第 30 卷第 1 期
2001 年 2 月

信 息 与 控 制
Information and Control

Vol. 30, No. 1
Feb., 2001

文章编号: 1002-0411(2001)01-055-04

时滞线性系统 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$ 稳定性的新判据

张志飞　刘祖润　李仁发
(湘潭工学院信息与电气工程系　湖南湘潭　411201)

摘　要: 提出了 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$ 时滞无关稳定的一个充分条件, 并进而研究了系统在不满足时滞无关稳定条件下, 不稳定特征根的区域范围, 给出了一个与时滞相关稳定的新的充分条件. 文末, 给出了本文结论的示例, 并与已有结果进行了比较, 表明了该方法的有效性和可行性.*

关键词: 时滞线性系统; 稳定性分析; Lyapunov 方法; 矩阵特征值
中图分类号: TP13　　　　文献标识码: B

NEW CRITERIA FOR STABILITY OF $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$

ZHANG Zhi-fei　LIU Zu-run　LI Ren-fa
(*Dept. of Information & Electrical Engineering, Xiangtan Polytechnic University. Xiangtan* 411201)

Abstract: Three new sufficient conditions for delay independent stability of linear systems described by $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$ are proposed in this paper. Further results on the stability under the case that the delay independent conditions are not satisfied are obtained by restricting the regions of unstable eigenvalue. With comparison to the results from references, it shows that the methods is feasible and effective.

Keywords: linear system with delay, stability analysis, Lyapunov method, eigenvalue of matrix

1　引言(Introduction)

由于时滞现象在实际工程中是普遍存在的, 同时, 它又是使得系统不稳定的重要因素, 因此, 对于时滞控制系统的稳定性研究一直受到国内外众多学者的极大关注. 对于时滞控制系统稳定性的研究结果主要有两类: 一类是与时滞大小无关的系统稳定条件[1-7]; 另一类是系统时滞相关稳定的判别准则[8-14]. 与时滞无关的稳定判别准则的主要特点是简洁、实用, 但分析结果往往偏于保守[8]; 而时滞相关的判别条件通常需要设计相应的计算程序, 但分析结果相对严格些, 从而降低了其保守性. 近年来, 不少学者根据系统不稳定特征根的分布而提出的一类时滞相关稳定判别准则[9-14], 一般情况下可以大大改进上述方法存在的保守性[13], 但检验过程繁复, 计算工作量大. 为此, 如何缩小验证的区域, 以减小计算工作量, 同时发挥这些判据的主要优势, 就具有十分重要的理论意义和实用价值.

本文的主要工作是研究系统如果有不稳定的特征根, 由不稳定特征根在复平面上的分布, 给出不稳定特征根更严格的范围. 文中首先提出了线性时滞系统的一个与时滞无关的稳定判别条件, 给出了系统不满足时滞无关稳定判别条件下的时滞相关稳定判据, 进而给出了该判据的完整算法. 理论分析和实例表明, 研究结果优于文[5, 6, 10], 计算工作量小于文[6, 13].

2　引理(Lemma)

考虑下列时滞线性系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau) \tag{1}$$

式中, $A, B\in R^{n\times n}$; $x(t)\in R^n$.

文献[13]给出了系统(1)与时滞无关稳定的充分条件是

$$\|B\| < \frac{\sigma_{\min}(Q^{1/2}}{\sigma_{\max}(Q^{-1/2P)}} \tag{2}$$

式中, $\|\cdot\|$ 为矩阵的范数, $\sigma_{\max}(\cdot)$ 和 $\sigma_{\min}(\cdot)$ 分别是矩阵的最大与最小奇异值, $P\in R^{n\times n}$ 是 Lyapunov 矩阵方程

$$A^{T}P+PA=-2Q \tag{3}$$

的解.

为方便分析, 以下讨论中, 设 $Q=kI$, I 为 $n\times n$

* 收稿日期: 1999-08-31
基金项目: 国家自然科学基金(No. 69974031)和湖南省科研基金(No. 98C055)资助项目

阶单位矩阵, $k \in R^+$, 记

$$H = \begin{vmatrix} Q & -PB \\ -B^TP & Q \end{vmatrix} \in R^{2n\times 2n}$$

定理 1 如果下列条件之一成立, 则系统(1)时滞无关稳定.

(1) 矩阵 H 正定;

(2) 矩阵 $Q-(PBB^TP)^{1/2}$ 正定;

(3) $\|PB\|_2 < \lambda_{\min}(Q)$.

证明 考虑泛函

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^{t} x^T(t)Qx(t)\mathrm{d}t \quad (4)$$

对时间的一阶导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) \\ &\quad - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau) = -x^T(t)Qx(t) \\ &\quad + 2PBx^T(t)x(t-\tau) - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau) \\ &= -\begin{vmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{vmatrix}^T \begin{vmatrix} Q & -B^TP \\ -PB & Q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

(1) 当满足定理条件时, 有 $\dot{V}(t) < 0$, 故系统(1)稳定.

(2) 考虑矩阵 H 的特征多项式

$$F_H(s) = \det(S\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Q & -B^TP \\ -PB & Q \end{vmatrix}) \quad (5)$$

记 Ξ_H 为矩阵 H 的谱, 由于$(sI-Q)$与 PB 是可交换矩阵, 有[17]

$$\begin{aligned}F_H &= \det(\begin{vmatrix} sI-Q & B^TP \\ PB & sI-Q \end{vmatrix}) \\ &= \det((sI-Q)^2 - PBB^TP) \\ &= \det(sI - Q - (PBB^TP)^{1/2}) \\ &\quad \det(sI - Q + (PBB^TP)^{1/2})\end{aligned}$$

因此有

$$\Xi_H = \Xi_{Q+(PBB^TP)^{1/2}} \cup \Xi_{Q-(PBB^TP)^{1/2}} \quad (6)$$

显然

$$s = \lambda | \lambda \in \Xi_{Q+(PBB^TP)^{1/2}} > 0 \quad (7)$$

当 $Q-(PBB^TP)^{1/2}$ 正定时, 有

$$s = \lambda | \lambda \in \Xi_{Q-(PBB^TP)^{1/2}} > 0 \quad (8)$$

所以, $s=\lambda | \lambda \in \Xi_H > 0$, 即 H 正定. 由定理 1 条件 1 知, 系统(1)稳定.

(3) 根据 Minkovski[17]不等式, 有

$$\begin{aligned}2PBx^T(t)x(t-\tau) &< 2\|PB\|_2 \\ &\quad \|x(t)\|\,\|x(t-\tau)\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -x^T(t)Qx(t) + 2PBx^Tx(t-\tau) \\ &\quad - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau) \leqslant -\lambda_{\min}(Q)\|x(t)\|^2 \\ &\quad + 2\|PB\|_2\|x(t)\|\,\|x(t-\tau)\| - \lambda_{\min}(Q) \\ &\quad \|x(t-\lambda)\|^2 \leqslant 2(\|PB\| - \lambda_{\min}(Q)) \\ &\quad \|x(t)\|\,\|x(t-\tau)\| \quad (9)\end{aligned}$$

当定理 1 条件 3 成立时, 有 $\dot{V}(t) < 0$, 故系统(1)稳定. 定理证毕.

注记 1 事实上, $I-(PBB^TP)^{1/2}$正定$\leftrightarrow I-PBB^TP$, 定理 1 的第 2 个条件可改写为: 若矩阵 $I-PBB^TP$ 正定(这里 P 是 $Q=I$ 时, 方程(2)的解), 则系统(1)时滞无关稳定. 这样可避免对矩阵的开方运算.

注记 2 注意到 $\lambda_{\min}(Q) = \lambda_{\min}(Q^{1/2}Q^{1/2}) = \sigma_{\min}(Q^{1/2})$, 又因为, $\|PB\| \leqslant P\|B\|$, 因此定理 1 中的条件 3 降低了文[13]提出的充分条件的保守性.

3 主要研究结果(Main results)

以下主要研究定理 1 不能判断系统稳定性的情形, 即$\|PB\|_2 \geqslant \lambda_{\min}(Q)$时系统的稳定条件.

在给出本文的主要研究结果前, 我们先给出下列引理.

引理[9] 系统(1)一致渐近稳定当且仅当特征方程

$$F(s) = \det(sI - A - Be^{-\tau(y+\alpha)}) = 0 \quad (10)$$

的根位于复平面上的左半开区域里.

定理 2 若 $\lambda_i(A+Be^{-\tau s}) < 0$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 则系统(1)稳定.

其中

$$s = x + j\omega,\ 0 \leqslant x \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant \omega \leqslant \beta(x); \quad (11)$$

$$e^{-\tau x}\|P_1B\|_2 < \lambda_{\min}(Q) \quad (12)$$

α, $\beta(x)$满足

$$\beta(x) = \mu(-jA) + e^{-\tau x}\max_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}\mu(-jBe^{-j\omega\tau})$$

$$0 \leqslant x \leqslant \alpha \quad (13)$$

$$A_1^TP_1 + P_1A_1 = -2Q \quad (14)$$

证明 以下分两部分证明定理 2.

(1) 若系统(1)有不稳定特征根, 则不稳定特征根必位于图 2 所求区域;

(2) 若系统(1)没有位于图 2 所示区域的特征根, 则系统(1)稳定.

Part (1): 考虑特征方程

$$\begin{aligned}F(s) &= F(y+\alpha) = \det(yI + \alpha I - A \\ &\quad - Be^{-\tau(y+\alpha)}) = \det(yI - A_1 - B_1e^{-\tau y}) \quad (15)\end{aligned}$$

式中, $A_1 = A - \alpha I$, $B_1 = Be^{-\tau\alpha}$.

若(12)满足, 由引理 1 有 $\mathrm{Re}(y) < 0$, 因而

$$\mathrm{Re}(s)=\mathrm{Re}(y+\alpha)<\alpha \tag{16}$$

使用矩阵测度的性质[18], 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(s) &= \lambda(A+Be^{-\tau s})\leqslant \\ &\leqslant \mu(jA)+\mu(-jBe^{-j\omega\tau}) \\ &= \mu(-jA)+e^{-\mathrm{Re}(s)\tau}\mu(-jBe^{-j\omega\tau})\end{aligned} \tag{17}$$

由于 $e^{-j\omega\tau}$是周期为 2π 的函数, 故上式又可写为

$$\begin{gathered}\mathrm{Im}(s)=\mu(-jA)+e^{-\mathrm{Re}(s)\tau} \\ \max_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}\mu(-jBe^{-j\omega\tau})=\beta(x), \\ 0\leqslant x\leqslant\alpha\end{gathered} \tag{18}$$

即不稳定特征根必位于图 2 所限定的区域中.

Part (2): 若系统(1)没有位于图 2 所示区域的根, 隐含系统(1)的特征方程的根均位于复平面上的左半开区域内, 由引理知, 系统(1)一致渐近稳定. 定理证毕.

注记 **3**　文献[13]提出系统(1)当 $\|B\|_2>\dfrac{\lambda_{\min}(Q)}{\|P_1\|_2}$时, 系统不稳定的特征根在复平面上的分布区域如图 1 所示, 其中 α'满足

$$e^{-\tau\alpha'}\|B\|_2<\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\|P_1\|_2} \tag{19}$$

由式(12)所确定的最小的 $\alpha_{\min}$为

$$\alpha_{\min}=\frac{1}{\tau}\log\frac{\|P_1\|\ \|B\|}{\lambda_{\min}(Q)} \tag{20}$$

由式(19)所确定的最小的 $\alpha'_{\min}$为

$$\alpha'_{\min}=\frac{1}{\tau}\log\frac{\|P_1\|\ \|B\|}{\lambda_{\min}(Q)} \tag{21}$$

由于 $\|PB\|\leqslant\|P\|\ \|B\|$, 因而 $\alpha_{\min}\leqslant\alpha'_{\min}$, 即本文给出的系统不稳定特征根的区域较文[13]更严格.

注记 **4**　为了确保验证精度, 必须选取足够小的步长(step(α)), 本文给出的研究结果较文[13]可减少验证次数 $\dfrac{1}{\tau\cdot \mathrm{step}(\alpha)}\log\dfrac{\|P_1\|\ \|B\|}{\lambda_{\min}(Q)}$, 对于高阶系统, 减少的计算量更是可观的.

注记 **5**　文[13]除需验证式(11)的情形外, 还须验证文[13]式(21)和式(23), 属于重复验算, 没有必要.

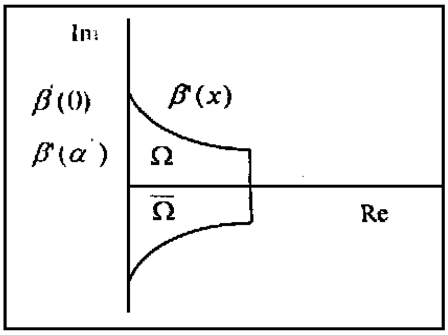

图 1　Tissir[13]为稳定特征根在复平面上的分布

Fig. 1　Distributions of tissir[3] unstable eigenvalue in the comples plane

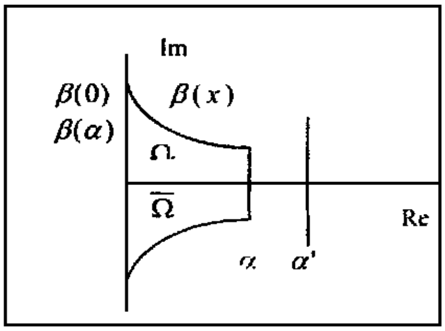

图 2　更严格的不稳定特征在复平面上的分布区域

Fig. 2　Progressive distributing areas of unstable eigenvalue in the comples plane

以下是定理 2 的算法描述.

Step1: 设定待检验的时滞区间[τ_0, τ_m]及各参数变量的步长 step(τ); step(α), step(β);

Step2: $\tau=\tau_0$;

Step3: $\alpha=0$;

Step4: 若 α 已满足式(12)转 Step5; 否则作[$\alpha=\alpha+\mathrm{step}(\alpha)$];

Step5: $x=0$;

Step6: 按式(13)求 $\beta(x)$;

Step7: $y=0$;

Step8: 求 $\lambda_i(A+Be^{-\tau(x+iy)})$, ($i=1,2,\cdots,n$); 若有 $\lambda_i>0$, 转 Step12; 否则求 $\max\limits_i\mathrm{Re}(\lambda_i)$;

Step9: $y=y+\mathrm{step}(\beta)$, 若 $y>\beta(x)$, 转 Step10; 否则转 Step8;

Step10: $x=x+\mathrm{step}(\alpha)$, 若 $x>\alpha$, 转 Step11; 否则跳 Step6;

Step11: $\tau=\tau+\mathrm{step}(\tau)$, 若 $\tau\leqslant\tau_m$, 转 Step3; 否则转 Step12;

Step12: 输出 τ.

4　示例(Illustrative examples)

考虑下列系统[10]

$$\dot{x}(t)=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}x(t)+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}x(t-\tau) \tag{22}$$

根据定理 2 对系统(22)的分析结果见图 3. 下

表并示出了近期对有关该系统的研究结果.

注记 6 本文结果与 Tissir and Hmamed (1996) 的结果相同, 但本文的检验次数要少得多(见图3中的 $\alpha(\tau)$, $\alpha'(\tau)$).

作者	时滞界
Su and Huang (1992)	$\tau\in[0, 0.3063]$
Su et al (1994)	$\tau\in[0, 2.094]$
Tissir and Hmamed (1996)	$\tau\in[0, 2.0944]$
This Paper	$\tau\in[0, 2.0944]$

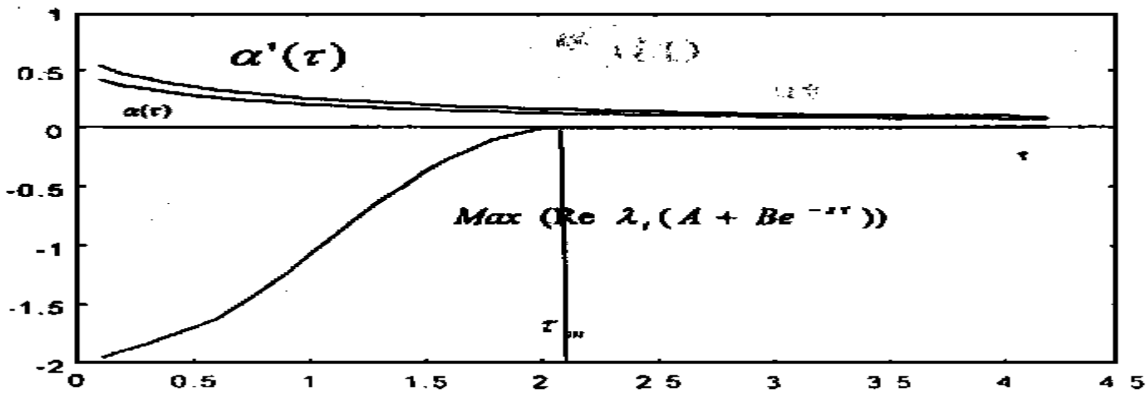

图3 系统(22)最大特征根实部与时滞关系

Fig. 3 Relations between real part of the biggest eigenvalue and time delay

参 考 文 献(References)

1 Hmamed A. On the Stability of Time Delay Systems: New Results. Int. J. Control, 1986a, **43**: 321~324

2 Hmamed A. Stability Conditions of Delay Differential Systems: New Results. Int. J. Control, 1986b, **46**: 455~463

3 Hmamed A. Further Resuktd on the Delay Independence Asymptotic Stability of Linear Systems. Int. J. Syst. Sci., 1991, **22**: 1127~1132

4 Kamen E W. Correction to Linear Systems with Commensurate Time Delays: Stability and Stabilization Independent of Delay. IEEE Trans. Autom. Control, 1983, AC-28: 248~249

5 Mori T, Fukuma N, Kuwahara M. On an Estimate of the Decay Rate for Stable Linear Delay Systems. Int. J. Control, 1982, **36**: 95~97

6 Su J H, Fong I K, Tsen C L. Stability Analysis of Linear System with Time Delay. IEEE Trans. Autom. Control, 1994, AC-39: 1341~1344

7 Tissir E, Hammed A. Sufficient Stability Conditions of Interval Time Delay Systems. Adv. Modeling Anal., 1992, C45: 1~16

8 Mori T. Criteria for Asymptotic Stability of Linear Time Delay Systems. IEEE Trans. Autom. Control, 1985, AC-30: 158~161

9 Mori T, Kokame H. Stability of $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau)$. IEEE Trans. Autom. Control, 1989, AC-34: 460~462

10 Su I J, d Huang C G. Robust Stability of Delay Dependence for Linear uncertain Systems. IEEE Trans. Autom. Control, 1992, AC-37: 1656~1659

11 Xu B, Liu Y. An Improved Razumikhin-type Theorem and its Application. IEEE Trans. Autom. Control, 1994, AC-39: 839~841

12 Walton K, Marshall J E. Direct Method for TDS Stability Analysis. IEE Proc. PtD, 1987, **134**: 101~107

13 Tissir E, Hmamed A. Further Results on Stability of. Autom., 1996, **32**(12): 1723~1726

14 Wang S S. Further Results on Stability of. Syst. Control Lett., 1992, **19**: 165~168

15 Chen Jie, Xu Demin, Bahram Shafai. On Sufficient Conditions for Stability Independent of Delay. IEEE Trans. Autom. Control, 1995, **40**(39): 1675~1680

16 Patel RV, Toda M. Quantitative Measures of Robustness for Mutivariable System. Proc. Amer. Contr. Conf., San Francisco, CA, TP8-A, 1980

17 黄 琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京: 科学出版社, 1984. 496

18 Desoer C A, Vidyasagar M. Feedback Systems: Input-Output Properties. New York: Academic Press, 1975

作者简介

张志飞(1963-), 男, 博士, 副教授. 研究领域为非线性控制.

刘祖润(1952-), 男, 学士, 教授. 研究领域为时滞系统控制, 运动控制系统.

李仁发(1957-), 男, 博士, 教授. 研究领域为智能控制, 信号处理.