第 27 卷 第 4 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 27 No. 4
2004 年 11 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Nov., 2004

含偶长圈的 7 点 7 边图的图设计*

高印芝 左会娟 康庆德

(河北师范大学数学与信息科学学院, 河北石家庄 050091)

摘 要 设 λK_v 是 v 阶 λ 重完全图, G 是一个无孤立点的有限简单图. λK_v 的一个 G- 分拆 (或 G- 设计, 记为 $G\text{-}GD_\lambda(v)$) 是指一个序偶 $(X,\mathcal{B})$, 其中 X 是完全图 K_v 的顶点集, $\mathcal{B}$ 是 K_v 中同构于 G 的子图 (称为区组) 的族, 使得 K_v 中每条边恰好出现在 $\mathcal{B}$ 的 λ 个区组中. 本文完全解决了含偶长圈的十个 7 点 7 边图的图设计存在性问题.

关键词 完全图, 完全多部图, 图设计, 带洞图设计

1 引言

v 阶 λ 重完全图 λK_v 是 v 点集上的一个无向图, 其任意两个不同点之间均恰有 λ 条边相连. 而 λ **重完全多部图** $\lambda K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$ 是一个如下的图:

1) 点集合 $=\bigcup\limits_{i=1}^{t} X_i$, 诸 X_i(称为洞) 两两不交且 $|X_i|=n_i$;

2) $\forall x\in X_i, y\in X_j$, 当 $i\neq j$ 时 (x,y) 在边集合中出现 λ 次, 否则不出现.

设 G 是一个有限简单图, 所谓 G- 图设计 $G\text{-}GD_\lambda(v)$ 是指一个序偶 $(X,\mathcal{B})$, 其中 X 是完全图 K_v 的顶点集, $\mathcal{B}$ 是 K_v 中与 G 同构的一些子图 (区组) 的集合, 使得 K_v 中每条边恰好出现在 $\mathcal{B}$ 的 λ 个区组中. $G\text{-}GD_\lambda(v)$ 存在的必要条件是

$$v\geq k,\qquad \lambda v(v-1)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2e),\qquad \lambda(v-1)\equiv 0\,(\mathrm{mod} d),\tag{*}$$

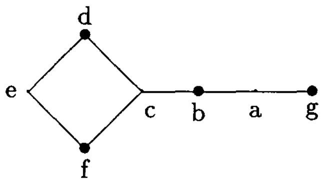
其中 k 和 e 分别为图 G 的顶点数和边数, 而 d 为 G 的各点度数的最大公因子.

对于一个有限简单图 G, 若 λ 重 t 部图 $\lambda K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$ 可分拆成若干个与 G 同构的边不相交的子图的并, 则称其为 **带洞的图设计**, 记为 $G\text{-}HD_\lambda(T)=(X,\mathcal{H},\mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{A}$ 是此设计的区组集, $X=\bigcup\limits_{i=1}^{t} X_i$ 是此设计的顶点集, 诸 X_i 是 X 的两两不交的 n_i 元子集, $\mathcal{H}=\{X_1,\cdots,X_t\}$ 是此带洞设计的洞集合, 而 T 称为此带洞设计的型. 通常, T 被记为指数形式 $n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_m^{k_m}$, 它表示 n_1 长洞有 k_1 个, n_2 长洞有 k_2 个, $\cdots$, n_m 长洞有 k_m 个. 当 $\lambda=1$ 时, 符号 $G\text{-}GD_\lambda(v)$ 和 $G\text{-}HD_\lambda(T)$ 中的下标 $\lambda=1$ 可省略.

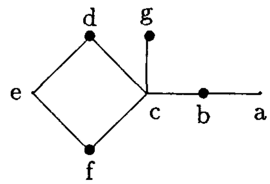
关于图设计的存在性, 近年来有着广泛的研究. 当图 G 的点数 $k\leq 4$ 时, [1] 证明了必要条件也是充分的, 当 $k=5$ 时, [2] 亦几乎给出了完全解. 当 $k=6$ 时, [3] 给出了 $3\leq e(G)\leq 6$ 且 $\lambda=1$ 的存在谱; [4-7] 则基本解决了 $e(G)=7,8$ 且 $\lambda\geq 1$ 的情况;

本文 2002 年 11 月 12 日收到. 2004 年 10 月 20 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10371031 号) 和河北省自然科学基金 (103146 号) 资助项目.

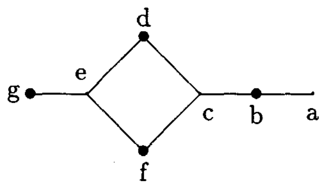
最近，[8] 又对 $e(G)=9$ 的情况完成了大部分的图．本文将研究含偶长圈的七点七边图的图设计的存在性，这类图共有以下十个：



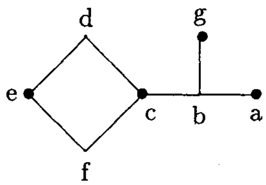
G_1



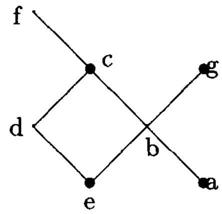
G_2



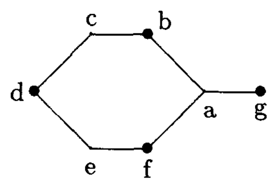
G_3



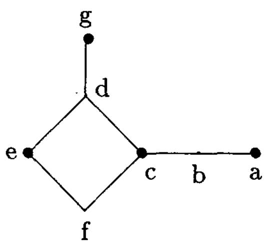
G_4



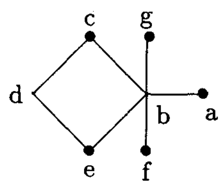
G_5



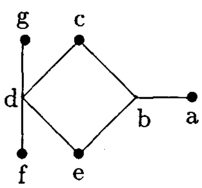
G_6



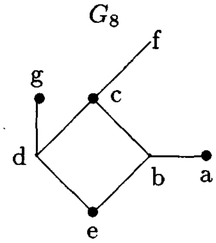
G_7



G_8



G_9



G_{10}

这十个图分别被记为：

$G_1:(a,b,c,d,e,f(c);g(a))$, $G_2:(a,b,c,d,e,f(c);g(c))$,
$G_3:(a,b,c,d,e,f(c);g(e))$, $G_4:(a,b,c,d,e,f(c);g(b))$,
$G_5:(a,b,c,d,e(b);f(c);g(b))$, $G_6:(g,a,b,c,d,e,f(a))$,
$G_7:(a,b,c,d,e,f(c);g(d))$, $G_8:(a,b,c,d,e(b);f(b);g(b))$,
$G_9:(a,b,c,d,e(b);f(d);g(d))$, $G_{10}:(a,b,c,d,e(b);f(c);g(d))$.

按照必要条件 (*)，我们需解决以下图设计的存在性：G-$GD(v)$，$v\equiv 0,1 \bmod 7, v\geq 7$；$G$-$GD_7(v)$，$v\equiv 2,3,4,5,6 \bmod 7$，$v>7$.

2 基本引理

引理 1 对于正整数 $n, e, t, \lambda, s_1, \cdots, s_l$ 及有限简单图 G, 若存在 G-$GD_\lambda(n)$, G-$GD_\lambda(et)$ 及 G-$HD_\lambda(e^1 s_k^1)$, $1 \le k \le l$, 则当 n 可表为 $s_1, \cdots, s_l$ 的线性组合时, 亦存在 G-$GD_\lambda(et+n)$.

证 设 $n = \sum\limits_{k=1}^{l} s_k x_k$. 令 $P = Z_e \times I_t$, $Q = \bigcup\limits_{1\le k\le l} (S_k \times I_{x_k})$, 其中 $|P| = \mathrm{et}$, $|Q| = n$, $|S_k| = s_k$, 且诸 S_k 两两不交, $1 \le k \le l$. 由已知, 存在以下带洞图设计 ($\forall i \in I_t$, $j \in I_{x_k}$, $1 \le k \le l$).

$$G - HD_\lambda(e^1 s_k^1) = \big((Z_e \times \{i\}) \cup (S_k \times \{j\}),\ \{Z_e \times \{i\},\ S_k \times \{j\}\},\mathcal{C}_{ijk}\big)$$

及 G-$GD_\lambda(et) = (P, \mathcal{A})$, G-$GD_\lambda(n) = (Q, \mathcal{B})$, 则

$$\mathcal{B} \bigcup \mathcal{A} \bigcup \Big(\bigcup_{1\le k\le l,\ i\in I_t, j\in I_{x_k}} \mathcal{C}_{ijk} \Big)$$

即构成了 $P \bigcup Q$ 上的一个 G-$GD_\lambda(et+n)$.

引理 2 对于每个图 G_i, $1 \le i \le 10$, 均存在以下的带洞图设计:

(1) G_i-$HD(4^1 7^1)$, (2) G_i-$HD(7^2)$, (3) G_i-$HD_7(t^1 7^1)$, $t = 5, 6$.

证 (1) G_i-$HD(4^1 7^1)$. 完全二部图的点集取为 $\overline{Z_4} \cup \big(Z_4 \cup \{x, y, z\}\big)$. 以下基区组 mod 7:

$G_1 : (\bar{2}, *, \bar{1}, 1, \bar{0}, 3(\bar{1}); x(\bar{2}))$, $G_2 : (\bar{2}, *, \bar{1}, 1, \bar{0}, 3(\bar{1}); x(\bar{1}))$,
$G_3 : (\bar{2}, *, \bar{1}, 1, \bar{0}, 3(\bar{1}); x(\bar{0}))$, $G_4 : (2, \bar{2}, 3, \bar{0}, *, \bar{1}(3); x(\bar{2}))$,
$G_5 : (1, \bar{1}, 3, \bar{0}, *(\bar{1}); \bar{2}(3); x(\bar{1}))$, $G_6 : (x, \bar{1}, 3, \bar{0}, *, \bar{2}, 2(\bar{1}))$,
$G_7 : (x, \bar{3}, 3, \bar{0}, *, \bar{1}(3); 1(\bar{0}))$, $G_8 : (x, \bar{1}, 1, \bar{0}, 3(\bar{1}); y(\bar{1}); z(\bar{1}))$,
$G_9 : (x, \bar{1}, 1, \bar{0}, 3(\bar{1}); y(\bar{0}); z(\bar{0}))$, $G_{10} : (1, \bar{1}, 3, \bar{0}, *(\bar{1}); \bar{2}(3); x(\bar{0}))$,

其中

$$* = \begin{cases} y & \text{对于 } (i = 1,2,3,4,5,7,10,\ j = 0,2) \text{ 或 } (i = 6,\ j = 0,1) \\ z & \text{对于 } (i = 1,2,3,4,5,7,10,\ j = 1,3) \text{ 或 } (i = 6,\ j = 2,3). \end{cases}$$

(2) G_i-$HD(7^2)$. 完全二部图的点集取为 $\overline{Z_7} \cup Z_7$. 由以下基区组 mod 7 构成:

$G_1 : \big(2, \bar{3}, 1, \bar{6}, 0, \bar{4}(1); \bar{2}(2)\big)$, $G_2 : \big(2, \bar{3}, 1, \bar{6}, 0, \bar{4}(1); \bar{1}(1)\big)$,
$G_3 : \big(2, \bar{3}, 1, \bar{6}, 0, \bar{4}(1); \bar{0}(0)\big)$, $G_4 : \big(2, \bar{3}, 1, \bar{6}, 0, \bar{4}(1); 3(\bar{3})\big)$,
$G_5 : \big(\bar{0}, 0, \bar{6}, 1, \bar{4}(0); 4(\bar{6}); \bar{1}(0)\big)$, $G_6 : \big(\bar{1}, 0, \bar{6}, 1, \bar{5}, 2, \bar{2}(0)\big)$,
$G_7 : \big(\bar{5}, 4, \bar{6}, 0, \bar{4}, 1(\bar{6}); \bar{0}(0)\big)$, $G_8 : \big((\bar{3}, 0, \bar{5}, 5, \bar{6}(0); \bar{4}(0); \bar{2}(0)\big)$,
$G_9 : \big(\bar{0}, 0, \bar{5}, 2, \bar{6}(0); \bar{4}(2); \bar{3}(2)\big)$, $G_{10} : \big(5, \bar{5}, 0, \bar{6}, 4(\bar{5}); \bar{4}(0); 3(\bar{6})\big)$.

(3) G_i-$HD_7(t^1 7^1)$, $t \ge 5$. 完全二部图的点集取为 $\{x_0, x_1, \cdots, x_{t-1}\} \cup Z_7$. 诸图 G_i 均为点可 2- 染色的, 前页各图已以加重黑点和非加重黑点标出各点的 2- 染色. 注意每图中加重黑点个数均 $\le 5 \le t$, 且度数和均 $= 7$. 此带洞图设计的区组集由 t 个基区组 mod 7 构成. 可任意先安排出一个基区组 (加重黑点处安排集合 $\{x_0, x_1, \cdots, x_{t-1}\}$ 的元, 而非加重黑点处安排 Z_7 的元), 再将此诸基区组中 x_s 的下标模 t 循环 (Z_7 中元不变), 即产生出所需要的 t 个基区组.

引理 3 对于 $n \ge 4$ 及 $1 \le i \le 10$, 若存在 G_i-$GD_7(n)$ 及 G-$GD_7(7t)$ 则存在 G-$GD_7(7t+n)$. 而对于 $n = 7, 8$ 及 $1 \le i \le 10$, 若存在 G_i-$GD(n)$ 及 G-$GD(7t)$ 则存在 G-$GD(7t+n)$.

证 应用引理 1, 令 $e=7$, 而 s_k 分别取 4–7. 由引理 2 结论可知：只需再给出 $n\ge 8$ 时 n 的线性组合表示即可. 事实上，当 $n\ge 7$ 且 $n\notin\{9,10,13,17\}$ 时，方程 $n=4x+7y$ 恒有非负整数解：

n	x	y	t	无解的 $n\ge 7$
$4t$	t	0	$t\ge 0$	
$4t+1$	$t-5$	3	$t\ge 5$	9, 13, 17
$4t+2$	$t-3$	2	$t\ge 3$	10
$4t+3$	$t-1$	1	$t\ge 1$	

而 $9=4+5$, $10=4+6$, $13=6+7$, $17=4+6+7$. 最后，因 $8=4+4$, 而引理 2 的 (1), (2) 恰是对于 $\lambda=1$ 的，结论成立.

3 几个小阶数的不存在性

引理 4 不存在 G_8-$GD(7)$ 和 G_8-$GD(8)$.

证 图 G_8 中点的度分别为 1, 1, 1, 2, 2, 2, 5.

(1) 若 G_8-$GD(7)$ 存在，应由 3 个区组构成. 易知每点的度型只能为 1^15^1 和 2^3. 设具有此两种度型的点的个数分别为 a,b, 则有如下方程组：

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&3\\1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\9\\3\\7\end{pmatrix},$$

但此方程组无解，故 G_8-$GD(7)$ 不存在.

(2) 若 G_8-$GD(8)$ 存在，应由 4 个区组构成. 易知每点的度型只能为 1^12^3, 2^15^1 和 1^25^1. 设具有此三种度型的点的个数分别为 a,b,c, 则有如下方程组：

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\12\\4\\8\end{pmatrix}.$$

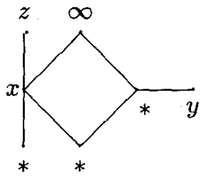
它有唯一解 $a=c=4$, $b=0$. 设点集为 $\{A,B,C,D\}\cup Z_4$, 其中 A,B,C,D 的度型为 1^25^1, Z_4 中点的度型为 1^12^3. 因此，每个区组中二度点位置必均为 Z_4 中点. 由图 G_8 结构可见，这共将产生 $2\times 4=8$ 条 Z_4 点间的连边. 但 Z_4 只有 6 条不同的边，此矛盾说明不存在 G_8-$GD(8)$.

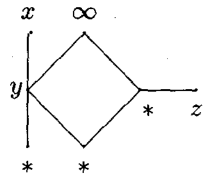
引理 5 不存在 G_9-$GD(7)$.

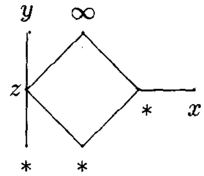
证 图 G_9 中点的度分别为 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4. 若 G_9-$GD(7)$ 存在，应由 3 个区组构成. 易知每点的度型只能为 2^14^1, 1^24^1, $1^12^13^1$, 2^3 和 3^2. 设具有此五种度型的点的个数分别为 a,b,c,d,e, 则有如下方程组：

$$\begin{pmatrix}0&2&1&0&0\\1&0&1&3&0\\0&0&1&0&2\\1&1&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\\3\\3\\7\end{pmatrix}.$$

它有唯一解 $a=e=0$, $b=c=3$, $d=1$. 记三个度型为 1^24^1 的点为 x,y,z, 而三个度型为 $1^12^13^1$ 的点均记为 $*$, 一个度型为 2^3 的点为 ∞, 则三个区组必形为：







不难核验：在这种结构下，点集 $\{x,y,z\}$ 与点集 $\{*,*,*\}$ 之间的九条边不能全部出现. 故 G_9-$GD(7)$ 不存在.

引理 6 不存在 G_9-$GD(8)$.

证 图 G_9 中点的度分别为 $1,1,1,1,2,2,3,4$. 若 G_9-$GD(8)$ 存在，应由 4 个区组构成. 易知每点的可能度型为 $T=1^12^3,1^12^14^1,1^34^1,1^22^13^1,2^23^1,3^14^1$ 和 1^13^2. 设具度型 T 的点的个数为 $N(T)$, 而方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&3&2&0&0&1\\3&1&0&1&2&0&0\\0&0&0&1&1&1&2\\0&1&1&0&0&1&0\\1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N(1^12^3)\\N(1^12^14^1)\\N(1^34^1)\\N(1^22^13^1)\\N(2^23^1)\\N(3^14^1)\\N(1^13^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\8\\4\\4\\8\end{pmatrix}$$

共有以下 15 组非负整数解：

$$\begin{pmatrix}N(1^12^3)\\N(1^12^14^1)\\N(1^34^1)\\N(1^22^13^1)\\N(2^23^1)\\N(3^14^1)\\N(1^13^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&2&2&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1\\0&1&0&2&0&1&1&2&2&3&3&4&1&2&0\\3&2&2&2&4&3&3&2&2&1&1&0&2&1&3\\0&1&2&0&0&1&0&2&1&3&2&4&2&3&1\\1&0&0&0&4&3&2&2&1&1&0&0&1&0&2\\1&1&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\1&1&0&2&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $N(1^12^3)\geq 2$ 时安排不存在. 事实上，因 G_9 中的 1° 点与 2° 点不相邻，故必 $N(1^12^3)\leq 1$. 于是，所对应的第 $1-4$ 组解不存在.

(2) 当 $N(1^12^14^1)+N(1^34^1)=4$ 时. 设此四点为 a,b,c,d, 而 $N(1^12^14^1)=m$, 则 a,b,c,d 将占据的 1° 点位置总数 $=m+3(4-m)=12-2m$. 而 a,b,c,d 间的六条边应全部出现在四个区组的 4° 点邻域内，其中 $2^\circ\sim 4^\circ$ 间的边 m 条， $1^\circ\sim 4^\circ$ 间的边 $6-m$ 条. 因四个区组的 4° 点位置恰分别为 a,b,c,d, 故 a,b,c,d 恰占据了下方总计 8 个 (即对应于 $1^\circ\sim 4^\circ$ 间边的) 1° 点位置中的 $6-m$ 个，而尚余的 $6-m$ 个应安排的 1° 点将出现在上方总计 4 个 (即对应于 $1^\circ\sim 3^\circ$ 间边的) 1° 点位置处. 当然，首先需有： $6-m\leq 4$, 即 $m\geq 2$. 于是， $m=0$ 与 1 所对应的第 $5-7$ 组解不存在.

今考察再安排 t 个 $1^22^13^1$ 型点的可能. 因上方尚余的 1° 点位置个数是 $4-(6-m)=m-2$, 而这 t 个点中每个点 x(均需与 a,b,c,d 连边) 安排的可能仅有三种： i) 两个 1° 点均安排在下方； ii) 两个 1° 点均安排在上方； iii) 两个 1° 点分别安排在上下方. 但其中 i) 的安排是不可能的. 事实上，若安排在两个 1° 点位置的 x 连接的 4° 位置点为 a,b, 安排在 2° 点位置的 x 连接的 4° 位置点为 c, 则安排在 3° 点位置的 x 连接的 1° 位置点不可能是 d (因该区组 4° 位置点已为 d). 于是，

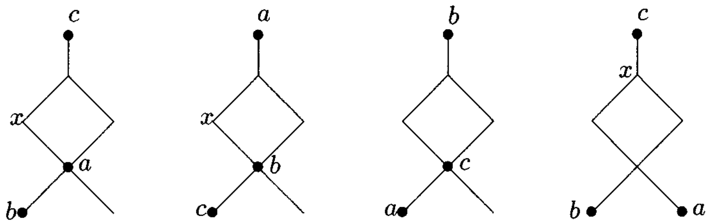
当 $m=2$ 时， $m-2=0$, 只能取情形 i). 故必为 $t=0$;

当 $m=3$ 时， $m-2=1$. 对于 $t\geq 2$, t 个点中必有一个取情形 i), 只能 $t\leq 1$;

当 $m=4$ 时， $m-2=2$. 对于 $t\geq 3$, t 个点中必有一个取情形 i), 只能 $t\leq 2$.

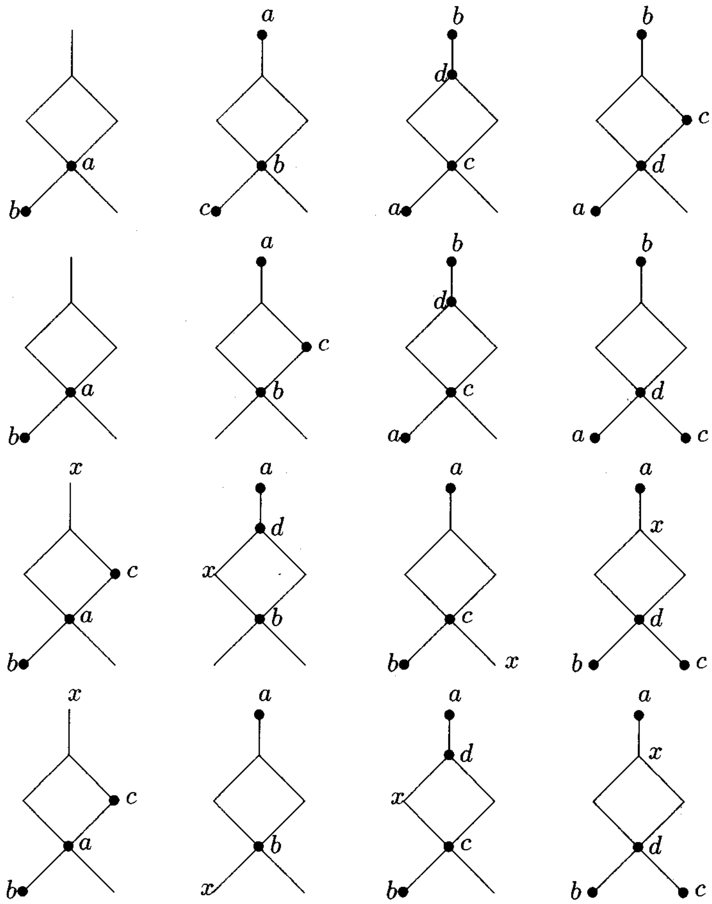
这样，以上讨论即给出结论： $m=2,3,4$ 所对应的第 $8-12$ 组解不存在.

(3) 当 $N(1^3 4^1)=3$ 时，此三点 a,b,c 的安排只能取如下 (同构意义) 的唯一形式. 今若再安排 $2^2 3^1$ 型的点 x, 则不难核验： x 的安排可能亦仅有图示的唯一一种：



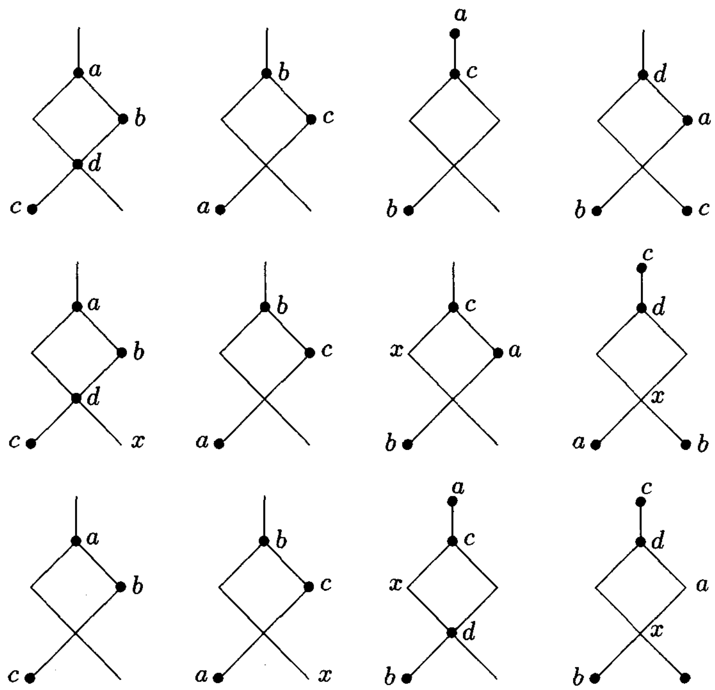
由上述安排的唯一性可知：对应于 $N(1^3 4^1)=3$, $N(2^2 3^1)=2$ 的第 13 组解不存在.

(4) 当 $N(1^3 4^1)=2$, $N(1^1 2^1 4^1)=N(3^1 4^1)=1$ 时，仅有如下图所示的四种安排可能 (同构意义下，其中 a,b 与 c,d 分别为具以上型的点)：



今若再安排 $1^2 2^1 3^1$ 型的点 x, 则不难核验： x 的安排可能亦仅有上边后两图所示的分别唯一的安排. 由所述唯一性可知：对应于 $N(1^3 4^1)=2$, $N(1^1 2^1 4^1)=N(3^1 4^1)=1$, $N(1^2 2^1 3^1)=2$ 的第 14 组解不存在.

(5) 当 $N(1^2 2^1 3^1)=3,\ N(3^1 4^1)=1$ 时，仅有如下图所示的三种安排可能 (同构意义下. 其中， a,b,c 与 d 分别为具以上型的点):



进而，考虑再安排 $1^1 2^1 4^1$ 型点 x 的可能性. 不难核验：x 仅可能有上边后两图所示的分别唯一的安排. 由所述唯一性可知：对应于 $N(1^2 2^1 3^1)=3,\ N(3^1 4^1)=1, N(1^1 2^1 4^1)=2$ 的第 15 组解不存在.

至此，由以上 (1)–(5) 的讨论可知：全部可能的 15 组解均不存在. 即 G_9-$GD(8)$ 确不存在.

引理 7 不存在 G_{10}-$GD(7)$.

证 图 G_{10} 中点的度分别为 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3. 若 G_{10}-$GD(7)$ 存在，应由 3 个区组构成. 易知每点的度型只能为 3^2, $1^1 2^1 3^1$ 和 2^3, 设具有此三种度型的点的个数分别为 a,b,c, 则有如下方程组：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix},$$

但此方程组无解，故 G_{10}-$GD(7)$ 不存在.

4 $\lambda=1$ 的小阶数构作

引理 8 存在以下图设计 G_i-$GD(v)$:

(1) $v=7,8$, 对于 $1\le i\le 7$;

(2) $v=14,15,21,22$, 对于 $8\le i\le 9$;

(3) $v=8,14,21$, 对于 $i=10$.

证 以下诸 $GD(7)$ 均取点集 $(Z_3\times Z_2)\cup\{\infty\}$, 而区组集由所列基区组模 $(3,-)$ 得到. 对于 $GD(8)$, 则均取点集 Z_8, 区组集全部列出. 对于其它的 $GD(v)$, 当 v 为奇 (或偶)

数时，均取点集 Z_v(或 $Z_{v-1}\cup\{\infty\}$)，而区组集则由所列基区组模 v(或 $v-1$) 得到.

$\underline{G_1\text{-}GD(v):(a,b,c,d,e,f(c);g(a))}$

$v=7:\ (2_0,2_1,0_0,\infty,0_1,1_1(0_0);1_0(2_0))$.

$v=8:\ (4,1,0,2,6,3(0);5(4)),\ (3,1,7,4,6,5(7);2(3)),$
$(2,5,3,4,0,7(3);1(2)),\ (2,7,6,0,5,1(6);4(2))$.

$\underline{G_2\text{-}GD(v):\ (a,b,c,d,e,f(c);g(c))}$

$v=7:\ (1_0,0_1,0_0,\infty,2_1,1_1(0_0);2_0(0_0))$.

$v=8:\ (5,2,0,3,6,4(0);1(0)),\ (7,3,1,5,0,6(1);4(1)),$
$(0,7,2,4,5,6(2);3(2)),\ (2,1,7,4,3,5(7);6(7))$.

$\underline{G_3\text{-}GD(v):\ (a,b,c,d,e,f(c);g(e))}$

$v=7:\ (1_1,2_0,1_0,2_1,0_1,\infty(1_0);0_0(0_1))$.

$v=8:\ (2,5,4,1,0,7(4);6(0)),\ (4,0,3,7,1,6(3);5(1)),$
$(4,6,5,0,2,7(5);3(2)),\ (7,6,2,1,3,4(2);5(3))$.

$\underline{G_4\text{-}GD(v):\ (a,b,c,d,e,f(c);g(b))}$

$v=7:\ (2_0,1_1,0_0,0_1,\infty,1_0(0_0);2_1(1_1))$

$v=8:\ (7,3,0,1,5,2(0);4(3)),\ (6,1,7,0,4,5(7);2(1)),$
$(3,5,6,2,7,4(6);0(5)),\ (0,6,3,1,4,2(3);7(6))$.

$\underline{G_5\text{-}GD(v):\ (a,b,c,d,e(b);f(c);g(b))}$

$v=7:\ (2_1,0_0,1_1,0_1,\infty(0_0);1_0(1_1);2_0(0_0))$.

$v=8:\ (6,0,4,1,7(0);2(4);5(0)),\ (6,1,5,7,2(1);3(5);0(1)),$
$(5,2,6,7,3(2);4(6);0(2)),\ (1,3,4,5,6(3);7(4);0(3))$.

$\underline{G_6\text{-}GD(v):\ (g,a,b,c,d,e,f(a))}$

$v=7:\ (1_0,2_0,\infty,0_1,1_1,0_0,2_1(2_0))$.

$v=8:\ (0,4,5,7,3,2,1(4)),\ (1,5,2,4,3,0,6(5)),$
$(3,6,4,7,1,0,2(6)),\ (2,7,0,5,3,1,6(7))$.

$\underline{G_7\text{-}GD(v):\ (a,b,c,d,e,f(c);g(d))}$

$v=7:\ (2_1,0_1,0_0,1_1,\infty,1_0(0_0);2_0(1_1))$.

$v=8:\ (4,1,0,2,6,3(0);5(2)),\ (2,4,0,5,7,6(0);1(5)),$
$(2,7,1,6,4,3(1);5(6)),\ (1,2,3,7,4,5(3);0(7))$.

$\underline{G_8\text{-}GD(v):\ (a,b,c,d,e(b);f(b);g(b))}$

$v=14:\ (1,0,3,-2,4(0);\infty(0);2(0))$.

$v=15:\ (1,0,3,-2,4(0);7(0);2(0))$.

$v=21:\ (1,0,3,-2,4(0);7(0);2(0))\times 7,\ (9,0,10,1,-9(0);8(0);-10(0)),$
$(-10,0,9,1,-8(0);8(0);10(0))\times 2$.

$v=22$: 将 $v=21$ 中后两个基区组的 10 改为 ∞, 另添加 $(2,\infty,10,0,-10(\infty);3(\infty);1(\infty))$.

$\underline{G_9\text{-}GD(v):\ (a,b,c,d,e(b);f(d);g(d))}$

$v=14:\ (\infty,-2,3,0,4(-2);2(0);1(0))$.

$v=15:\ (5,-2,3,0,4(-2);2(0);1(0))$.

$v=21:\ (5,-2,3,0,4(-2);9(0);1(0)),\ (5,-2,3,0,4(-2);2(0);8(0))\times 3,$
$(5,-2,3,0,4(-2);10(0);1(0)),\ (5,-2,3,0,4(-2);8(0);1(0))\times 2,$
$(4,3,1,0,2(3);-8(0);8(0)),\ (3,1,-9,0,10(1);9(0);-10(0))\times 2$.

$v=22$: 将 $v=21$ 中第一个基区组中的 9 及后两个区组中的 3 均改为 ∞, 另添加

$(9,0,2,\infty,-2(0);1(\infty);-1(\infty))$.

$\underline{G_{10}\text{-}GD(v):\ (a,b,c,d,e(b);f(c);g(d))}$

$v=8:\ (1,0,2,5,3(0);4(2);6(5)),\ (4,0,5,7,6(0);1(5);3(7)),$
$(7,2,3,4,1(2);6(3);5(4)),\ (2,6,1,7,4(6);3(1);0(7))$.

$v=14:\ (1,0,2,11,3(0);\infty(2);4(11))$.

$v=21:\ (-9,0,8,1,9(0);-1(8);-8(1)),\ (1,0,2,-2,3(0);-6(2);6(-2))\times 2,$
$(-10,0,9,1,10(0);-1(9);-9(1)),\ (1,0,2,-2,3(0);-5(2);4(-2))\times 5,$

$(10,0,6,-1,\ 9(0);-4(6);5(-1))$.

5 $\lambda=7$ 的小阶数构造

引理 9 存在以下图设计 G_i-$GD_7(v)$:

(1) $v=9,10,11,12,13$, 对于 $1\le i\le 7$;

(2) $v=9,10,11,12,13,16,17,18,19,20$, 对于 $8\le i\le 10$.

证 对于以下诸 $GD_7(v)$, 当 v 为奇 (或偶) 数时, 点集均取为 Z_v(或 $Z_{v-1}\bigcup\{\infty\}$), 而区组集则由所列基区组模 v(或 $v-1$) 得到.

G_1-$GD_7(v)$: $(a,b,c,d,e,f(c);g(a))$

$v=9$: $(-2,2,0,4,1,-3(0);-1(-2))$, $(1,4,0,-4,-1,3(0);-3(1))$,
$(-4,-2,0,2,-1,1(0);-3(-4))$, $(-4,-2,0,1,2,-1(0);-3(-4))$.

$v=10$: 将 G_1-$GD_7(9)$ 各区组中 g 改取为 ∞, 并添加 $(-1,-2,\infty,0,1,2(\infty);3(-1))$.

$v=11$: $(2,1,0,3,-1,-3(0);4(2))\times 2$, $(-1,-5,0,5,2,3(0);4(-1))$,
$(-1,4,0,-4,1,5(0);-5(-1))$, $(-1,1,0,5,4,2(0);-4(-1))$.

$v=12$: 将 G_1-$GD_7(11)$ 各区组中 g 改取为 ∞, 并添加 $(2,-3,0,\infty,\ -1,3(0);5(2))$.

$v=13$: 将 G_1-$GD_7(11)$ 各区组中 g 改取为 6, 并添加 $(0,3,6,1,\ -5,-1(6);-3(0))$.

G_2-$GD_7(v)$: $(a,b,c,d,e,f(c);g(c))$

$v=9$: $(-4,-2,0,2,-1,1(0);4(0))$, $(-3,-2,0,1,2,-1(0);3(0))$,
$(-2,2,0,4,1,-3(0);-1(0))$, $(-3,1,0,-4,-1,3(0);2(0))$.

$v=10$: 将 G_2-$GD_7(9)$ 前三个区组中 a 改取为 ∞, 并添加 $(2,-2,\infty,0,1,3(\infty);-1(\infty))$.

$v=11$: $(2,4,0,1,-4,-3(0);5(0))$, $(-1,-5,0,1,-3,-4(0);5(0))$,
$(-2,3,0,1,-1,2(0);4(0))\times 3$.

$v=12$: 将 G_2-$GD_7(11)$ 前五个区组中 g 改取为 ∞, 并添加 $(1,-4,0,\infty,-1,-5(0);4(0))$.

$v=13$: 将 G_2-$GD_7(12)$ 各区组中 g 改取为 6, 并添加 $(1,-4,0,4,-2,\ -6(0);5(0))$.

G_3-$GD_7(v)$: $(a,b,c,d,e,f(c);g(e))$

$v=9$: $(-2,2,0,4,1,-3(0);-1(1))$, $(-3,1,0,-4,-1,3(0);2(-1)$,
$(-1,1,0,2,-2,-4(0);-3(-2))$, $(-3,-2,0,1,2,-1(0);4(2))$.

$v=10$: 将 G_3-$GD_7(9)$ 前四个区组中 g 改取为 ∞, 并添加 $(-4,-1,\infty,2,0,-2(\infty);1(0))$.

$v=11$: $(-2,-3,0,1,-1,2(0);3(-1))\times 2$, $(1,5,0,4,-1,-5(0);2(-1))$,
$(-2,-3,0,1,-1,2(0);4(-1))$, $(-1,-5,0,5,1,2(0);-4(1))$.

$v=12$: 将 G_3-$GD_7(11)$ 各区组中 g 改取为 ∞, 并添加 $(2,5,0,\infty,-1,4(0);3(-1))$.

$v=13$: 将 G_3-$GD_7(11)$ 各区组中 g 改取为 6, 并添加 $(2,6,0,4,-2,-5(0);3(-2))$.

G_4-$GD_7(v)$: $(a,b,c,d,e,f(c);g(b))$

$v=9$: $(-1,1,0,2,-2,-4(0);3(1))$, $(-3,-2,0,1,2,-1(0);-4(-2))$,
$(-2,2,0,4,1,-3(0);-1(-2))$, $(4,1,0,-4,-1,3(0);2(1))$.

$v=10$: 将 G_4-$GD_7(9)$ 各区组中 g 改取为 ∞, 并添加 $(3,4,\infty,2,0,-2(\infty);1(4))$.

$v=11$: $(4,0,2,-3,-1,3(2);-2(0))$, $(5,0,1,-1,2,-3(1);-2(0))$,
$(5,0,1,-2,-3,2(1);3(0))$, $(5,0,-1,2,-2,1(-1);4(0))\times 2$.

$v=12$: 将 G_4-$GD_7(11)$ 各区组中 g 改取为 ∞, 并添加 $(-2,0,4,\infty,-1,2(4);-4(0))$.

$v=13$: 将 G_4-$GD_7(11)$ 各区组中 g 改取为 6, 并添加 $(-3,-6,0,6,\ 2,4(0);-4(-6))$.

G_5-$GD_7(v)$: $(a,b,c,d,e(b);f(b);g(c))$

$v=9$: $(-2,0,1,-1,2(0);-3(1);4(0))$, $(-2,0,1,2,-1(0);-3(1);3(0))$,
$(2,0,4,1,-3(0);3(4);-1(0))$, $(1,0,-4,-1,3(0);-2(-4);2(0))$.

$v=10$: 将 G_5-$GD_7(9)$ 各区组中 f 改取为 ∞, 并添加 $(-4,0,\infty,3,1(0);2(\infty);4(0))$.

$v=11$: $(4,0,1,3,2(0);-4(1);5(0))$, $(-2,0,1,5,-1(1);-4(1);2(0))$,
$(5,0,1,-2,2(0);3(1);3(0))\times 3$.

$v=12:$ 将 G_5-$GD_7(11)$ 各区组中 f 改取为 ∞, 并添加 $(-5,0,5,\infty,4(0);1(5);-4(0))$.
$v=13:$ 将 G_5-$GD_7(11)$ 各区组中 f 改取为 6, 并添加 $(-4,0,5,1,1(0);-1(5);-5(0))$.

G_6-$GD_7(v):\ (g,a,b,c,d,e,f(a))$

$v=9:\ (3,1,0,-3,-2,2,-1(1)),\ (3,1,0,-3,-2,2,-1(1)),$
$(4,0,-3,-2,2,-1,1(0)),\ (-4,0,4,3,1,-2,2(0))$.
$v=10:$ 将 G_6-$GD_7(9)$ 各区组中 g 改取为 ∞, 并添加 $(1,\infty,0,4,2,\ -2,-4(\infty))$.
$v=11:\ (4,0,1,-1,2,-2,3(0))\times 2,\ (1,0,-1,4,2,-3,-2(0)),$
$(4,0,1,-4,-2,2,-3(0)),\ (-2,0,2,-3,1,4,3(0))$.
$v=12:$ 将 G_6-$GD_7(11)$ 各区组中 g 改取为 ∞, 并添加 $(4,0,1,-3,\infty,-2,\ 2(0))$.
$v=13:$ 将 G_6-$GD_7(11)$ 各区组中 g 改取为 6, 并添加 $(-4,0,4,-2,-6,\ 1,2(0))$.

G_7-$GD_7(v):\ (a,b,c,d,e,f(c);g(d))$

$v=9:\ (7,3,0,1,4,2(0);5(1))\times 3,\ (3,2,1,0,5,7(1);8(0))$.
$v=10:\ (7,3,0,1,\infty,2(0);5(1)),\ (7,3,0,1,4,\infty(0);5(1)),\ (4,2,1,0,5,7(1);8(0)),$
$(7,\infty,0,1,4,2(0));5(1)),\ (7,3,0,1,4,2(0);\infty(11))$.
$v=11:\ (5,2,0,1,9,4(0);3(1))\times 3,\ (4,10,0,1,5,6(0);2(1)),\ (3,7,0,4,2,5(0);9(4))$.
$v=12:\ (4,2,0,1,7,10(0);\infty(1))\times 3,\ (7,0,4,9,6(0);1(4),$
$(9,4,0,1,3,7(0);\infty(1)),\ (6,3,0,4,\infty,5(0);8(4))$.
$v=13:\ (9,2,0,1,5,8(0);7(1)),\ (9,2,0,1,5,8(0);6(1)),\ (7,11,0,1,2,4(0);8(1)),$
$(9,2,0,1,5,8(0);4(1)),\ (7,11,0,1,2,4(0);11(1),\ (7,10,0,6,11,5(0);1(6))$.

G_8-$GD_7(v):\ (a,b,c,d,e(b);f(b);g(b))$

$v=9:\ (1,7,4,5,0(7);2(7);6(7))\times 2,\ (1,5,4,7,0(5);6(5);3(5)),\ (1,4,5,0,7(4);6(4);2(4))$.
$v=10:$ 将 G_8-$GD_7(9)$ 前二区组中 6 改为 ∞, 另添加 $(3,\infty,1,0,-1(\infty);4(\infty);2(\infty))$.
$v=11:\ (9,7,4,5,0(7);3(7);6(7))\times 2,\ (9,7,4,5,0(7);2(7);10(7))\times 2,$
$(5,3,4,2,0(3);8(3);7(3))$.
$v=12:$ 将 G_8-$GD_7(11)$ 前二区组中 6 改为 ∞, 另添加 $(3,\infty,1,0,-1(\infty);4(\infty);2(\infty))$.
$v=13:\ \{(3,7,9,1,0(7);2(7);g(7)):g=5,8,10,11,12\}\bigcup\{(2,7,5,6,0(7);3(7);4(7))\}$.
$v=16:\ (1,0,3,-2,4(0);7(0);2(0))\times 5,\ (1,0,3,-2,4(0);7(0);\infty(0))\times 2,$
$(3,\infty,2,0,13(\infty);4(\infty);1(\infty))$.
$v=17:\ (1,0,3,-2,4(0);7(0);2(0))\times 4,\ (-8,0,1,-7,2(0);7(0);8(0)),$
$(1,0,3,-2,4(0);8(0);2(0)),(1,0,3,-2,4(0);7(0);8(0)),\ (8,0,3,-2,4(0);7(0);2(0))$.
$v=18:$ 将 G_8-$GD_7(17)$ 前两个区组中 2 改为 ∞, 另添加 $(3,\infty,2,0,15(\infty);4(\infty);1(\infty))$.
$v=19:\ (1,0,3,-2,4(0);7(0);8(0))\times 2,\ (1,0,3,-2,4(0);7(0);2(0))\times 5,$
$(2,0,8,-1,9(0);-9(0);-8(0)),\ (2,0,-8,1,9(0);-9(0);8(0))$.
$v=20:$ 将 G_8-$GD_7(19)$ 前两个区组中的 8 改为 ∞, 另添加 $(2,\infty,8,0,-8(\infty);3(\infty);1(\infty))$.

G_9-$GD_7(v):\ (a,b,c,d,e(b);f(d);g(d))$

$v=9:\ (3,5,4,7,0(5);2(7);6(7))\times 2,\ (2,5,4,7,0(5);1(7);3(7)),\ (6,7,4,5,0(7);3(5);2(5))$.
$v=10:\ (3,5,4,\infty,0(5);2(\infty);6(\infty)),\ (3,5,4,7,0(5);2(7);6(7)),$
$(6,7,4,5,0(7);3(5);2(5)),\ (2,5,4,7,0(5);1(7);3(7)),\ (3,\infty,4,7,0(\infty);2(7);6(7))$.
$v=11:\ (3,2,5,1,0(2);6(1);4(1))\times 2,\ (4,2,5,1,0(2);6(1);7(1))\times 2,$
$(5,3,7,0,6(3);1(0);4(0))$.
$v=12:$ 将 G_9-$GD_7(11)$ 前两个区组中的 3 和第三个区组中的 4 改为 ∞, 另添加
$(3,2,0,\infty,1(2);4(\infty);5(\infty))$.
$v=13:\ \{(a,0,7,11,8(0);9(11);12(11)):1\le a\le 6\}$.
$v=16:\ (5,-2,3,0,4(-2);2(0);1(0))\times 4,\ (5,-2,3,0,4(-2);2(0);\infty(0)),$
$(5,-2,3,0,4(-2);\infty(0);1(0)),\ (\infty,-2,3,0,4(-2);2(0);1(0)),$
$(5,0,1,\infty,2(0);4(\infty);3(\infty))$.
$v=17:\ (5,-2,3,0,4(-2);2(0);1(0))\times 2,\ (5,-2,3,0,4(-2);2(0);8(0))\times 3,$
$(5,-2,3,0,4(-2);8(0);1(0))\times 2,\ (4,3,1,0,2(3);-8(0);8(0))$.

$v=18:$ 将 $G_9\text{-}GD_7(17)$ 前两个区组中的 8 和第八个区组中的 4 改为 ∞, 另添加 $(1,0,8,\infty,-8(0);2(\infty);3(\infty))$.

$v=19:$ $(5,-2,3,0,4(-2);2(0);1(0))\times 5$, $(5,-2,3,0,4(-2);2(0);8(0))$, $(5,-2,3,0,4(-2);2(0);9(0))$, $(2,1,-8,0,9(1);8(0);-9(0))\times 2$.

$v=20:$ 将 $G_9\text{-}GD_7(19)$ 第一个区组中的 8, 第二个区组中的 9 和第八个区组中的 2 改为 ∞, 另添加 $(1,0,8,\infty,9(0);2(\infty);3(\infty))$.

$G_{10}\text{-}GD_7(v):$ $(a,b,c,d,e(b);f(c);g(d))$

$v=9:$ $(6,4,2,3,0(4);1(2);7(3))\times 3$, $(7,4,2,3,0(4);5(2);6(3))$.

$v=10:$ 将 $G_{10}\text{-}GD_7(9)$ 前两个区组中的 7 及后两个区组中的 6 均改为 ∞, 另添加 $(3,\infty,4,0,5(\infty);1(4);2(0))$.

$v=11:$ $(5,4,2,3,0(4);7(2);6(3))\times 2$, $(6,4,2,3,0(4);7(2);8(3))\times 2$, $(9,4,2,3,0(4);6(2);7(3))$.

$v=12:$ 将 $G_{10}\text{-}GD_7(11)$ 前两个区组中的 6 和第三、四个区组中的 8 改为 ∞, 另添加 $(1,\infty,3,0,8(\infty);9(3);5(0))$.

$v=13:$ $\{(a,0,8,11,7(0);10(8);12(11)):1\le a\le 6\}$.

$v=16:$ $(1,0,2,-2,3(0);-5(2);4(-2))\times 3$, $(1,0,2,-2,3(0);-5(2);\infty(-2))\times 2$, $(\infty,0,2,-2,3(0);-5(2);4(-2))\times 2$, $(2,\infty,1,0,-1(\infty);-5(1);6(0)))$.

$v=17:$ $(1,0,2,-2,3(0);-6(2);6(-2))\times 2$, $(1,0,2,-2,3(0);-5(2);4(-2))\times 5$, $(8,0,7,1,-7(0);-1(7);-5(1))$.

$v=18:$ 将 $G_{10}\text{-}GD_7(17)$ 前三个区组中的 1 和第八个区组中的 8 改为 ∞, 另添加 $(3,\infty,1,0,-1(\infty);2(1);8(0))$.

$v=19:$ 取 $G_{10}\text{-}GD_7(17)$ 的前七个区组, 另添加 $(-9,0,8,1,9(0);-1(8);-8(1))$ 和 $(-9,0,8,2,9(0);-1(8);-4(2))$.

$v=20:$ 将 $G_{10}\text{-}GD_7(19)$ 中第 3,4,5 个区组中的 1 和第 6 个区组中的 4 改为 ∞, 另添加 $(3,\infty,1,0,18(\infty);2(1);6(0))$.

6 结论

定理 1 存在 $G_i\text{-}GD(v)\Leftrightarrow v\equiv 0,\ 1 \bmod 7$, 且

$$\begin{cases} v\ge 7, & 当\ 1\le i\le 7\ 时,\\ v\ge 9, & 当\ i=8,9\ 时,\\ v\ge 8 & 当\ i=10\ 时. \end{cases}$$

证 当 $1\le i\le 7$ 时, 引理 8 给出了 $G_i\text{-}GD(7)$ 和 $G_i\text{-}GD(8)$. 进而, 对于阶数 $v=7t+7$ 和 $v=7t+8$, $t\ge 1$, 分别 (对 t 递归地) 应用引理 3 即可得知.

当 $i=8,9$ 时, 引理 8 给出了 $G_i\text{-}GD(14)$, $G_i\text{-}GD(15)$, $G_i\text{-}GD(21)$ 和 $G_i\text{-}GD(22)$. 进而, 对于阶数 $v=7\cdot 2t+14$, $v=7\cdot 2t+21$, $v=7\cdot 2t+15$ 和 $v=7\cdot 2t+22$, $t\ge 1$, 分别 (对 t 递归地) 应用引理 3 即可得知.

当 $i=10$ 时, 引理 8 给出了 $G_{10}\text{-}GD(8)$, $G_{10}\text{-}GD(14)$, $G_{10}\text{-}GD(15)$ 和 $G_{10}\text{-}GD(21)$. 进而, 对于阶数 $v=7\cdot 2t+14$, $v=7\cdot 2t+21$, $v=7\cdot 2t+8$ 和 $v=7\cdot 2t+15$, $t\ge 1$, 分别 (对 t 递归地) 应用引理 3 即可得知.

最后, 引理 4 − 7 已证明了不存在 $G_{10}\text{-}GD(7)$ 和 $G_i\text{-}GD(v)$, $i=8,9$, $v=7,8$.

引理 10 对任意 $\lambda\ge 2$, 存在 $G_i\text{-}GD_\lambda(7)$ 和 $G_j\text{-}GD_\lambda(8)$, 其中 $i=8,9,10$, $j=8,9$.

证 因对任 $\lambda\ge 2$, 总存在非负整数 m,n 使得 $\lambda=2m+3n$, 故只需给出以下构造:

(1) $v=7$ 时取点集 $(Z_3\times Z_2)\cup\{\infty\}$

G_8, $\lambda=2:(0_1,0_0,\infty,2_0,1_0(0_0);1_1(0_0);2_1(0_0)) \bmod (3,2)$;

$\lambda=3:(0_0,0_1,1_1,\infty,2_1(0_1);1_0(0_1);2_0(0_1)),(0_1,0_0,\infty,2_0,1_1(0_0);2_1(0_0);1_0(0_0)),$
$(0_1,0_0,\infty,2_1,1_1(0_0);1_0(0_0);2_0(0_0)) \bmod (3,-)$.

G_9, $\lambda=2:(1_1,2_0,\infty,0_0,1_0(2_0);0_1(0_0);2_1(0_0)) \bmod (3,2)$;
$\lambda=3:(2_0,1_0,\infty,0_0,2_1(1_0);0_1(0_0);1_1(0_0))$, $(2_1,0_1,1_0,0_9,\infty(0_1);2_0(0_0);1_1(0_0))$,
$(2_0,2_1,\infty,0_1,1_1(2_1);0_0(0_1);1_0(0_1)) \bmod (3,-)$.

G_{10}, $\lambda=2:(1_1,2_0,1_0,0_0,\infty(2_0);2_1(1_0);0_1(0_0)) \bmod (3,2)$;
$\lambda=3:(1_1,2_0,1_0,0_0,\infty(2_0);2_1(1_0);0_1(0_0)) \bmod (3,2)$,
$(2_1,1_0,0_1,0_0,\infty(1_0);1_1(0_1);2_0(0_0)) \bmod (3,-)$.

(2) $v=8$, $\lambda=2$ 或 3 时，取点集 Z_8 或 $(Z_3\times Z_2)\cup\{x,y\}$, 基区组则 mod 8 或 mod $(3,-)$.

G_8, $\lambda=2:(5,0,1,2,4(0);3(0);6(0))$;
$\lambda=3:(1_1,0_0,x,0_1,y(0_0);1_0(0_0);2_1(0_0)),(y,0_1,x,1_1,2_1(0_1);0_0(0_1);1_0(0_1)),$
$(x,0_0,y,2_0,1_0(0_0);0_1(0_0);1_1(0_0)),(2_0,0_1,y,x,0_0(0_1);1_1(0_1);1_0(0_1))$.

G_9, $\lambda=2:(6,5,2,0,3(5);1(0);4(0))$;
$\lambda=3:(2_0,2_1,x,0_0,y(2_1);1_0(0_0);1_1(0_0)),(2_0,x,y,1_1,0_1(x);0_0(1_1);1_0(1_1)),$
$(2_1,y,0_0,1_1,1_0(y);0_1(1_1);2_0(1_1)),(1_1,0_1,x,0_0,1_0(0_1);2_1(0_0);2_0(0_0))$.

定理 2 对于 $1\le i\le 10$, 当 $v\equiv 2,3,4,5,6 \pmod 7$ 且 $v>7$ 时，恒存在 G_i-$GD_7(v)$.

证 当 $1\le i\le 7$ 时，由定理 1 知存在 G_i-$GD(7t)$, $t\ge 1$. 而引理 9 给出了 G_i-$GD_7(n)$, $n\in N=\{9,10,11,12,13\}$. 进而，对于阶数 $v=7t+n$, $t\ge 1, n\in N$, 分别应用引理 3 即可得知.

当 $8\le i\le 10$ 时, 由定理 1 知存在 G_i-$GD(7t)$, $t\ge 2$. 而引理 9 给出了 G_i-$GD_7(n)$, $n\in M=\{9,10,11,12,13,16,17,18,19,20\}$. 进而，对于阶数 $v=7\cdot 2t+n$, $t\ge 1$, $n\in M$, 分别应用引理 3 即可得知.

定理 3 存在 G_i-$GD_\lambda(v)\Leftrightarrow \lambda v(v-1)\equiv 0 \bmod 7$, $v\ge 7$, 且 $(i,v,\lambda)\ne(8,7,1),(8,8,1),(9,7,1),(9,8,1),(10,7,1)$.

证 根据定理 1, 引理 10 和定理 2 即可得知.

参 考 文 献

1 Bermond J C, Schönheim J. G-decomposition of K_n, where G has Four Vertices or Less. *Discrete Math.*, 1977, 19: 113–120

2 Bermond J C, Huang C, Rosa A, Sotteau D. Decomposition of Complete Graphs into Isomorphic Subgraphs with Five Vertices, Ars Combinatoria, 1980, 10: 211–254

3 Yin Jianxing, Gong Busheng. Existence of G-designs with $|V(G)|=6$. *Combinatorial Designs and Applications*, 1998, 126: 201–218

4 Kang Qingde, Yuan Landang, Liu Shuxia. Graph Designs for all Graphs with Six Vertices and Eight Edges, manuscript

5 Kang Qingde, Du Yanke, Tian Zihong. Decompositions of λK_v into Some Graph with Six Vertices and Seven Edges. to appear in JSPI

6 Kang Qingde, Zhang Yanfang, Zuo Huijuan. Packings and Coverings of λK_v by k-circuits with One Chord. *Discrete Mathematics*, 2004, 279: 287–315

7 Kang Qingde, Zuo Huijuan, Zhang Yanfang. Decompositions of λK_v into k-circuits with One Chord. *Australasian Journal of Combinatorics*, 2004, 30: 229–246

8 Kang Qingde, Zhao Hongtao, Ma Chunpin. Graph Designs for Ten Graphs with Six Vertices and Nine Edges, manuscript

9 Alspach B, Gavlas H. Cycle Decompositions of K_n and K_n-I. *Journal of Combinatorial Theory* (B), 2000, 21: 146–155

10 Blinco A. On Diagonal Cycle Systems. Australasian Journal of Combinatorics. 2001, 24: 221–230

11 Bosak J. Decompositions of Graphs. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990

12 Colbourn C J, Dinitz J H (eds.) The CRC Handbook of Combinatorial Designs. Boca Raton: CRC Press, 1996

13 Harary F. Graph Theory. Reading: Addison-Wesley, 1969, 274 pp.??

14 Heinrich K. Path-decomposition. *Le Mathematics* (Catania), 1992, XLVII: 241–258

15 Kotzig A. Decomposition of Complete Graphs into Isomorphic Cubes. *J. Combin. Theory B*, 1981, 31: 292–296

16 Rodger C A. Graph-decompositions. *Le Mathematics* (Catania), 1990, XLV: 119–140

17 Wang Zhiqin, Kang Qingde. Optimal Packings and Coverings of λK_v with Graph $K_5 - P_5$. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 2004, 41: 22–41

DECOMPOSITIONS OF λK_v INTO THE GRAPHS WITH 7 POINTS, 7 EDGES AND AN EVEN-CIRCLE

GAO YINZHI ZUO HUIJUAN KANG QINGDE

(*Institute of Mathematics, Hebei Normal University, Shijiazhuang* 050016)

Abstract Let λK_v be the complete multigraph with v vertices, G be a finite simple graph. A G-decomposition of λK_v is a pair $(X, \mathcal{B})$, where X is the vertex set of K_v and $\mathcal{B}$ is a collection of subgraphs of K_v, such that each subgraph is isomorphic to G and any edge in K_v appear in exact λ members of $\mathcal{B}$. In this paper, we have completely solved the existence problem of G-decompositions for ten graphs G with 7 points, 7 edges and an even-cycle.

Key words Complete multigraph, complete muitipartite graph, graph design, holey graph design