第 27 卷 第 4 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 4
2004 年 11 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Nov., 2004

$L^p(\Omega)$ 空间上的 Coherent 风险度量 *

陈文财
(上海交通大学数学系，上海 200240)
叶中行
(上海交通大学数学系，上海 200240)

摘　要　本文在 Banach 空间 $L^p(\Omega)$ 上定义 Coherent 风险度量 $\rho: L^p(\Omega) \to R$, 证明了 ρ 是下半连续的 Coherent 风险度量当且仅当存在 Banach 空间 $L^q(\Omega)$ 中的一个弱 * 闭凸概率测度集 $\mathcal{Q}$ 使得 $\rho(X) = \sup\limits_{Z\in\mathcal{Q}} E(-\frac{X}{r}Z)$, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 推广了 [3] 中的部分结果.

关键词　金融头寸，L^p 空间，Coherent 风险度量，表示定理

1　引言与主要结果

金融头寸的风险度量是金融数学的一个重要研究领域. 从上世纪 90 年代到现在, VaR (Value at Risk) 方法作为风险度量与风险管理的工具得到了广泛的应用. VaR 方法基于金融头寸在到期时的损失分布，度量的是在置信水平为 α (通常是 0.95, 0.99) 时的金融头寸的最大可能损失，也即金融头寸损失超过它的概率小于 $1-\alpha$. 它直观而且简便. Artzner 等人在 [1] 中讨论金融头寸的风险度量应该满足什么样的性质才算是合理的度量方法时，提出了风险度量的四条公理性质，即，正齐性，次可加性，单调性，平移不变性；并且称满足这些公理性质的风险度量方法为 Coherent 风险度量. Artzner 等人在 [1,2] 中指出 VaR 方法存在致命缺陷，它不满足次可加性，从而破坏风险的分散化原理. Artzner 等人在 [2] 中在概率空间有限的条件下得到了关于 Coherent 风险度量的表示定理：存在一族概率测度，使得任一个头寸的 Coherent 风险度量值等于其反向头寸在这族测度下的最大期望贴现收益. Delbaen F 在 [3] 中将 Coherent 风险度量推广到一般概率空间情形下的本性有界随机变量空间 $L^\infty(\Omega)$ 之上，并且得到了相应的表示定理.

本文进一步将 Coherent 风险度量推广到 Banach 空间 $L^p(\Omega)$ 之上，其中 $p \geq 1$. 利用对偶理论中的双极化定理得到了下面的表示定理.

表示定理　Coherent 风险度量 $\rho: L^p(\Omega) \to R$ 下半连续，当且仅当存在 $L^q(\Omega)$ 中的唯一一个弱 * 闭凸概率测度集 $\mathcal{Q}$ 使得 $\rho(X) = \sup\limits_{Z\in\mathcal{Q}} E\big(-\frac{X}{r}Z\big)$ 对任意的 $X \in L^p(\Omega)$ 成立，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; 当 ρ 限于 $L^\infty(\Omega)$ 上时，ρ 满足 Fatou 性质.

本文 2003 年 9月 22 日收到. 2004年 10 月 14 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10171066 号) 和上海市基础研究重点项目 (02DJ14063 号) 资助项目.

2　金融头寸风险与 Coherent 风险度量

本文只考虑只有两个时刻， 0 时刻与到期时刻 T 的一个单周期市场下的金融头寸的风险度量. 对于一个金融头寸来说，能刻画其本质特性的数学指标就是该头寸的到期损益值. 在不确定性条件下，头寸的到期损益是一个随机变量. 因此我们将一个金融头寸在数学上等同于概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\boldsymbol{P})$ 上的一个随机变量 X, 称 $-X$ 为其反向头寸，并且约定当 $X\geq 0$ 时表示发生收益，而当 $X\leq 0$ 时，表示发生损失. Ω 代表风险源，是不确定性的全体； $\mathcal{F}$ 表示到期时能观测到的信息 (随机事件的全体), 是一个 σ- 代数; $\boldsymbol{P}$ 表示客观的市场概率测度. 金融头寸的全体就是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\boldsymbol{P})$ 上一些随机变量的集合. 我们考察对应随机变量 p- 阶可积的金融头寸全体，即 Banach 空间 $L^p(\Omega)$, 简记为 L^p, 其中 $p\geq 1$. $L^\infty(\Omega)$ 表示本性有界随机变量全体，简记为 L^∞. 用 r 表示市场无风险资产的到期全收益，是指 0 时刻的一单位无风险资产到期时的价格，也即 $r-1$ 是市场无风险利率.

本文始终约定： (1) 将一个关于客观市场概率测度 $\boldsymbol{P}$ 绝对连续的概率测度 Q 与其 Radon-Nikodym 导数 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}$ 视为等同； (2) 将一族关于 $\boldsymbol{P}$ 绝对连续的概率测度 $\mathcal{Q}$ 与这些测度关于 $\boldsymbol{P}$ 的 Radon-Nikodym 导数的全体构成的集合 $\{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\mid Q\in\mathcal{Q}\}$ 视为等同，并且今后也用 $\mathcal{Q}$ 表示集合 $\{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\mid Q\in\mathcal{Q}\}$; (3) 关于测度 Q 的期望记为 E_Q, 关于客观市场概率测度的期望则记为 E.

定义 1　设 $\mathcal{M}$ 是市场中所有金融头寸的全体，是一个包含所有常量函数的正齐性凸锥，称映射 $\rho:\mathcal{M}\longrightarrow R$ 为一个定义于 $\mathcal{M}$ 上的风险度量；若 ρ 满足下面的公理性质： (1) 正齐性， $\rho(\lambda X)=\lambda\rho(X)$, 常数 $\lambda\geq 0$.

(2) 次可加性， $\rho(X+Y)\leq\rho(X)+\rho(Y)$.

(3) 单调性，若 $X\leq Y$, $\boldsymbol{P}$-a.s., 则有 $\rho(X)\geq\rho(Y)$.

(4) 平移不变性， $\rho(X+a\cdot r)=\rho(X)-a$, a 为常数

就称其为一个 Coherent 风险度量；性质 (1)-(4) 称为 Coherent 风险度量公理性质.

注 关于 Coherent 风险度量公理性质的经济解释. 公理性质 (1) 表明，资产组合的方向不变时，风险与规模同比增加；性质 (2) 体现分散投资风险减少的风险分散化原理；性质 (3) 表示损失大的头寸，风险相应较大；性质 (4) 说明追加无风险资产到一个资产组合，风险相应减少同等的数量.

当给定一置信水平 $\alpha\in(0,1)$ 时，金融头寸 $X\in\mathcal{M}$ 的 α-VaR 值定义为：

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X)=-\inf\big\{a\mid\boldsymbol{P}\,(X\leq a)\geq(1-\alpha)\big\}.$$

显然， $\mathrm{VaR}_\alpha(\cdot)$ 作为风险度量方法，它满足下面的性质：

(i) 若 $X\geq 0$, 则 $\mathrm{VaR}_\alpha(X)\leq 0$.

(ii) 若 $X\geq Y$, 则 $\mathrm{VaR}_\alpha(X)\leq\mathrm{VaR}_\alpha(Y)$.

(iii) 对任意非负实数 $\lambda\geq 0$, $\mathrm{VaR}_\alpha(\lambda X)=\lambda\mathrm{VaR}_\alpha(X)$.

(iv) 对任意实数 a, $\mathrm{VaR}_\alpha(X+a)=\mathrm{VaR}_\alpha(X)-a$;

特别地， $\mathrm{VaR}_\alpha\big(X+\mathrm{VaR}_\alpha(X)\big)=0$.

但是， VaR 不满足次可加性，从而会破坏风险分散化原理. 因此 $\mathrm{VaR}_\alpha(\cdot)$ 不是一个 Coherent 风险度量. 下面我们构造的一个关于信用风险的例子充分说明了这一点.

例 1 (信用风险) 设有两种可违约的公司债券 X_1,X_2, 分别为甲乙两个公司所发行，它们的到期时间、到期支付、发行价格都相同. 它们的违约概率都是 0.03, 当甲公司违约时， $X_1=0$, 而当甲公司履约时， $X_1=100$; 同样，当乙公司违约时， $X_2=0$, 而当乙公司履约时， $X_2=100$. X_1 与 X_2 相互独立. 投资者面临如下两个投资方案：

(A) 购买两张甲公司发行的债券； (B) 购买甲乙两公司发行的债券各一张. 现设置信水平 $\alpha = 0.05$. 直接计算两个方案的 VaR 值易得，方案 (A) 的 VaR 值是

$$\mathrm{VaR}_\alpha(2X_1) = -200 = \mathrm{VaR}_\alpha(X_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(X_2);$$

而方案 (B) 的 VaR 值是

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X_1 + X_2) = -100 \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(X_2).$$

可见选择分散投资方案 (B), 在 $\alpha = 0.05$ 的条件下用 VaR 度量风险时，相比于方案 (A) 风险不但没有减小反而是增加了.

现以 $L^\infty(\Omega)$ 上的 Coherent 风险度量为例简要介绍一下 Coherent 风险度量的数学本质.

命题 1 设 $\rho : L^\infty(\Omega) \to R$ 是一 Coherent 风险度量，那么 ρ 是模 $\|\cdot\|_\infty$ 连续的凸泛函.

证 只须证模连续性. 设 $(X_n)_{n\geq 1}$, $\|X_n - X\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$, 要证 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(X_n) = \rho(X)$. 因为

$$\rho(|X_n - X|) \geq \rho\big(\|X_n - X\|_\infty\big) = -\frac{\|X_n - X\|_\infty}{r},$$

再由次可加性可得

$$\rho(X_n) - \rho(X) \leq -\rho(X - X_n) \leq \frac{\|X_n - X\|_\infty}{r}.$$

由此得到

$$\limsup_{n\to\infty} \rho(X_n) \leq \rho(X),$$

即 ρ 是上半连续的. 又因为

$$\rho(X) - \rho(X_n) \leq -\rho(X_n - X) \leq \frac{\|X_n - X\|_\infty}{r},$$

即可得到

$$\liminf_{n\to\infty} \rho(X_n) \geq \rho(X).$$

所以 ρ 又是下半连续的. 证毕.

定义 2 (Fatou 性质) 设 $(X_n)_{n\geq 1}$ 是任一一致有界的随机变量序列，并且依概率收敛于随机变量 X, 如果 $\rho(X) \leq \liminf \rho(X_n)$, 就称 Coherent 风险度量 $\rho : L^\infty(\Omega) \to R$ 满足 Fatou 性质.

命题 2 设 $\mathcal{Q}$ 是一族关于 $\mathbf{P}$ 绝对连续的概率测度， $\rho(X) = \sup\limits_{\mu\in\mathcal{Q}} E_\mu(-\frac{X}{r})$, 那么 $\rho : L^\infty \to R$, 是定义于 L^∞ 上的满足 Fatou 性质的 Coherent 风险度量.

证 容易验证 ρ 是满足 Coherent 风险度量公理性质的. 下证 ρ 满足 Fatou 性质. 不妨设有一致有界的随机变量序列

$$(X_n)_{n\geq 1}, \ \|X_n\|_\infty \leq 1, \qquad \forall n \geq 1,$$

且依概率收敛于 X, 即

$$X_n \to X\ (\boldsymbol{P}), \qquad n \to \infty.$$

因为对任意的 $\mu \in \mathcal{Q}$, 关于测度 μ, X_n 也依概率测度收敛于 X, 即

$$X_n \to X \ (\mu), \qquad n \longrightarrow \infty.$$

因此由控制收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty} E_\mu(X_n) = E_\mu(X),$$

所以有

$$\liminf_{n\to\infty} \rho(X_n) \ge \rho(X).$$

即 ρ 满足 Fatou 性质. 证毕.

关于 Coherent 风险度量 $\rho: L^\infty \longrightarrow R$, Delbaen F 在 [3] 中得到如下的表示定理.

定理 $\rho: L^\infty \longrightarrow R$ 是满足 Fatou 性质的 Coherent 风险度量当且仅当存在一族关于 $\boldsymbol{P}$ 绝对连续的概率测度 $\mathcal{Q}$ 使得 $\rho(X) = \sup\limits_{\mu\in\mathcal{Q}} E_\mu(-\frac{X}{r})$ 对任意的 $X \in L^\infty$ 成立.

下面我们将此定理推广到 Coherent 风险度量 $\rho: L^p(\Omega) \longrightarrow R$ 的情形, 其中 $p \ge 1$. 为证明我们在上节给出的 **表示定理**, 现将对偶理论中极化集的定义和双极化定理列在下面, 以备查考 (详细叙述可参见 [4]).

定义 3 设 (X, X^*) 是对偶系, $A \subset X$, $A^* \subset X^*$,

$$A^0 = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle \le 1,\ \forall x \in A\},$$
$$A^{*0} = \{x \in X \mid \langle x^*, x\rangle \le 1,\ \forall x^* \in A^*\},$$

分别称为 A 和 A^* 的极化集.

Banach **双极化定理** 设 (X, X^*) 是对偶系, $A \subset X$, 那么

$$A^{00} = \overline{co}(A \cup \{0\}) \supset \overline{\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda A}.$$

这里 $\overline{co}$ 表示集合的 $\sigma(X, X^*)$- 闭凸包.

注 定理中的 $\sigma(X, X^*)$ 表示弱拓扑. 如果将极化集定义的条件式 $\langle x^*, x\rangle \le 1$ 改为 $\langle x^*, x\rangle \ge -1$, 那么双极化定理也是成立的. 这一点在我们的表示定理的证明中是非常关键的. 因为我们在证明中采用了后者.

3 表示定理的证明

引理 1 设 $\mathcal{Q}$ 是一族概率测度, 且 $\mathcal{Q} \subset L^q(\Omega)$, $\rho(X) = \sup\limits_{Z\in\mathcal{Q}} E(-\frac{X}{r}Z)$, 那么 $\rho: L^p(\Omega) \to R$ 是定义于 $L^p(\Omega)$ 上的下半连续的 Coherent 风险度量, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

证 直接一一验证即知 ρ 满足风险度量公理性质. 下证下半连续性. 设 $(X_n)_{n\ge1}$,

$$X_n \to X \quad (L^p), \qquad n \longrightarrow \infty.$$

对任意 $Z \in \mathcal{Q}$, 由 Hölder 不等式可得

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n Z - XZ| = 0.$$

即有

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n Z) = E(XZ), \qquad \forall Z \in \mathcal{Q}.$$

因此
$$\liminf_{n\to\infty}\rho(X_n)\geq\rho(X),$$
即 ρ 是下半连续的. 证毕.

命题 3 设 Q 是一族概率测度, 且 $Q\subset L^q(\Omega)$, $\rho(X)=\sup\limits_{Z\in Q}E(-\frac{X}{r}Z)$, 那么
$$\rho(X)=\sup_{Z\in\overline{co}Q}E\Big(-\frac{X}{r}Z\Big),$$
对任意 $X\in L^p$ 成立, 其中 $\overline{co}Q$ 表示 Q 在 L^q 中的模 - 闭凸包, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证 因为对任意 Q 中的 Z_1 和 Z_2 以及 $\lambda\in[0,1]$ 有
$$\begin{aligned}&E\big\{X[\lambda Z_1+(1-\lambda)Z_2]\big\}=\lambda E(XZ_1)+(1-\lambda)E(XZ_2)\\ \leq&\max\big\{E(XZ_1),E(XZ_2)\big\},\end{aligned}$$
由此可得
$$\rho(X)=\sup_{Z\in coQ}E\Big(-\frac{X}{r}Z\Big),\qquad\forall X\in L^p.$$
另一方面, 设 $Z_n\in Q$, $n\geq1$, 且 $Z_n\to Z$ (L^q), $n\to\infty$. 根据 Hölder 不等式有
$$\lim_{n\to\infty}E|XZ_n-XZ|=0,\qquad\forall X\in L^p.$$
因此
$$E(XZ)\leq\sup_{n\geq1}E(XZ_n),\qquad\forall X\in L^p.$$
所以对任意的 $X\in L^p$ 有
$$\rho(X)=\sup_{Z\in\overline{co}Q}E\Big(-\frac{X}{r}Z\Big).$$
证毕.

表示定理的证明 根据引理 1, 表示定理的充分性已证. 下面证定理的必要性部分. 首先我们定义 $\phi:L^p\longrightarrow R$ 如下:
$$\phi(X)=-\rho(X),\qquad\forall X\in L^p.$$
那么 ϕ 满足下述性质 (a)-(d).

(a) $\phi(\lambda X)=\lambda\phi(X)$, $\forall\lambda\geq0$.

(b) $\phi(X+Y)\geq\phi(X)+\phi(Y)$.

(c) 若 $X\leq Y$, 则 $\phi(X)\leq\phi(Y)$.

(d) $\phi(X+a\cdot r)=\phi(X)+a$, a 为常数,

并且 ϕ 是模上半连续的, 即对 $\forall(X_n)_{n\geq1}$, $X_n\to X$ (L^p), $n\to\infty$, 有
$$\limsup_{n\to\infty}\phi(X_n)\leq\phi(X).$$
定义集合
$$C=\big\{X\in L^p\mid\phi(X)\geq0\big\},$$

那么 C 是 L^p 中的模 - 闭凸锥．显然 $L^p_+=\{X\in L^p\mid X\geq 0,\text{a.s.}\}\subseteq C$. 由于 (L^p,L^q) 是对偶系，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 那么 C 在 L^q 中的极化集是

$$C^0=\{Z\in L^q\mid E(XZ)\geq -1,\ \forall X\in C\}.$$

显然 C^0 是 L^q 中的 $\sigma(L^q,L^p)$- 闭凸锥 (当然也是 L^q 模 - 闭的). 因为 C 是包含 L^p_+ 的锥，故有

$$C^0=\{Z\in L^q\mid E(XZ)\geq 0,\ \forall X\in C\}.$$

根据 Banach 双极化定理有

$$C=C^{00}.$$

因此

$$C=\{X\in L^p\mid E(XZ)\geq 0,\ \forall Z\in C^0\}.$$

令

$$A=\{Z\in C^0\mid Z\geq 0,\ EZ=1\},$$

易知 A 是一 $\sigma(L^q,L^p)$- 闭凸的概率测度集 (当然也是 L^q 模 - 闭的), 那么

$$C^0=\bigcup_{\lambda\geq 0}\lambda A.$$

从而,

$$C=\{X\in L^p\mid E(XZ)\geq 0,\ \forall Z\in A\}.$$

因为对任意的 $X\in L^p$ 有 $\phi(X-\phi(X)\cdot r)=0$, 我们得到

$$X-\phi(X)\cdot r\in C,\qquad \forall X\in L^p.$$

也就是对任意的 $Z\in A$ 有

$$E\{[X-\phi(X)\cdot r]Z\}\geq 0.$$

所以我们得到

$$\phi(X)\leq E\Big(\frac{X}{r}Z\Big),\qquad \forall Z\in A,$$

即

$$\phi(X)\leq\inf_{Z\in A}E\Big(\frac{X}{r}Z\Big).$$

另一方面，对任意正数 $\varepsilon>0$, 由于 $\phi\big(X-(\phi(X)+\varepsilon)\cdot\big)=-\varepsilon<0$, 可得

$$X-\big(\phi(X)+\varepsilon\big)\cdot r\overline{\in}C.$$

因此存在 $Z\in A$ 使得 $E\{[X-(\phi(X)+\varepsilon)\cdot r]Z\}<0$, 即

$$\phi(X)+\varepsilon>E\Big(\frac{X}{r}Z\Big).$$

所以对任意的 $X\in L^p$ 有

$$\phi(X)=\inf_{Z\in A}E\Big(\frac{X}{r}Z\Big).$$

从而

$$\rho(X)=\sup_{Z\in A}E\Big(-\frac{X}{r}Z\Big),\qquad \forall X\in L^p.$$

由命题 2 可知，当限制在 $L^\infty(\Omega)$ 上时，$\rho: L^\infty\to R$ 是满足 Fatou 性质的. 最后，由闭凸锥 C 的唯一性立即得到闭凸概率测度集 A 是唯一的. 证毕.

推论 1 设 $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ 是含于 $L^q(\Omega)$ 的两个概率测度集，若他们定义了一个相同的 Coherent 风险度量 $\rho: L^p\longrightarrow R$, 那么它们在 L^q 中有相同的闭凸包.

推论 2 当 $p=1$ 时，$\rho: L^1\longrightarrow R$ 是下半连续的风险度量当且仅当存在唯一一个 L^∞ 模 - 闭凸概率测度集 A 使得对任意的 $X\in L^1$ 有 $\rho(X)=\sup\limits_{Z\in A}E\big(-\frac{X}{r}Z\big)$.

参 考 文 献

1 Artzner Ph, Delbaen F, Eber J -M, Heath D. Thinking Coherently. *Risk*, 1997, 10: 68–71

2 Artzner Ph, Delbaen F, Eber J -M, Heath D. Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 1999, 9: 203–228

3 Delbaen F. Coherent Risk Measures on General Probability Spaces. Advances in Finance and Stochastics, Essays in Honor of Dieter Sondermann. New York: Springer-Verlag, 2002

4 史树中，凸分析. 上海：上海科学技术出版社，1990
(Shi Shuzhong. Convexity Analysis. Shanghai: Shanghai Scíentific and Technical Publishers, 1990)

COHERENT RISK MEASURES DEFINED ON $L^p(\Omega)$ SPACES

CHEN WENCAI

(*Mathematics Department of Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200240)

YE ZHONGXING

(*Mathematics Department of Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200240)

Abstract Coherent risk measures are defined on Banach spaces $L^p(\Omega)$ where Ω is a probability space and it is proven that a coherent risk measure $\rho: L^p(\Omega)\longrightarrow R$ is lower partial continuous with respect to the L^p norm, if and only if there exists a unique convex and weak* closed set $\mathcal{Q}$ of probability measures lying in the dual space $L^q(\Omega)$ such that $\rho(X)=\sup\limits_{Z\in\mathcal{Q}}E\big(-\frac{X}{r}Z\big)$, where $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Some results in [3] are generalized.

Key words Financial positions, L^p spaces, Coherent risk measures, representation theorem