第50卷第1期 数学学报中文版 Vol.50, No.1
2007年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jan., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)01-0025-08 **文献标识码:** **A**

Whitney集与图递归弧

郭秋丽

湖北大学数学与计算机学院 武汉 430062
浙江万里学院数学研究所 宁波 315100
E-mail: guoqiuli@zwu.edu.cn

奚李峰

浙江万里学院数学研究所 宁波 315100
E-mail: xilf@zwu.edu.cn

摘　要 通过构造具有有向图结构的迭代函数系通的子系通, 证明了Hausdorff维数大于1的图递归弧均为Whitney集,该结果不需要有向图满足传递条件.

关键词 分形; Whitney集; 图递归弧
MR(2000)主题分类 28A80
中图分类 O174.12

Whitney Sets and Graph–Directed Arcs

Qiu Li GUO

School of Mathematics and Computer Science, Hubei University, Wuhan 430062, *P. R. China*
Institute of Mathematics, Zhejiang Wanli University, Ningbo, Zhejiang 315100, *P. R. China*
E-mail: guoqiuli@zwu.edu.cn

Li Feng XI

Institute of Mathematics, Zhejiang Wanli University, Ningbo, Zhejiang 315100, *P. R. China*
E-mail: xilf@zwu.edu.cn

Abstract By constructing sub-IFS (iterated function system) of IFS with graph-directed structure, it is proved in this paper that the graph-directed arcs of Hausdorff dimension greater than 1 are Whitney sets; the result dones't need the transitivity condition on directed graph.

Keywords fractal; Whitney set; graph-directed arcs
MR(2000) Subject Classification 28A80
Chinese Library Classification O174.12

1 引言及定义

1935年, Whitney [1] 发表了著名的例子：一个C^1 类函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在一个临界弧上不恒等于常数. 在这个例子中, 临界集在f 下的像包含了一个Lebesgue 测度大于0的区间. 上述的Whitney 现象看起来似乎与Morse–Sard 定理矛盾, Morse–Sard 定理指出临界集的象的测度为0. 这是由于临界弧是一个分形集, 并且f 具有较低的光滑性. 在此, 我们回顾Whitney型

收稿日期: 2005-04-11; 接受日期: 2005-10-20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10301029, 10241003, 10571063)

临界集的定义:

定义1 $\mathbb{R}^n$上的连通集A被称为是Whitney型临界集(简称Whitney集), 如果存在一个C^1类函数$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 使得$f$限制在$A$上不是常值, 且在$A$的每一点上, f的所有一阶偏导数为0.

注1 应用Morse–Sard定理, 可知上述定义中的函数f不能太光滑[2].

根据定义, 下面两种集合不是Whitney集:

(1) 若集合F中的任意两点都可用F中的可求长曲线连接, 则集合F不是Whitney集[3];

(2) 任何连续函数$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的像集合肯定不是Whitney集[4].

既然如此, 那么如何从几何上刻画Whitney集呢? 该公开问题是Whitney在论文[1]中提出, 这个问题也可以叙述为: 给定一个函数f, f的临界集为连通闭集, 那么该集与可求长性"相差多远"才能使得f在其上不为常数?

在文[5]中, Norton证明了: 如果γ是一条满足$\dim_H\gamma>t$的t-拟弧, 则γ是一个Whitney集. 文[6]证明了对满足$1\le s\le z$的每一个s,都存在一条Hausdorff维数为1,临界度为1的平面弧为Whitney集. 文[7]证明了尽管Sierpinski地毯不是一个Whitney集, 但是它包含了一个与其维数相等的Whitney子集, 同时证明了Koch曲线也是一个Whitney集. 文[8]构造了一个Whitney集, 它是一条弧, 使得其上不可能有一个非常值的函数沿其单调并在其上的微分为0. 进一步地, 维数大于1的自相似弧(包括Koch曲线), 均是Whitney集[9].

本文将证明如果图递归弧的维数皆大于1, 那么它们都是Whitney集.

为此, 我们回顾有向图集的定义. 设$(V,\mathcal{E})$是一个有向图, 它的顶点集$V=\{1,2,\dots,m\}$, 它的边的全体记为$\mathcal{E}$. 令$\mathcal{E}_{i,j}$是从顶点i到j的边的全体. 若对于每条边$e\in\mathcal{E}$, 都存在相应的压缩相似映射$S_e:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 其压缩比为$r_e\in(0,1)$. 根据文[10]必存在唯一的一族非空紧集$\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_m$, 使得对每个$i$, 成立

$$\Gamma_i=\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{e\in\mathcal{E}_{i,j}}S_e(\Gamma_j). \tag{1}$$

这里$\{S_e:e\in\mathcal{E}\}$被称为$(V,\mathcal{E})$上的迭代函数系(简称IFS), 而$\{\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_m\}$被称为该IFS所对应的有向图集.

定义2 设$\{S_e:e\in\mathcal{E}\}$是$(V,\mathcal{E})$上的迭代函数系, 并且$\{\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_m\}$是满足(1)的有向图集. 那么$\{\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_m\}$被称为图递归弧, 如果下面的条件满足:

(1) 对每个i, Γ_i是弧;

(2) 如果$e\in\mathcal{E}_{i,j}$, $e'\in\mathcal{E}_{i,j'}$且$e\neq e'$,那么$S_e(\Gamma_j)\cap S_{e'}(\Gamma_{j'})\,(\subset\Gamma_i)$或是单点集, 或是空集.

本文将证明下面的结论.

定理1 设$\{\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_m\}$是图递归弧且对于每个$i$, $\dim_H\Gamma_i>1$, 则$\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_m$均是Whitney集.

注2 在上述定理中, 我们不需要有向图满足传递条件.

2 一些预备

设$(V,\mathcal{E})$是有向图. 令$\mathcal{E}^*$是$(V,\mathcal{E})$上的允许路径. 对任意$k\in\mathbb{N}$, 记$\mathcal{E}_{i,j}^k$长度为k的起点是i终点是j的允许路径的全体. 令$S_{e^*}=S_{e_1}\circ S_{e_2}\circ\cdots\circ S_{e_k}$及$r_{e^*}=r_{e_1}\cdot r_{e_2}\cdot\cdots\cdot r_{e_k}$. 反复

运用(1)式, 对$i=1,\dots,m$, 有

$$\Gamma_i=\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{e^*\in\mathcal{E}_{i,j}^k}S_{e^*}(\Gamma_j). \tag{2}$$

令$A^{(s)}$ 是相应的关联矩阵, 它的第(i,j)元素为

$$A_{i,j}^{(s)}=\sum_{e\in\mathcal{E}_{i,j}}r_e^{(s)}. \tag{3}$$

令$\rho\left(A^{(s)}\right)$ 是$A^{(s)}$ 的谱半径. 称$(V,\mathcal{E})$ 是传递的, 如果对每个$i,j\in V$, $[\bigcup_{k\geq 1}\mathcal{E}_{i,j}^k]\neq\emptyset$, 即$(V,\mathcal{E})$ 道路连通.

我们将应用来自文[11]的一个相关结果:

设$(V,\mathcal{E})$ 是传递的. 令$\{K_1,K_2,\dots,K_m\}$ 是$(V,\mathcal{E})$ 上的有向图集, 且对于每个$i\in V$, (1)式是不交并. 那么存在数s, 使得$\dim_H K_i=\dim_B K_i=s$ 且对于每个$i\in V$, $0<\mathcal{H}^s(K_i)<\infty$, 这里$s$ 是满足$\rho\left(A^{(s)}\right)=1$的唯一正数.

为证明定理1, 我们需要Whitney 延拓定理的如下特殊形式[12]:

引理1 设A 是$\mathbb{R}^n$中的紧集, $f:A\to\mathbb{R}$ 是一个实值函数. 如果对于任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得对于任意满足$0<|x-y|<\delta$ 的$x,\ y\in A$, 成立

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}<\varepsilon, \tag{4}$$

那么必存在f的一个C^1 延拓$\bar{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 使得$\overline{f}|_A=f$ 且$\nabla\overline{f}|_A\equiv 0$.

注3 不等式(4)即为$|f(x)-f(y)|=o(|x-y|)$.

下面引入具有图结构的IFS的子IFS.

定义3 令Ξ 是$\mathcal{E}^*$ 一个有限子集. 称$\{S_{e^*}:e^*\in\Xi\}$ 为$(V,\mathcal{E})$上的相对于$\{S_e:e\in\mathcal{E}\}$ 的一个子IFS.

事实上, 当视Ξ 为边集的时候, $\{S_{e^*}:e^*\in\Xi\}$ 就可以看作(V,Ξ) 上的一个IFS. 特别地, 当$\{K_1,\dots,K_m\}$ 是$(V,\mathcal{E})$上的有向图集, 而$\{K_1',\dots,K_m'\}$是(V,Ξ)上的有向图集, 那么对每个i, 成立$K_i'\subset K_i$. 令$\Xi_{i,j}$ 是Ξ 中起点为i 终点是j 的边的全体.

引理2 如果$\min_i\dim_H(K_i)>1$, 那么存在$(V,\mathcal{E})$上的一个子IFS $\{S_{e^*}:e\in\Xi\}$ $(\Xi\subset\mathcal{E}^*)$, 使得下列成立:

(1) 若$e_1^*\in\Xi_{i,j_1}$, $e_2^*\in\Xi_{i,j_2}$ 且$e_1^*\neq e_2^*$, 则

$$S_{e_1^*}(K_{j_1})\cap S_{e_2^*}(K_{j_2})=\emptyset;$$

进一步地, 如果$\{K_i\}_i$ 是弧, 那么对每个$e^*\in\Xi_{i,j}$, $S_{e^*}(K_j)$ 不包含K_i的任一端点.

(2) 存在一个数$\tau>1$, 使得

$$\rho(B^{(\tau)})=1,$$

这里$\{B^{(s)}\}_{s\in\mathbb{R}}$ 是相应于子IFS $\{S_{e^*}:e\in\Xi\}$ 的关联矩阵.

证明 令$t=\min_i(\dim_H K_i)$. 固定$\overline{s},s_0$, 满足$1<\overline{s}<s_0<t$.

记$c_1=(\min_{e\in\mathcal{E}}r_e)/[\max_j(\mathrm{diam}\,(K_j))]$. 固定$h\in V$, 我们用$\mathcal{N}_k(h)$ 表示与K_h 相交的k阶2进方体的全体.

下面的事实是众所周知的(见文[13]或[14]): 如果$\mathcal{M}$ 是一些k阶2进方体, 那么我们总可以从中挑选出若干个, 记为$\mathcal{M}_1$, 使得$\mathcal{M}_1$ 中的方体两两不交, 并且$\#\mathcal{M}_1 \geq (\#\mathcal{M})/c$, 这里$c$ 是只依赖$\mathbb{R}^n$的一个常数.

因为$\dim_H K_h \geq t > 1$,所以$s^* = \overline{\dim}_B K_h \geq \dim_H K_h \geq t > 1$. 根据Box维数的定义, 有

$$s^* = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\log \#\mathcal{N}_k(h)}{k \log 2},$$

于是, 存在一个子列$\{k_i\}_i$, 使得

$$s^* = \lim_{i\to\infty} \frac{\log \#\mathcal{N}_{k_i}(h)}{k_i \log 2}.$$

进一步地, 存在充分大的正整数$\mathbf{i}$, 使得下式成立,

$$\#\mathcal{N}_{k_\mathbf{i}}(h) \geq 2^{k_\mathbf{i} s_0} \geq 4c \ \text{ 且 } 2^{k_\mathbf{i}(s_0-\overline{s})} > 2c/c_1^{\overline{s}}.$$

如上所述, 我们可以选择$\mathcal{N}_{k_\mathbf{i}}(h)$的一个子集$\mathcal{N}^*_{k_\mathbf{i}}(h)$, 使得$\mathcal{N}^*_{k_\mathbf{i}}(h)$ 的元素($k_\mathbf{i}$阶2进方体)两两不交, 并且

$$\#\mathcal{N}^*_{k_\mathbf{i}}(h) \geq \#\mathcal{N}_{k_\mathbf{i}}(h)/c \geq 2^{k_\mathbf{i} s_0}/c. \tag{5}$$

对于2进方体$I \in \mathcal{N}^*_{k_\mathbf{i}}(h)$, 因为$I \cap K_h \neq \emptyset$, 我们取点$x \in I \cap K_h (\subseteq K_h)$. 于是存在长度无限的有向路径$e_1 e_2 \cdots e_k \cdots$ (其中对每个k, e_k 的终点是i_k), 使得$\{x\} = \lim_{k\to\infty} S_{e_k^*}(K_{i_k})$, 这里$e_k^* = e_1 e_2 \cdots e_k$, 有

$$\operatorname{diam}[S_{e_k^*}(K_{i_k})] = (r_{e_1} \cdot r_{e_2} \cdot \cdots \cdot r_{e_k})[\operatorname{diam}(K_{i_k})].$$

于是存在一个依赖于I 的正整数$N(I)$, 使得

$$\left(\min_e r_e\right) \cdot 2^{-k_\mathbf{i}} \leq (r_{e_1} \cdot r_{e_2} \cdot \cdots \cdot r_{e_{N(I)}})[\operatorname{diam}(K_{i_{N(I)}})] < 2^{-k_\mathbf{i}}. \tag{6}$$

对$I \in \mathcal{N}^*_{k_\mathbf{i}}(h)$, 令$S^{(I)} = S_{e^*_{N(I)}}$, $e^{(I)} = e^*_{N(I)}$ 且 $K^{(I)} = K_{i_{N(I)}}$. 因此对于不同的$I, J \in \mathcal{N}^*_{k_\mathbf{i}}(h)$, 有

$$S^{(I)}(K^{(I)}) \cap S^{(J)}(K^{(J)}) = \emptyset, \tag{7}$$

这是由于(6)式及$d(I,J) \geq 2^{-k_\mathbf{i}}$.

记$r^{(I)}$是$S^{(I)}$的压缩比, 注意到$r^{(I)}$总是大于$c_1 2^{-k_\mathbf{i}}$, 这里c_1如前定义.

令$\Phi_h = \mathcal{N}^*_{k_\mathbf{i}}(h)$. 进一步地, 当$\{K_i\}_i$ 是弧的时候, 令$\Phi_h = \{I \in \mathcal{N}^*_{k_\mathbf{i}}(h) : I \cap \{a_h, b_h\} = \emptyset\}$, 这里$a_h$, b_h 是K_h 的端点. 令$\Xi_h = \{e^* = e^{(I)} : I \in \Phi_h\}$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{I\in\Phi_h} (r^{(I)})^{\overline{s}} &\geqslant \left(c_1 2^{-k_\mathbf{i}}\right)^{\overline{s}} \left(\#\mathcal{N}^*_{k_\mathbf{i}}(h) - 2\right) \geqslant c_1^{\overline{s}} 2^{-k_\mathbf{i}\overline{s}} \left(2^{k_\mathbf{i} s_0}/c - 2\right) \geqslant c_1^{\overline{s}} 2^{-k_\mathbf{i}\overline{s}} (2^{k_\mathbf{i} s_0}/c)/2 \\ &= (c_1^{\overline{s}}/2c) 2^{k_\mathbf{i}(\overline{s}-s_0)} > 1,\end{aligned}$$

即

$$\sum_{e^*\in\Xi_h} (r_{e^*})^{\overline{s}} > 1. \tag{8}$$

令$\Xi = \cup_{h\in V}\Xi_h$, 我们得到一个新的有向图(V,Ξ). 对于每条边$e^{(I)} \in \Xi$, 存在一个压缩相似映射$S^{(I)}$, 其压缩比为$r^{(I)}$.

令$B^{(s)}$ 是相应于(V,Ξ)的$m\times m$ 关联矩阵, 即

$$(B^{(s)})_{i,j} = \sum_{e^{(I)}\in\Xi_{i,j}} (r^{(I)})^s.$$

由(8)式, $B^{(\overline{s})}$ 的每个行和大于1, 利用Perron–Frobenius定理, 我们有$\rho\left(B^{(\overline{s})}\right) > 1$. 另一方面, 当$s\to\infty$时, $\rho\left(B^{(s)}\right)\to 0$. 由于$f(s) = \rho\left(B^{(s)}\right)$ 是连续的, 并且是s的严格递减函数(根据Perron–Frobenius 定理), 从而存在唯一的正数$\tau\in(\overline{s},+\infty)$ 满足

$$\rho(B^{(\tau)}) = 1,$$

这里$\tau > \overline{s} > 1$. 证毕.

注4 上述证明的想法受文[14, 128–131页] 的启发.

3 定理的证明

本文总是将弧$\gamma(\subset\mathbb{R}^n)$ 与它的表示$\gamma:[0,\ 1]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 视为等同.

我们称弧γ 为单调弧, 如果存在映射$f:\gamma\to[0,1]$, $d_1\neq d_2$ 以及$0<t_1<t_2<1$, 使得对于$x,y\in\gamma$, $|f(x)-f(y)| = o(|x-y|)$, $(f\circ\gamma)$ 在$[0,1]$上单调且

$$(f\circ\gamma)|_{[0,t_1]}\equiv d_1,\quad (f\circ\gamma)|_{[t_2,1]}\equiv d_2.$$

令单调弧的全体为Ω.

引理3 若$\gamma\in\Omega$, 则γ 是Whitney 集.

证明 因$|f(x)-f(y)| = o(|x-y|)$ 且$d_1\neq d_2$, 根据引理1和定义1, 本引理得证. 证毕.

我们将利用下面的两个命题来证明定理1.

命题1 若$\Gamma_j\in\Omega$ 且$\mathcal{E}_{i,j}\neq\emptyset$, 则$\Gamma_i\in\Omega$.

命题2 设$\{\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_m\}$ 是图递归弧, 满足$\min_i(\dim_H\Gamma_i) > 1$, 则$\Omega\cap\{\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_m\}\neq\emptyset$.

命题1, 2$\Longrightarrow$定理1 假设$\Omega^c\cap\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m\}\neq\emptyset$, 那么根据命题2, 不妨设$\{\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_k\}\subseteq\Omega$ 且$\{\Gamma_{k+1},\Gamma_{k+2},\ldots,\Gamma_m\}\subseteq\Omega^c$ $(1\le k<m)$. 应用命题1, 对于任意的$i>k$ 和$j\le k$, 有$\mathcal{E}_{i,j}=\emptyset$. 由此, $\{\Gamma_{k+1},\Gamma_{k+2},\ldots,\Gamma_m\}$ 是$\{V',\mathcal{E}'\}$ 上的有向图弧, 这里$V' = \{(k+1),\ldots,m\}$, $\mathcal{E}' = \{e\in\mathcal{E}_{i,j}: i,j\ge k+1\}$. 再由命题2得$\{\Gamma_{k+1},\Gamma_{k+2},\ldots,\Gamma_m\}\cap\Omega\neq\emptyset$. 于是矛盾. 证毕.

命题1的证明 假设$\Gamma_j\in\Omega$, 因为$\mathcal{E}_{i,j}$非空, 存在一个压缩映射S_e, 使得$S_e(\Gamma_j)\subset\Gamma_i$.

下面将证明$\Gamma_i\in\Omega$.

令$S_e:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个压缩比为$r_e\in(0,1)$的相似映射. 记Γ_i 的端点分别是a, b, 并记Γ_j 的端点分别是$\overline{a}$, $\overline{b}$. 令$S_e(\overline{a}) = a_1$ 且$S_e(\overline{b}) = b_1$.

对任意给定的γ, 令$\gamma(x,y)$ 是连接x和y的γ 的子弧. 因$\Gamma_j\in\Omega$, 所以存在沿Γ_j单调的函数$f:\Gamma_j\to[0,1]$, 以及$x_1,y_1\in\Gamma_j$, 使得对于$x,y\in\Gamma_j$,

$$|f(x)-f(y)| = o(|x-y|)\ \text{ 且 }\ f|_{\Gamma_j(\overline{a},x_1)}\equiv d_1,\quad f|_{\Gamma_j(y_1,\overline{b})}\equiv d_2\ (d_1\neq d_2).$$

令$S_e(x_1)=a_2$, $S_e(y_1)=b_2$. 并设$\gamma_1=\Gamma_i(a,a_1)$, $\gamma_2=\Gamma_i(a_1,a_2)$, $\gamma_3=\Gamma_i(a_2,b_2)$, $\gamma_4=\Gamma_i(b_2,b_1)$ 以及$\gamma_5=\Gamma_i(b_1,b)$ (见图1). 记$\delta=\min_{|i-j|>1}d(\gamma_i,\gamma_j)>0$.

图 1:

如下定义函数$g:\Gamma_i\to\mathbb{R}$:

$$g(x)=\begin{cases} d_1, & \text{若 } x\in\Gamma_i(a,a_2)=\gamma_1\cup\gamma_2,\\ f(S_e^{-1}(x)), & \text{若 } x\in\Gamma_i(a_1,b_1)=\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4,\\ d_2, & \text{若 } x\in\Gamma_i(b_2,b)=\gamma_4\cup\gamma_5.\end{cases}$$

应用引理1, 只需要对于g 验证(4)式, 即对于满足$|x'-y'|<\delta$的点$x',y'\in\Gamma_i$, 成立

$$|g(x')-g(y')|=o(|x'-y'|). \tag{9}$$

设$x',y'\in\Gamma_i$ 满足$|x'-y'|<\delta$, 并令$x'\in\gamma_p$, $y'\in\gamma_q$. 由于$\delta=\min_{|i-j|>1}d(\gamma_i,\gamma_j)$, 有

$$p=q \quad \text{或者 } |p-q|=1.$$

我们将分情况讨论:

情况1 当$x',y'\in\gamma_1\cup\gamma_2$ 或$x',y'\in\gamma_4\cup\gamma_5$ 时, 有$|g(x')-g(y')|=0$.

情况2 当$x',y'\in\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$ 时, 有

$$|g(x')-g(y')|=|f(S_e^{-1}x')-f(S_e^{-1}y')|=o(|S_e^{-1}x'-S_e^{-1}y'|)=o(|x'-y'|),$$

于是得到(9)式, 并由命题1得证. 证毕.

命题2的证明 根据引理2, 可知存在一个(V,Ξ)上的子IFS满足$\rho(B^{(\tau)})=1$, 这里$\tau>1$ 且$\{B^{(s)}\}_{s\in\mathbb{R}^+}$ 子IFS的关联矩阵.

根据Perron–Frobenius定理, 存在一个非负的非零向量$X=(x_1,\dots,x_m)^T$ 满足

$$B^{(\tau)}X=X. \tag{10}$$

这里$X\geq 0$ 且 $X\neq 0$. 不失一般性, 假设对某个$h\in V$, 成立$x_h>0$. 我们将证明$\Gamma_h\in\Omega$.

步骤1 在$\{\Gamma_i\}_i$上定义测度和函数.

令Ξ^* 是所有形如$\alpha=e_1^*\cdots e_k^*$ ($e_i^*\in\Xi$)的允许路径的集合. 对于路径$\alpha\in\Xi^*$, 分别记S_α和r_α 是对应的相似映射和压缩比.

根据(10)式及引理2的(1), 存在$\{\Gamma_i\}_i$ 上的Borel 测度$\{\mu_i\}_{i\in V}$ 满足$\mu_i(\Gamma_i)=x_i$, 并且对于任意的起点为i 终点为j 的路径$\alpha\in\Xi^*$,

$$\mu_i(S_\alpha(\Gamma_j))=(r_\alpha)^\tau x_j.$$

注意到对于这个路径α 以及任意的子弧$\gamma\subset\Gamma_j$, 成立

$$\mu_i(S_\alpha(\gamma))=(r_\alpha)^\tau\mu_j(\gamma). \tag{11}$$

假设$\{K_1',\dots,K_m'\}$ 是相对于子IFS的有向图集. 于是μ_i的支撑是K_i'.

对每个$i\in V$, 固定Γ_i的一个端点a_i. 定义一个函数$f_i:\Gamma_i\to\mathbb{R}$, 使得对于每个$x\in\Gamma_i$,

$$f_i\left(x\right)=\mu_i\left[\Gamma_i\left(a_i,x\right)\right], \tag{12}$$

这里$\Gamma_i\left(x,y\right)$ 是连接x 和y 的Γ_i 的子弧. 这里

$$\left|f_i\left(x\right)-f_i\left(y\right)\right|=\mu_i\left[\Gamma_i\left(x,y\right)\right] \tag{13}$$

因此f_i单增函数, 且f_h 不是常数, 这是因为$\mu_h(\Gamma_h)=x_h>0$. 因为K_i' 不包含Γ_i 的任何端点, 所以f_i 在Γ_i的端点附近是常值. 根据(11), (12)和(13)式, 有

$$|f_i(S_\alpha(x))-f_i(S_\alpha(y))|=(r_\alpha)^\tau|f_j(x)-f_j(y)|. \tag{14}$$

在弧Γ_j 上, 得到互不相交的子弧

$$\bigcup_q\{S_{e^*}(\Gamma_q):e^*\in\Xi_{j,q}\}=\Pi_j,$$

它们均不包含Γ_j 的端点.

于是得到满足下面条件的子弧分解$\Gamma_j=\bigcup_{t=1}^{2(\#\Pi_j)+1}\gamma_t^{(j)}$:

(1) $\gamma_t^{(j)}\in\Pi_j$ 当且仅当t 是偶数;

(2)如果t 是奇数, 则$\mu_j(\gamma_t^{(j)})=0$;

(3)当$|t-t'|>1$ 时, $\gamma_t^{(j)}\cap\gamma_{t'}^{(j)}=\emptyset$;

(4) 对每个t , $\gamma_t^{(j)}\cap\gamma_{t+1}^{(j)}$ 是单点集;

(5) Γ_j 的端点包含在$\gamma_1^{(j)}$ 或$\gamma_{2(\#\Pi_j)+1}^{(j)}$ 内.

步骤2 对于$x,y\in\Gamma_i$,估计$\frac{|f_i(x)-f_i(y)|}{|x-y|}$.

任给不同的点$x,y\in\Gamma_i$, 我们设一条最长的有限路径$\alpha\in\Xi^*$, 使得x 与y 同时含在$S_\alpha(\Gamma_j)$内(α 可能是空字). 分别记$x'=S_\alpha^{-1}(x)$, $y'=S_\alpha^{-1}(y)(\in\Gamma_j)$, 并设$x'\in\gamma_t^{(j)}$, $y'\in\gamma_{t'}^{(j)}$. 在上述假设下, 下面情形是不可能出现的: $t=t'$ 且$\gamma_t^{(j)}\in\Pi_j$.

下面将分三种情况进行讨论.

情形1 $t=t'$且$\gamma_t^{(j)}\notin\Pi_j$. 因为$\mu_j(\gamma_t^{(j)})=0$, 所以

$$|f_i(x)-f_i(y)|=(r_\alpha)^\tau\,|f_j(x')-f_j(y')|\leq(r_\alpha)^\tau\mu_j(\gamma_t^{(j)})=0.$$

情形2 $|t-t'|>1$. 我们有$|x'-y'|\geq\min_{|t_1-t_2|>1}d(\gamma_{t_1}^{(j)},\gamma_{t_2}^{(j)})$, 并且

$$|x-y|=|S_\alpha(x')-S_\alpha(y')|=r_\alpha|x'-y'|\geq r_\alpha\Big[\min_{|t_1-t_2|>1}d(\gamma_{t_1}^{(j)},\gamma_{t_2}^{(j)})\Big],$$

这就表明$r_\alpha\leq|x-y|/[\min_{|t_1-t_2|>1}d(\gamma_{t_1}^{(j)},\gamma_{t_2}^{(j)})]$. 因此

$$\begin{aligned}\frac{|f_i(x)-f_i(y)|}{|x-y|}&=\frac{|f_i(S_\alpha(x'))-f_i(S_\alpha(y'))|}{|S_\alpha(x')-S_\alpha(y')|}=\frac{(r_\alpha)^\tau\,|f_j(x')-f_j(y')|}{r_\alpha|x'-y'|}\\&\leq(r_\alpha)^{\tau-1}\mu_j(\Gamma_j)\Big[\min_{|t_1-t_2|>1}d(\gamma_{t_1}^{(j)},\gamma_{t_2}^{(j)})\Big]^{-1}\leq|x-y|^{\tau-1}\,\mu_j(\Gamma_j)\Big[\min_{|t_1-t_2|>1}d(\gamma_{t_1}^{(j)},\gamma_{t_2}^{(j)})\Big]^{-\tau}.\end{aligned}$$

所以, 对于该情形得到

$$|f_i(x)-f_i(y)|=o(|x-y|).$$

情形3 $|t-t'|=1$.

我们假设$t'=t+1$ 且t' 是偶数. 设$\gamma_{t+1}^{(j)}=S_{e^*}(\Gamma_p)\subset\Gamma_j$, 其中$e^*\in\Xi$. 于是, $\Gamma_p=\bigcup_{u=1}^{2(\#\Pi_p)+1}\gamma_u^{(p)}$. 我们设$\gamma_t^{(j)}\cap\gamma_{t+1}^{(j)}=\{z'\}$. 不失一般性, 令$z'\in S_{e^*}(\gamma_1^{(p)})$.

如果$y'\in S_{e^*}(\gamma_1^{(p)})$, 那么

$$|f_j(x')-f_j(y')|=\mu_j(\Gamma_j(x',y'))=\mu_j(\Gamma_j(x',z'))+\mu_j(\Gamma_j(z',y'))=0+0=0.$$

因此, 有

$$|f_i(x)-f_i(y)|=(r_\alpha)^\tau\,|f_j(x')-f_j(y')|=0.$$

如果$y'\notin S_{e^*}(\gamma_1^{(p)})$, 那么$|f_j(x')-f_j(y')|=\mu_j(\Gamma_j(x',y'))\le\mu_j(\Gamma_j)$, 并且$|x'-y'|\ge\min_{u>1}(\gamma_t^{(j)},S_{e^*}(\gamma_u^{(p)}))$. 仿照情形2的证明, 我们也可得

$$|f_i(x)-f_i(y)|=o(|x-y|).$$

综合上述2个步骤, 得

$$|f_h(x)-f_h(y)|=o(|x-y|),$$

这里f_h 限制在$\gamma_1^{(h)}$ 或$\gamma_{2(\#\Pi_h)+1}^{(h)}$ 上为常数. 对于端点a,b, 我们有

$$|f_h(a)-f_h(b)|=\mu_h(\Gamma_h)=x_h>0.$$

因此$\Gamma_h\in\Omega$. 证毕.

参 考 文 献

[1] Whitney H., A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. J.*, 1935, **1**: 514–517.
[2] Sard A., The measure of critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1942, **48**: 883–890.
[3] Whyburn W. M., Non isolated critical points of functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1929, **35**: 701–708.
[4] Choquet G., L' isometrie des ensembles dans ses rapports avec la thérie du contact et la théorie de la measure, *Mathematica, Bucharest*, 1944, **XX**: 29–64.
[5] Norton A., Functions not constant on fractal quasi-arcs of critical points, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1989, **106**: 397–405.
[6] Xi L. F., Criticality of plane arcs, *Nonlinearity*, 2003, **16**: 647–660.
[7] Lin Y., Xi L. F., Whitney's critical sets in fractals, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, **14**(7): 995–1006.
[8] Wu M., Xi L. F., A note on Whitney's critical sets, *Progress in Natural Science*, 2003, **13**(2): 152–156.
[9] Wen Z. Y., Xi L. F., Relations among Whitney sets, self-similar arcs and quasi-arcs, *Israel Journal of Mathematics*, 2003, **136**: 251–267.
[10] Mauldin R. D., Williams S. C., Hausdorff dimension in graph directed constructions, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1988, **309**(2): 811–839.
[11] Falconer K. J., Techniques in fractal geometry, Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 1997.
[12] Whitney H., Analytic extension of differentiable function defined on closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1934, **36**: 63–89.
[13] Stein E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton: Princeton Univ. Press, 1970.
[14] Wen Z. Y., Mathematical foundations of fractal geometry, Shanghai: Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House, 2000.