bachelor and received his master degree in communication and information system from Xidian University in 2002. Now he is a Ph. D. candidate in Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics. His current research interests include optical passive devices and optical communication networks.