第50卷第2期 数学学报中文版 Vol.50, No.2
2007年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)02-0319-06 **文献标识码: A**

Riesz 函数演算的 Lipschitz 性质

曹怀信 陈峥立

陕西师范大学数学与信息科学学院 西安 710062
E-mail: caohx@snnu.edu.cn; czl@snnu.edu.cn

摘 要 设 $\mathbf{A}$ 是具有单位的复 Banach 代数, Ω 为复平面$\mathbb{C}$上的一个区域, γ 是复平面上的任一可求长的封闭曲线且其内部区域 $\text{ins}(\gamma)\subset\Omega$, 证明了存在 $\mathbf{A}$ 的子集 $\mathbf{A}_\delta^\gamma$, 使得对于 Ω 上的任一解析函数 f, Riesz 函数演算 $\mathbf{f}:x\mapsto\mathbf{f}(x)$ 是从 $\mathbf{A}_\delta^\gamma$ 到 $\mathbf{A}$ 中的 Lipschitz 映射即 $\mathbf{f}\in L^1(\mathbf{A}_\delta^\gamma,\mathbf{A})$ 且其 Lipschtiz 常数 $L_1(\mathbf{f})\le\frac{M_f(\gamma)\Gamma}{2\pi\delta^2}$. 作为这一结果的应用, 研究了算子值的根式函数 $T\mapsto T^{\frac{1}{m}}$ 及绝对值函数 $T\mapsto|T|$ 的 Lipschitz 性质. 最后, 证明了: 若 f 为一个复值整函数, 则对任一非空有界集 $E\subset\mathbf{A}$, 有 $\mathbf{f}\in L^1(E,\mathbf{A})$.

关键词 Riesz 函数演算; Lipschitz 性质; 根式函数
MR(2000) 主题分类 47H30, 46H99, 47J05
中图分类 O177.91

Lipschitz Properties of Riesz Functional Calculus

Huai Xin CAO Zheng Li CHEN

College of Mathematics and Information Sceince, Shaanxi Normal University,
Xi'an 710062*, P. R. China*
E-mail: caohx@snnu.edu.cn; czl@snnu.edu.cn

Abstract Let $\mathbf{A}$ be a unital complex Banach algebra, $\Omega\subset\mathbb{C}$ be a region and $\gamma\subset\mathbb{C}$ be a rectifiable closed curve such that $\text{ins}(\gamma)\subset\Omega$. It is proved that the Riesz functional calculus $\mathbf{f}:x\mapsto\mathbf{f}(x)$ is a Lipschitz operator from some $\mathbf{A}_\delta^\gamma$ into $\mathbf{A}$, i.e., $\mathbf{f}\in L^1(\mathbf{A}_\delta^\gamma,\mathbf{A})$ and has the Lipschitz constant $L_1(\mathbf{f})\le\frac{M_f(\gamma)\Gamma}{2\pi\delta^2}$. As an application, Lipschitz propertites of the operator valued root-function $T\mapsto T^{\frac{1}{m}}$ and the absolute value function $T\mapsto|T|$ are disccussed. Lastly, it is proved that $\mathbf{f}\in L^1(E,\mathbf{A})$ holds for every nonempty bounded subset E of $\mathbf{A}$.

Keywords Riesz functional calculus; Lipschitz property; root-function
MR(2000) Subject Classification 47H30, 46H99, 47J05
Chinese Library Classification O177.91

1 引言及主要结果

Lipschtiz 函数是指满足 Lipschitz 条件

$$|f(x)-f(y)|\le Md(x,y),\quad\forall\, x,y\in D \tag{1.1}$$

收稿日期: 2005-03-20; 接受日期: 2006-03-01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571113);
陕西省自然科学研究计划 (2002A02); 陕西师范大学青年科学基金

的函数 $f: D \to \mathbb{C}$, 其中 (D,d) 为一个距离空间. 这类函数是最接近可微函数的一类连续函数, 它在微分方程、分形理论与逼近论等方面具有重要的应用. 由它们构成的 Banach 空间称为 Lipschtiz 空间, 这类函数空间具有许多有趣的性质 [1−6]. 文 [7–11] 研究了非线性 Lipschtiz 算子即向量值 Lipschtiz 函数, 引入了大小 Lipschitz 常数与 Dahlquist 常数, 揭示了这类非线性算子的一系列深刻性质. 文 [12–14] 定义了 Lipschtiz-α 算子, 研究了这类非线性算子的可逆性及 Lip-α 算子列的收敛性等若干问题并给出了有关结果在研究非线性算子方程可解性方面的应用. 文 [15] 引入了比 Lipschtiz-α 算子更为广泛的一类非线性算子, 即 Lipschtiz-ϕ 算子, 并研究了由此类算子构成的非线性算子代数, 即 Lipschtiz-ϕ 算子代数. 设 X,Y 为 Banach 空间, $D\subset X$, 非线性算子 $T: D\to Y$ 称为 Lipschtiz-α 算子 (简称 Lip-α 算子), 如果存在正的常数 M, 使得

$$\|Tx-Ty\| \le M\|x-y\|^{\alpha}, \quad \forall\, x,y\in D. \tag{1.2}$$

用 $L^{\alpha}(D,Y)$ 表示从 D 到 Y 的全体 Lip-α 算子之集. 对于任一 $T\in L^{\alpha}(D,Y)$, 文 [12] 中引入了 T 的 Lipschitz-α 常数

$$L_{\alpha}(T)=\sup\left\{\frac{\|Tx-Ty\|}{\|x-y\|^{\alpha}}: x,y\in D,\, x\ne y\right\},$$

并证明了: 当 D 是 X 的紧子集时, 集合 $L^{\alpha}(D,Y)$ 关于范数 $\|T\|_{\alpha}=L_{\alpha}(T)+\|T\|_{\infty}$ 构成 Banach 空间.

在文 [17] 中, Fuad 研究了可分复 Hilbert 空间 H 上函数演算的 Lipschitz 性质, 证明: 如果 N 和 M 是 H 上的正规算子, f 是 $\Omega=\sigma(N)\cup\sigma(M)$ 上的复值 Lipschitz 函数, 则存在正常数 K, 使得对于任意 $X\in B(H)$, 有

$$\|f(N)X-Xf(M)\|_2 \le K\|NX-XM\|_2. \tag{1.3}$$

因此, 对复平面 $\mathbb{C}$ 的任一子集 D 及其上的任一 Lipschitz 函数 $f: D\to\mathbb{C}$, 由 f 定义的函数演算 $a\mapsto f(a)$ 是距离空间

$$X(D):=\{T\in B(H): T^*T=TT^*,\, \|T\|_2<+\infty,\, \sigma(T)\subset D\}$$

到 $B(H)$ 中的 Lipschitz-1 算子, 即存在正常数 K, 使得

$$\|f(N)-f(M)\|_2\le K\|N-M\|_2, \quad \forall\, M,N\in X(D). \tag{1.4}$$

在文 [18] 中 Cavaretta 和 Smithies 给出了关于绝对值映射 $A\to|A|$ 的 Lipschitz 界的讨论, 证明了: 对于任意 $R>0$, 存在 $M_R, N_R>0$ 满足

$$\|\sqrt{A}-\sqrt{B}\|\le M_R\|A-B\|, \quad \forall A,B\in B_R^{+}(H), \tag{1.5}$$

$$\||A|-|B|\|\le N_R\|A-B\|, \quad \forall A,B\in B_R(H), \tag{1.6}$$

其中 $B_R^{+}(H)=\{T\in B(H): \|T\|\ge R,\, T\ge 0\}$, $B_R(H)=\{T\in B(H): \|T\|\ge R\}$. 不等式 (1.6) 是由 (1.5) 得到的, 但在 (1.5) 式 (即文 [17], 引理 1) 的证明中应用了 Riesz 函数演算

$$C^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} w^{\frac{1}{2}}(w-C)^{-1}dw,$$

其中 C 是 $B(H)$ 中的正算子, $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1+\alpha\}$. 众所周知, 利用 Riesz 函数演算时, 必需要求演算的函数 f 在包含 $\sigma(C)$ 的某个区域 G 上解析且 $\sigma(C)\subset \mathrm{ins}\Gamma\subset G$. 显然, 对多值函数 $f(z)=z^{\frac{1}{2}}$ 及一般的正算子 C, 这样的区域不一定存在. 例如, 当 $\sigma(C)=[0,1]$ 时, 不存在包含 $\sigma(C)$ 的区域 G, 使得 f 在 G 上可区分为单值解析分枝. 由此可见, 文 [18, 引理 1] 的证明是不严密的. 关于绝对值映射及其相关研究参见文 [16, 19–22].

受以上工作启发, 本文研究有单位的复 Banach 代数 $\mathbf{A}$ 中的 Riesz 函数演算的 Lipschitz 性质, 证明存在 $\mathbf{A}$ 的子集 $\mathbf{A}_\delta^\gamma$, 使得对于 Ω 上的任一解析函数 f, Riesz 函数演算 $\mathbf{f}:x\mapsto\mathbf{f}(x)$ 是从 $\mathbf{A}_\delta^\gamma$ 到 $\mathbf{A}$ 中的 Lipschitz 映射且其 Lipschtiz 常数 $L_1(\mathbf{f})\leq\frac{M_f(\gamma)\Gamma}{2\pi\delta^2}$. 作为这一结果的应用, 证明算子值的根式函数及绝对值函数的 Lipschitz 性质.

2 Riesz 函数演算的 Lipschitz 性质

设 H 为复 Hilbert 空间, $B(H)$ 表示 H 上的全体有界线性算子构成的 C^*- 代数, $\mathbf{A}$ 是一个有单位的复 Banach 代数, 用 Ω 表示复平面上的一个区域, $H(\Omega)$ 表示 Ω 上所有的复值解析函数构成的交换代数, $\forall a\in\mathbf{A}$, $\sigma(a)$ 表示 a 的谱, $\rho(a)=\mathbb{C}\setminus\sigma(a)$ 为 a 的豫解集. 对于任意 $x\in\mathbf{A}$ 及 $f\in H(\Omega)$, 当 $\sigma(x)\subset\Omega$ 时, 用 $\mathbf{f}(x)$ 表示由 f 定义的 x 的 Riesz 函数演算

$$\mathbf{f}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(z-x)^{-1}dz, \tag{2.1}$$

其中 γ 是复平面上满足条件: $\sigma(x)\subset\mathrm{ins}(\gamma)\subset\Omega$ 的任一封闭可求长的曲线, 这里 $\mathrm{ins}(\gamma)$ 表示 γ 的内部区域. 设 γ 是复平面上任一封闭可求长的曲线, δ 为任一正数. 为了研究 Riesz 函数演算的 Lipschitz 性质, 我们引入集合

$$N(\mathbf{A})=\Big\{a\in\mathbf{A}:\|(z-a)^{-1}\|\leq\frac{1}{d(z,\sigma(a))}(\forall z\in\rho(a))\Big\}, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{A}_\delta^\gamma=\{a\in N(\mathbf{A}):d(\gamma,\sigma(a))\geq\delta,\ \sigma(a)\subset\mathrm{ins}(\gamma)\}. \tag{2.3}$$

熟知, 当 $\mathbf{A}=B(H)$ 时, 集合 $N(B(H))$ 包含了 H 上的所有正规算子.

定理 2.1　设 $f\in H(\Omega)$, $\mathrm{ins}(\gamma)\subset\Omega$, 则 $\mathbf{f}\in L^1(\mathbf{A}_\delta^\gamma,\mathbf{A})$ 且 $L_1(\mathbf{f})\leq\frac{M_f(\gamma)\Gamma}{2\pi\delta^2}$, 其中 $M_f(\gamma)=\max\{|f(z)|:z\in\gamma\}$, Γ 表示 γ 的长度.

证明　对于任意 $a,b\in\mathbf{A}_\delta^\gamma$, 有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}(a)-\mathbf{f}(b)\|&=\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(z-a)^{-1}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(z-b)^{-1}dz\right\|\\&=\frac{1}{2\pi}\left\|\int_\gamma f(z)[(z-a)^{-1}-(z-b)^{-1}]dz\right\|\\&=\frac{1}{2\pi}\left\|\int_\gamma f(z)(z-a)^{-1}(a-b)(z-b)^{-1}dz\right\|\\&\leq\frac{M_f(\gamma)\Gamma}{2\pi}\sup_{z\in\gamma}\|(z-a)^{-1}\|\,\|a-b\|\sup_{z\in\gamma}\|(z-b)^{-1}\|\\&=\frac{M_f(\gamma)\Gamma}{2\pi}\frac{1}{d(\gamma,\sigma(a))d(\gamma,\sigma(b))}\|a-b\|\leq\frac{M_f(\gamma)\Gamma}{2\pi\delta^2}\|a-b\|.\end{aligned}$$

所以, $\mathbf{f}$ 是从 $\mathbf{A}_\delta^\gamma$ 到 $\mathbf{A}$ 中的 Lip-1 算子, 且 $L_1(\mathbf{f})\leq\frac{M_f(\gamma)\Gamma}{2\pi\delta^2}$. 证毕.

定理 2.2 设 H 为复 Hilbert 空间, $0<\alpha\le\beta$, 记

$$E_{\alpha,\beta}(H)=\{A\in B(H):\alpha\le A\le\beta\}. \tag{2.4}$$

(a) 若 Ω 是右半平面, 则对任一 $f\in H(\Omega)$, 有

$$\|\mathbf{f}(A)-\mathbf{f}(B)\|\le M_f(\gamma)\frac{4(\alpha+\beta)}{\pi\alpha^2}\|A-B\|,\quad \forall A,B\in E_{\alpha,\beta}(H), \tag{2.5}$$

其中 $\gamma=\big\{x+iy:x\in\{\frac{\alpha}{2},\,\beta+\frac{\alpha}{2}\},\,|y|\le\frac{\alpha}{2}\big\}\cup\{x+iy:\frac{\alpha}{2}\le x\le\beta+\frac{\alpha}{2},\,y\in\{-\frac{\alpha}{2},\,\frac{\alpha}{2}\}\}$;

(b) 对任一正整数 m, 有

$$\big\|A^{\frac{1}{m}}-B^{\frac{1}{m}}\big\|\le\frac{4(\alpha+\beta)}{\pi\alpha^2}\Big(\Big(\beta+\frac{\alpha}{2}\Big)^2+\frac{\alpha^2}{4}\Big)^{\frac{1}{2m}}\|A-B\|,\quad \forall\, A,B\in E_{\alpha,\beta}(H). \tag{2.6}$$

证明 记 $A=B(H)$, $\delta=\frac{\alpha}{2}$, 则

$$E_{\alpha,\beta}(H)\subset\mathbf{A}_\delta^\gamma,\quad \Gamma=2(\alpha+\beta), \tag{2.7}$$

从而由定理 2.1 知: 对任一 $f\in H(\Omega)$, (2.5) 式成立. 这就证明了 (a). 为证 (b), 令

$$f(z)=|z|^{\frac{1}{m}}\exp\Big(\frac{\arg z}{m}\Big),\quad z\in\Omega:=\{z\in\mathbb{C}:-\pi<\arg z<\pi\}, \tag{2.8}$$

则 $f\in H(\Omega)$ 且 $M_f(\gamma)=\big((\beta+\frac{\alpha}{2})^2+\frac{\alpha^2}{4}\big)^{\frac{1}{2m}}$. 因此, 根据 (a) 知 (2.6) 式成立. 证毕.

注 1 由上面定理 2.2 中的 (b) 可知: 对于任意 $A,B\in E_{\alpha,\beta}(H)$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\big\|A^{\frac{1}{m}}-B^{\frac{1}{m}}\big\|&\le\lim_{m\to+\infty}\frac{4(\alpha+\beta)}{\pi\alpha^2}\Big(\Big(\beta+\frac{\alpha}{2}\Big)^2+\frac{\alpha^2}{4}\Big)^{\frac{1}{2m}}\|A-B\|\\&=\frac{4(\alpha+\beta)}{\pi\alpha^2}\|A-B\|.\end{aligned}$$

注 2 当 $\alpha<\beta\le\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}-\frac{\alpha}{2}$ 时, 数列 $\big\{\big((\beta+\frac{\alpha}{2})^2+\frac{\alpha^2}{4}\big)^{\frac{1}{2m}}\big\}_{m=1}^\infty$ 递增收敛于 1. 因此, 由 (2.6) 式可知: 对任意的 $m\in\mathbb{N}$, 都有

$$\big\|A^{\frac{1}{m}}-B^{\frac{1}{m}}\big\|\le\frac{4(\alpha+\beta)}{\pi\alpha^2}\|A-B\|,\quad \forall A,B\in E_{\alpha,\beta}(H).$$

注 3 不等式 (2.6) 中的等号是可以成立的, 参见下例.

例 2.1 易见, 当 $2\le m\le\frac{\ln 2}{2\ln 2-\ln\pi}$ 时, 存在常数 $k>1$, 使得

$$\frac{\pi}{4}=\frac{k^2-1}{k^{\frac{1}{m}}-1}\Big[\Big(k+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{4}\Big]^{\frac{1}{m}}. \tag{2.9}$$

对任意的 $\alpha>0$, 取 $\beta=k\alpha$, $A=\alpha I$, $B=\beta I$, 则 $A,B\in E_{\alpha,\beta}(H)$, 且

$$\big\|A^{\frac{1}{m}}-B^{\frac{1}{m}}\big\|=\frac{4(\alpha+\beta)}{\pi\alpha^2}\Big(\Big(\beta+\frac{\alpha}{2}\Big)^2+\frac{\alpha^2}{4}\Big)^{\frac{1}{2m}}\|A-B\|.$$

定理 2.3 设 H 为复 Hilbert 空间, α,β 为任意正数, m 为任一正整数, 记

$$F_{\alpha,\beta}(H)=\{A\in B(H):\alpha\le A^*A\le\beta\}, \tag{2.10}$$

则

(a) 若 Ω 是右半平面, 则对任一 $f \in H(\Omega)$, 有

$$\|\mathbf{f}(A^*A)-\mathbf{f}(B^*B)\| \le \frac{8(\alpha+\beta)\sqrt{\beta}}{\pi\alpha^2}M_f(\gamma)\|A-B\|, \quad \forall A,B \in F_{\alpha,\beta}(H), \tag{2.11}$$

其中 $\gamma = \big\{x+iy : x \in \{\frac{\alpha}{2}, \beta+\frac{\alpha}{2}\}, |y| \le \frac{\alpha}{2}\big\} \cup \{x+iy : \frac{\alpha}{2} \le x \le \beta+\frac{\alpha}{2}, y \in \{-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\}\}$;

(b) $\forall A,B \in F_{\alpha,\beta}(H)$, 有

$$\||A|-|B|\| \le \frac{8(\alpha+\beta)\sqrt{\beta}}{\pi\alpha^2}\Big(\Big(\beta+\frac{\alpha}{2}\Big)^2+\frac{\alpha^2}{4}\Big)^{\frac{1}{4}}\|A-B\|. \tag{2.12}$$

证明 设 $A,B \in F_{\alpha,\beta}(H)$, 则 $A^*A, B^*B \in E_{\alpha,\beta}(H)$. 于是, 由定理 2.2(a) 知

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}(A^*A)-\mathbf{f}(B^*B)\| &\le \frac{4(\alpha+\beta)}{\pi\alpha^2}M_f(\gamma)\|A^*A-B^*B\| \\ &\le \frac{4(\alpha+\beta)}{\pi\alpha^2}M_f(\gamma)(\|A^*(A-B)\|+\|(A^*-B^*)B\|) \\ &\le \frac{8(\alpha+\beta)\sqrt{\beta}}{\pi\alpha^2}M_f(\gamma)\|A-B\|.\end{aligned}$$

这就证明了 (a). 为证结论 (b), 令 $f(z)=|z|^{\frac{1}{2}}\exp(\frac{\arg z}{2})$, $z \in \Omega := \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$, 则 $f \in H(\Omega)$ 且 $M_f(\gamma) = \big((\beta+\frac{\alpha}{2})^2+\frac{\alpha^2}{4}\big)^{\frac{1}{4}}$. 因此, 根据 (a) 知 (b) 成立. 证毕.

引理 2.1 设 $a,b \in \mathbf{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $r = \max\{\|a\|, \|b\|\}$, 则

$$\|a^n-b^n\| \le (n-1)r^{n-1}\|a-b\|. \tag{2.13}$$

证明 计算可知

$$\begin{aligned}\|a^n-b^n\| &= \|a^n-a^{n-1}b+a^{n-1}b-b^n\| \\ &\le \|a^{n-1}\|\,\|a-b\|+\|a^{n-1}-b^{n-1}\|\,\|b\| \\ &\le \|a^{n-1}\|\,\|a-b\|+\|a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-2}b-b^{n-1}\|\,\|b\| \\ &\le \|a^{n-1}\|\,\|a-b\|+\|a^{n-2}\|\,\|a-b\|\,\|b\|+\|a^{n-2}-b^{n-2}\|\,\|b\|^2 \\ &\ \ \vdots \\ &\le (\|a^{n-1}\|+\|a^{n-2}\|\,\|b\|+\cdots+\|b\|^{n-1})\|a-b\| \\ &\le (\|a\|^{n-1}+\|a\|^{n-2}\|b\|+\cdots+\|b\|^{n-1})\|a-b\| \\ &\le (n-1)r^{n-1}\|a-b\|.\end{aligned}$$

设 $r>0$, $B(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$.

定理 2.4 设复值函数 f 在闭圆盘 $B(r)$ 上解析, $r>0$, $D(r) = \{a \in \mathbf{A} : \|a\| \le r\}$, 则 $\mathbf{f} \in L^1(D(r), \mathbf{A})$ 且 $L_1(\mathbf{f}) \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}|f^{(n)}(0)|r^{n-1}$.

证明 因为 f 在 $B(r)$ 上解析, 所以它在该圆盘上可展开为 Taylor 级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \forall z \in B(r),$$

其中 $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$. 令 $M=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)|c_n|r^{n-1}$, 则由幂级数的性质可知 M 存在且有限, 再由引理 2.1 可知 $\forall a,b\in D(r)$, 有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}(a)-\mathbf{f}(b)\|&=\left\|\sum_{n=0}^{\infty}c_na^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nb^n\right\|\le\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\,\|a^n-b^n\|\le\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|(n-1)r^{n-1}\|a-b\|\\&=M\|a-b\|.\end{aligned}$$

这就证明了 $\mathbf{f}\in L^1(D(r),\mathbf{A})$ 且 $L_1(\mathbf{f})\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}|f^{(n)}(0)|r^{n-1}$. 证毕.

推论 2.1 设 f 为一个复值整函数, 则对任一非空有界集 $E\subset\mathbf{A}$, 有 $\mathbf{f}\in L^1(E,\mathbf{A})$ 且 $L_1(\mathbf{f})\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}|f^{(n)}(0)|r^{n-1}$, 其中 $\sup\{\|x\|:x\in E\}<r<+\infty$.

参 考 文 献

[1] De Leeuw K., Banach spaces of Lipschitz functions, *Studia Math.*, 1996, **21**: 55–56.
[2] Jenkins T. M., Banach spaces of Lipschitz functions of an abstract metric space, Ph. D. Thesis, Yale University, 1968.
[3] Johnson J. A., Banach spaces of Lipschitz functions and vector-valued Lipschitz functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1970, **148**: 147–169.
[4] Johnson J. A., Lipschitz spaces, *Pacific J. Math.*, 1975, **51**(1): 177–186.
[5] Johnson J. A., A note on Banach spaces of Lipschitz functions, *Pacific J. Math.*, 1975, **58**(2): 475–482.
[6] Mayer-Wolf E., Isometries between Banach spaces of Lipschitz functions, *Israel J. Math.*, 1981, **38**(1/2): 58–74.
[7] Wang L. S., Xu Z. B., Qualitative studies on nonlinear Lipschitz operators (I) Lipschitz constant, *J. Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1996, **19**(2): 175–184 (in Chinese).
[8] Xu Z. B., Wang L. S., Qualitative studies on nonlinear Lipschitz operators (II) Dahlquist constant, *J. Xi'an Jiaotong University*, 1996, **30**(12): 117–124 (in Chinese).
[9] Wang L. S., Xu Z. B., Chen B. L., Qualitative studies on nonlinear Lipschitz operators (III) glb-Lipschitz constant, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1999, **42**(3): 395–402.
[10] Wang L. S., Xu Z. B., Qualitative studies on nonlinear Lipschitz operators (IV)-Spectral theory, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1995, **38**(5): 328–631.
[11] Wang L. S., Xu Z. B., Qualitative studies on nonlinear Lipschitz operators on the space C^m, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1999, **42**(6): 1111–1118.
[12] Cao H. X., Xu Z. B., Some properties of nonlinear Lipschitz-α operators, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2002, **45**(2): 279–286.
[13] Cao H. X., Xu Z. B., M-spectra of Lipschitz operators, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2003, **46**(6): 1073–1078.
[14] Cao H. X., Xu Z. B., Lipschitz operators and solvability of nonlinear operator equations, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2004, **20**(3): 499–506.
[15] Cao H. X., Xu Z. B., Non-commutatitive Lipschitz-ϕ operator algebras, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2004, **47**(3): 433–440.
[16] Cao H. X., Zhang J. H., Xu Z. B., Characterizations and extensions of Lipschitz-α operators, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2006, **22**(3): 671–678.
[17] Kittaneh F., On Lipschitz functions of normal operators, *Proc. Amer Math. Soc.*, 1985, **94**: 416–418.
[18] Cavaretta A. S., Smithies L., Lipschitz-type bounds for the map A$\rightarrow|A|$ on $B(H)$, *Linear Algebra and Appl.*, 2003, **360**: 231–235.
[19] Bhatia R., First and second order perturbation bounds for the operator absolute value, *Linear Algebra and its Applications*, 1994, 208–209; 367–376.
[20] Bhatia R., Perturbation inqualities for the absolute value in norm ideals of operators, *J. Operator Theory*, 1988, **19**(1): 129–136.
[21] Kato T., Continuity of the map $S\mapsto|S|$ for linear operators, *Proc. Jpn. Acad.*, 1973, **49**: 157–160.
[22] Cheng G. F., Cao H. X., Bounded Lipschtiz-α operators on non-compact metric space, *Journal of Xi'an University of Arts & Science*, 2005, **8**(3): 33–36 (in Chinese).