第50卷第1期 数学学报中文版 Vol.50, No.1
2007年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jan., 2007

**文章编号:** 0583-1431(2007)01-0145-04 **文献标识码: A**

# 树的最大特征值的上界的一个注记

扈生彪

青海民族学院数学系 西宁 810007
E-mail: shengbiaohu@yahoo.com.cn

**摘 要** 设 $T$ 是一个树, $V$ 是 $T$ 的顶点集. 记 $d_v$ 是 $v \in V$ 的度, $\Delta$ 是 $T$ 的最大顶点度. 设 $w \in V$ 且 $d_w = 1$. 记 $k = e_w + 1$, 这里 $e_w$ 是 $w$ 的 excentricity. 设 $\delta_j' = \max\{d_v : \operatorname{dist}(v, w) = j\}$, $j = 1, 2, \ldots, k-2$, 我们证明 $\mu_1(T) < \max_{1\le j\le k-1}\{\sqrt{\delta_j' - 1} + \delta_j' + \sqrt{\delta_{j-1}' - 1}\}$ 和 $\lambda_1(T) < \max_{1\le j\le k-1}\{\sqrt{\delta_j' - 1} + \sqrt{\delta_{j-1}' - 1}\}$. 这里 $\mu_1(T)$ 和 $\lambda_1(T)$ 分别是 $T$ 的 Laplacian 矩阵和邻接矩阵的最大特征值. 特别地, 记 $\delta_0' = 2$.

**关键词** 树; Laplacian 矩阵; 邻接矩阵; 最大特征值
**MR(2000) 主题分类** 05C50, 05C05
**中图分类** O157.5

**A Note on the Upper Bound of the Largest Eigenvalue of Trees**

Sheng Biao HU

*Department of Mathematics, Qinghai Nationalities College, Xinig* 810007, *P. R. China*
*E-mail: shengbiaohu@yahoo.com.cn*

**Abstract** Let $T$ be a tree with vertex set $V$. Let $d_v$ denote the degree of $v \in V$ and let $\Delta$ denote the largest vertex degree of $T$. Let $w \in V$ such that $d_w = 1$. Let $k = e_w + 1$ where $e_w$ is the eccentricity of $w$. For $j = 1, 2, \ldots, k-2$, let $\delta_j' = \max\{d_v : \operatorname{dist}(v, w) = j\}$. We prove that $\mu_1(T) < \max_{1\le j\le k-1}\{\sqrt{\delta_j' - 1} + \delta_j' + \sqrt{\delta_{j-1}' - 1}\}$ and $\lambda_1(T) < \max_{1\le j\le k-1}\{\sqrt{\delta_j' - 1} + \sqrt{\delta_{j-1}' - 1}\}$, where $\mu_1(T)$ and $\lambda_1(T)$ are the largest eigenvalue of the Laplacian matrix and the adjacency matrix of $T$. Specially, we denote that $\delta_0' = 2$.

**Keywords** tree; Laplacian matrix; adjacency matrix; largest eigenvalue
**MR(2000) Subject Classification** 05C50, 05C05
**Chinese Library Classification** O157.5

## 1 引言及预备

设 $G = (V, E)$ 是一个简单无向连通图, 图 $G$ 的邻接矩阵和顶点度的对角矩阵分别记为 $A(G)$ 和 $D(G)$. 图 $G$ 的 Laplacian 矩阵是 $L(G) = D(G) - A(G)$, 显然 $A(G)$ 和 $L(G)$ 是实对称矩阵. $L(G)$ 和 $A(G)$ 的最大特征值分别记为 $\mu_1(G)$ 和 $\lambda_1(G)$. 记 $d_v$ 是 $v \in V$ 的度, $d(v, u)$ 是顶点 $v$ 到顶点 $u$ 的距离.

收稿日期: 2005-09-08; 接受日期: 2005-12-20
基金项目: 教育部科学技术研究重点项目 (205169)

设 $T$ 是一个树, 且 $\max\{d(v)\,|\,v\in V(T)\}=\Delta$. Stevanović 在文 [1, 定理 1] 中证明了
$$\mu_1(T)<\Delta+2\sqrt{\Delta-1} \tag{1}$$
和
$$\lambda_1(T)<2\sqrt{\Delta-1}. \tag{2}$$
事实上, (2) 式最早是由 Godsil 在文 [3, 定理 3] 中给出的, 这里 Stevanović 用不同的方法证明了 (2) 式.

我们仍然称一个顶点 $u$ 的 excentricity 是从 $u$ 到图的其它任意顶点的最大距离.

设 $u\in V(T)$ 且 $d_u=\Delta$. 记 $k=e_u+1$, 这里 $e_u$ 是 $u$ 的 excentricity. 设 $\delta_j=\max\{d_v:\operatorname{dist}(v,u)=j\}$, $j=1,2,\ldots,k-1$, Rojo 在文 [2, 定理 3] 中证明了
$$\mu_1(T)<\max\Big\{\max_{2\le j\le k-2}\{\sqrt{\delta_j-1}+\delta_j+\sqrt{\delta_{j-1}-1}\},\ \sqrt{\delta_1-1}+\delta_1+\sqrt{\Delta},\Delta+\sqrt{\Delta}\Big\} \tag{3}$$
和
$$\lambda_1(T)<\max\Big\{\max_{2\le j\le k-2}\{\sqrt{\delta_j-1}+\sqrt{\delta_{j-1}-1}\},\sqrt{\delta_1-1}+\sqrt{\Delta}\Big\}. \tag{4}$$
文 [2] 指出 "最后, 我们观察
$$\begin{aligned}&\sqrt{\delta_j-1}+\delta_j+\sqrt{\delta_{j-1}-1}\le\Delta+2\sqrt{\Delta-1}\ \ 对\ \ j=2,3,\ldots,k-2.\\&\sqrt{\delta_1-1}+\delta_1+\sqrt{\Delta}\le\Delta+2\sqrt{\Delta-1}\ \ 除了\ \ \delta_1=\Delta\end{aligned}$$
和
$$\begin{aligned}&\sqrt{\delta_j-1}+\sqrt{\delta_{j-1}-1}\le2\sqrt{\Delta-1}\ \ 对 j=2,3,\ldots,k-2.\\&\sqrt{\delta_1-1}+\sqrt{\Delta}\le2\sqrt{\Delta-1}\ \ 除了\ \ \delta_1=\Delta.\end{aligned}$$
因而, 除了 $\delta_1=\Delta$ 之外, 由 (3), (4) 式给出的新上界比 Stevanović 由 (1), (2) 式给出的上界好."

本文将给出上界 (3), (4) 式的一个改进. 对此改进了的新上界, 不论是 $\delta_1=\Delta$ 还是 $\delta_1<\Delta$, 它总比由 (1), (2) 式给出的上界好.

设 $T_k$ 是一个含有 $k$ 水平层的根树, 使得每一层中的顶点有相同的度. 记 $d_{k-j+1}$ 是第 $j$ 层 (与根点的距离是 $j-1$) 中顶点的度, $j=1,2,\ldots,k$.

记 $L_j$ 是 $k\times k$ 对称三对角线矩阵 $L_k$ 的 $j\times j$ 前主子阵, $j=1,2,\ldots,k-1$. 这里
$$L_k=\begin{pmatrix}1&\sqrt{d_2-1}&0&\cdots&0&0\\\sqrt{d_2-1}&d_2&\sqrt{d_3-1}&\cdots&0&0\\0&\sqrt{d_3-1}&d_3&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&d_{k-1}&\sqrt{d_k}\\0&0&0&\cdots&\sqrt{d_k}&d_k\end{pmatrix},$$
并记 $A_j$ 是 $k\times k$ 对称三对角线矩阵 $A_k$ 的 $j\times j$ 前主子阵, $j=1,2,\ldots,k-1$. 这里
$$A_k=\begin{pmatrix}0&\sqrt{d_2-1}&0&\cdots&0&0\\\sqrt{d_2-1}&0&\sqrt{d_3-1}&\cdots&0&0\\0&\sqrt{d_3-1}&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&\sqrt{d_k}\\0&0&0&\cdots&\sqrt{d_k}&0\end{pmatrix}.$$
我们记 $\sigma(M)$ 是矩阵 $M$ 的谱.

**引理 1** (见文 [2, 推论 2]) $\mu_1(T_k)\in\sigma(L_k)$ 且 $\lambda_1(T_k)\in\sigma(A_k)$.

## 3 主要结果

记 $T$ 是一个树, 它的最大顶点度是 $\Delta$. 设 $w$ 是 $T$ 的一个顶点且 $d_w=1$. 记 k=$e_w+1$, 这里 $e_w$ 是 $w$ 的 excentricity. 设 $\delta'_j=\max\{d_v : \mathrm{dist}\,(v,w)=j\},\ j=1,2,\ldots,k-1$. 显然 $\delta'_{k-1}$=1. 设 $T'_k$ 是一个含有 $k$ 水平层的根树, $w$ 是它的根点且每一层中的顶点有相同的度. $T$ 的第 $j$ 层中顶点的度是 $\delta'_{j-1}$, $j=2,3,\ldots,k$. 显然, $T$ 是 $T_k$ 的一个导出子图.

**定理 2** 设 $T$ 是一个树, $w$ 是 $T$ 的一个 1 度点. 记 $k=e_w+1$, 这里 $e_w$ 是 $w$ 的 excentricity. 设 $\delta'_j=\max\{d_v : \mathrm{dist}\,(v,w)=j\}$, $j=1,2,\ldots,k-1$, 那么

$$\mu_1(T)<\max_{1\le j\le k-1}\left\{\sqrt{\delta'_j-1}+\delta'_j+\sqrt{\delta'_{j-1}-1}\right\} \tag{5}$$

且

$$\lambda_1(T)<\max_{1\le j\le k-1}\left\{\sqrt{\delta'_j-1}+\sqrt{\delta'_{j-1}-1}\right\}. \tag{6}$$

这里 $\delta'_0=2$.

**证明** 设 $T_k$ 是含有 $k$ 水平层的根树, 且 $T_k$ 的每一层中的顶点有相同的度, $w$ 是它的根点且 $d_w=1$. 记 $T_k$ 的第 $j$ 层中顶点的度是 $\delta'_{j-1}$, $j=2,3,\ldots,k$, 那么, $T$ 是 $T_k$ 的一个导出子图. 由引理 1 得 $\mu_1(L(T_k))\in\sigma(L'_k)$ 且 $\lambda_1(A(T_k))\in\sigma(A'_k)$. 这里 $L'_k$ 和 $A'_k$ 是下列 $k\times k$ 矩阵

$$L'_k=\begin{pmatrix}
1 & \sqrt{\delta'_{k-2}-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\sqrt{\delta'_{k-2}-1} & \delta'_{k-2} & \sqrt{\delta'_{k-3}-1} & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & \sqrt{\delta'_{k-3}-1} & \delta'_{k-3} & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \delta'_2 & \sqrt{\delta'_1-1} & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\delta'_1-1} & \delta'_1 & 1\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

和

$$A'_k=\begin{pmatrix}
0 & \sqrt{\delta'_{k-2}-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\sqrt{\delta'_{k-2}-1} & 0 & \sqrt{\delta'_{k-3}-1} & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & \sqrt{\delta'_{k-3}-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\delta'_1-1} & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\delta'_1-1} & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

由 Gershgorin 定理得

$$\begin{aligned}\mu_1(T_k)&<\max\left\{\max_{2\le j\le k-2}\left\{\sqrt{\delta'_j-1}+\delta'_j+\sqrt{\delta'_{j-1}-1}\right\},\sqrt{\delta'_1-1}+\delta'_1+1\right\}\\
&=\max_{1\le j\le k-2}\left\{\sqrt{\delta'_j-1}+\delta'_j+\sqrt{\delta'_{j-1}-1}\right\},\end{aligned}$$

且

$$\lambda_1(T_k)<\max\left\{\max_{2\le j\le k-2}\left\{\sqrt{\delta'_j-1}+\sqrt{\delta'_{j-1}-1}\right\},\sqrt{\delta'_1-1}+1\right\}=\max_{1\le j\le k-2}\left\{\sqrt{\delta'_j-1}+\sqrt{\delta'_{j-1}-1}\right\}.$$

这里记 $\delta'_0 = 2$. 因为 $T$ 是 $T_k$ 的一个导出子图, $\mu_1(T) \le \mu_1(T_k)$ 且 $\lambda_1(T) \le \lambda_1(T_k)$. 因此, (5) 和 (6) 式成立.

因为 $\delta'_j \ge 2$, $j = 1, 2, \ldots, k-2$. 显然

$$\sqrt{\delta'_j - 1} + \delta'_j + \sqrt{\delta'_{j-1} - 1} \le \Delta + 2\sqrt{\Delta - 1}, \quad j = 1, 2, \ldots, k-2. \tag{7}$$

且

$$\sqrt{\delta'_j - 1} + \sqrt{\delta'_{j-1} - 1} \le 2\sqrt{\Delta - 1}, \quad j = 1, 2, \ldots, k-2. \tag{8}$$

文 [2] 中所取根点 $u$ 是最大度点, 即 $d_u = \Delta$, 且 $\delta_1 = \max\{d_v : \mathrm{dist}\,(v, u) = 1\}$. 因此, 除了 $\delta_1 = \Delta$ 之外, 由 (5) 和 (6) 给出的上界比 Stevanović 由 (1) 和 (2) 给出的上界好. 但不论是 $\delta_1 = \Delta$ 还是 $\delta_1 < \Delta$, 上界 (7) 和 (8) 始终比上界 (1) 和 (2) 好.

**例 1** 设 $T$ 一个树, 如图 1. 那么 $\Delta = 3$, $e_w = 4$, $k = 5$, $\delta'_1 = 3$, $\delta'_2 = 2$, $\delta'_3 = 3$, $\delta'_4 = 1$. 取 $w$ 作为根点, 则对应的根树 $T_5$ 如图 2

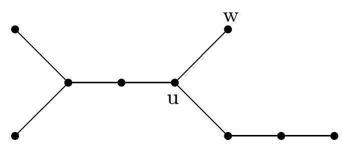


图 1 $T$

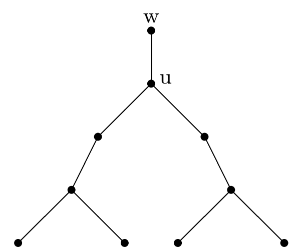


图 2 $T_5$

这里

$$L'_5 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 且 } A'_5 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $\mu_1(T) \le \mu_1(T_5) < 4 + \sqrt{2}$ 且 $\lambda_1(T) \le \lambda_1(T_5) < 1 + \sqrt{2}$. 由 (1) 和 (2) 式给出的上界是 $\mu_1(T) < 3 + 2\sqrt{2}$ 且 $\lambda_1(T) < 2\sqrt{2}$. 如果取最大度顶点之一 $u$ ($e_u$=3) 作为根点, 则对应的根树 $T_4$ 是如图 3

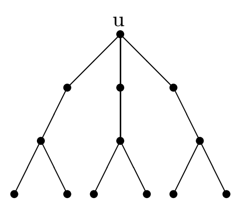


图 3 $T_4$

由 (3) 和 (4) 式给出的上界是 $\mu_1(T) < 4 + \sqrt{2}$ 且 $\lambda_1(T) < 1 + \sqrt{3}$.

## 参 考 文 献

[1] Stevanović D., Bounding the largest eigenvalue of tree in terms of the largest vertex degree, *J. Linear Algebra Appl.*, 2003, **360**: 35–42.

[2] Rojo O., Improved bounds for the largest eigenvalue of trees, *J. Linear Algebra Appl.*, 2005, **404**: 297–304.

[3] Godsil C. D., Spectra of trees, *J. Annals of Discrete Mathematics*, 1984, **20**: 151–159.