

文章编号: 1002-0411(2001)04-318-04

由倍周期分叉走向混沌的 Logistic Map 及其控制器设计

王晓华 敬忠良 姚晓东 邹俊忠

(上海交通大学航空航天信息与控制研究所, 电子信息学院 上海 200030)

摘要: 详细讨论了 Logistic Map 映射由倍周期分叉走向混沌的过程, 并根据离散系统 Devaney 混沌定义(以 $\mu=4$ 为例)证明该映射确实发生了混沌, 最后基于反馈方法提出了一种简单实用的混沌控制方法. 无论对于定值控制, 还是随动控制, 仿真结果表明本文提出的控制方法都优于文献[1]提出的逆系统方法。

关键词: 倍周期分叉; 混沌; 反馈控制

中图分类号: TP13

文献标识码: B

LOGISTIC MAP OF PERIOD-DOUBLING BIFURCATION LEADING TO CHAOS AND ITS CONTROLLER DESIGN

WANG Xiao-hua JING Zhong-liang YAO Xiao-dong ZOU Jun-zhong

(Institute of Aerospace Information and Control, School of Electronics and Information Technology, Shanghai Jiao Tong University)

Abstract: The period-double bifurcation leading to chaos of Logistic map is discussed in detail. The chaos behavior of Logistic Map for $\mu=4$ is proven according to the chaos definition of Devaney for discrete system. A simple chaos control method is presented based on the feedback control principle. The results of simulation show that the performance of the presented chaos control method is better than that of the inverse system method in [1] whether to constant control or to following control.

Keywords: period-double bifurcation, chaos, feedback control

1 引言(Introduction)

混沌是本世纪 60 年代开始、近几十年来急剧兴起的一门学科, 被誉为继相对论、量子论之后又一重大发现^[1]. 它揭示了自然界及人类社会中普遍存在的复杂性、有序与无序的统一、确定性与随机性的统一, 大大加深了人们对大自然的理解^[8]. 特别是 90 年代以来, 人们认识到混沌是可以利用和控制的, 并开展了大量利用和控制混沌的研究. 混沌科学开始与其它科学相互渗透, 在现代科学技术中起着十分重要的作用.

没有外界随机因素作用、用决定论方法描述的非线性系统, 由于内在随机性而出现的“无规”运动称为混沌现象. 人们已经发现从有序运动转变为混沌的三种普遍方式: 倍周期分叉、阵发混沌、准周期失稳. 混沌控制则是近十年来的事情, 由于混沌的非线性动态复杂性, 对于初始条件和扰动极为敏感, 现有的理论方法对混沌系统来说并不是很有效; 再者,

传统的控制理论总是希望抑制或镇定令人不快的混沌现象, 因而对一般情形下如何控制和利用混沌并未给予更多的注意.

本文首先研究了 Logistic Map 从倍周期分叉走向混沌的过程, 然后基于反馈原理提出了一种简单实用的控制方法, 并与文献[1]提出的逆系统方法进行了比较, 仿真结果表明本文提出的算法简单实用、性能优越.

2 Logistic Map 由倍周期分叉走向混沌的过程(The course of period-doubling bifurcation leading to chaos with regard to logistic map)

Logistic Map 方程:

$$x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

下面分四种情况考虑:

(1) $0 < \mu < 1$

此时, 对于任何初值 $x_0 \in (0, 1)$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 终

值 $x_k \rightarrow 0$, 如图 1 所示.

(2) $1 \leq \mu < 3$

在此参数范围内, 对于任何初值 $x_0 \in (0, 1)$, 可以观察到当 $k \rightarrow \infty$ 时, 终值 $x_k \rightarrow$ 一个稳态值, 如图 2 所示.

(3) $3 \leq \mu < 3.449$

此时, 对于任何初值 $x_0 \in (0, 1)$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 终值 $x_k \rightarrow$ 周期 2 循环, 当如图 3 所示, 可以观察到周期 2 循环序列, 即 $x_k = \{ \dots, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(1)}, x^{(2)} \dots \}$.

(4) $3.449 \leq \mu \leq 4$

随着 μ 值的增大, 当 $k \rightarrow \infty, x_k \rightarrow$ 周期 2^n 循环,

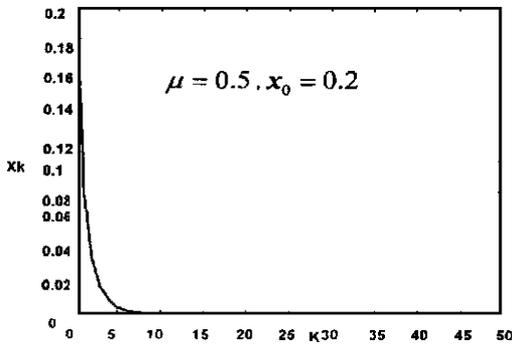


图 1 $\mu = 0.5$ 时 Logistic Map 收敛轨迹

Fig. 1 Converging orbit of logistic map when $\mu = 0.5$

其中 $n > 0$ 且 $\rightarrow \infty$; 当 $\mu = 4$ 时, 可以观察到混沌现象, 如图 4 所示. 倍周期分叉轨迹如图 5 所示, 在该图中, 还可以观察到更有趣的自相似性.

对于混沌现象, 目前还没有统一的数学定义, 但比较常用的是 Devaney 1987 年提出的离散系统的混沌定义. Devaney 混沌定义^[2]:

对于映射 $M: S \rightarrow S$, 这里 S 是非空有界紧集, 如果满足以下三个条件:

- (1) 映射对于初始条件敏感;
 - (2) 它是拓扑传递的;
 - (3) 它有一条周期轨道稠集;
- 则说 M 是混沌的.

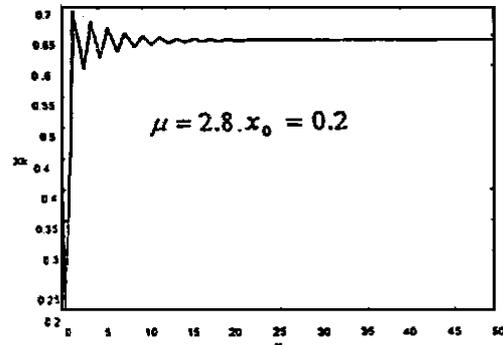


图 2 $\mu = 2.8$ 时 Logistic Map 收敛轨迹

Fig. 2 Converging orbit of logistic map when $\mu = 2.8$

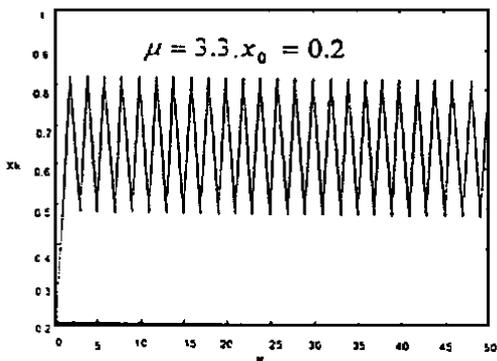


图 3 $\mu = 3.3$ 时 Logistic Map 周期 2 轨迹

Fig. 3 Period-2 orbit of logistic map when $\mu = 3.3$

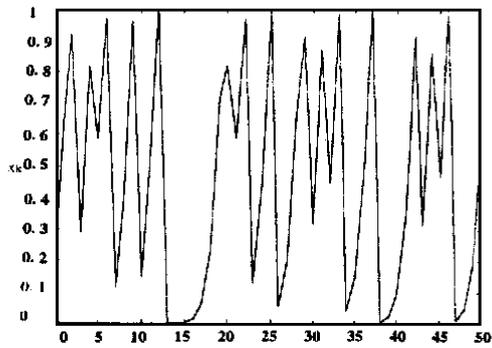


图 4 $\mu = 4$ 时 Logistic Map 混沌轨迹

Fig. 4 Chaos orbit of logistic map when $\mu = 4, x_0 = 0.2$

现在我们按上述混沌定义验证 Logistic Map 的确产生了混沌, 取 $\mu = 4$, 即有

$$x_{k+1} = 4x_k(1 - x_k) \tag{2}$$

上式与 $x_{k+1} = 2x_k$ (模为 1) (3)

是等价的, 因为它们具有相同的解:

$$x_k = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi 2^k y_0)) \tag{4}$$

其中 $y_0 = \frac{1}{2\pi} \cos^{-1}(1 - 2x_0)$ (5)

根据上述 Devaney 混沌定义有:

(1) 式(3)的 Lyapunov 因子 $\lambda = \ln 2 > 0$, 即

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln 2^k = \ln 2 \tag{6}$$

由于它的轨道是指数类型: $x_k \sim e^{(\ln 2^k)}$, 因此 Logistic Map 对于初始条件敏感.

(2) 由于模取为 1, 所以式(3)等价于如下单位圆上的双角映射:

$$\angle x_{k+1} = 2\angle x_k \tag{7}$$

这里 \angle 表示角度, x_0 是单位圆上的初始点.

数 2 不是 π 的整数倍, 很明显对于任何圆上非空的开区间 S , 迟早有 $x_k \in S$. 因此, 倍角映射是拓扑传递的, 因而映射 Logistic Map 也是拓扑传递的.

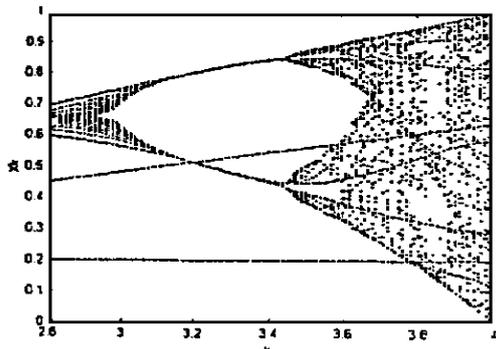


图5 Logistic Map 倍周期分叉图

Fig. 5 Period-double bifurcation of logistic map

(3) 由于映射(7)以 2π 为周期, 因而有:

$$\begin{aligned} \angle x_{k+1+n} &= 2^n \angle x_k \pm 2m\pi \\ m, n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

设 $k \rightarrow \infty$ 时, 可选择一对固定的搭配 (n, m) , 使这个方程产生固定点 $\angle x^*$, 使得:

$$\begin{aligned} \angle x^* &= 2^n \angle x^* \pm 2m\pi \\ m, n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

这样 $m = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1; n = 1, 2, \dots$ (10)

因此, 映射有无限多个不同周期的周期轨道, 而且都在单位圆上. 此外, 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 可以看到这些周期点变成单位圆上的稠集. 对于 Logistic Map 映射也是如此.

总之, Logistic Map 映射完全满足 Devaney 1987 年提出的离散系统的混沌定义中的三个条件, 即随着参数 μ 的增大, Logistic Map 由倍周期

分叉走向混沌.

3 混沌控制器设计 (Design of chaos control)

以式(2)中 $\mu = 4$ 为例, 我们知道此时 Logistic map 已经由倍周期分叉走向了混沌, 它的一个不动点为 0.

文献[1]指出采用逆系统方法有:

$$S^{-1}: u_k = x_{k+1} - 4x_k(1 - x_k) \quad (11)$$

在逆系统方法中, 对于控制目标 $\{r_k\}$, 一般设动态特性满足:

$$x_{k+1} + ax_k = r_k \quad (12)$$

但文献[1]数值仿真指出预期方程(12)设计的系统并不能满足控制混沌序列 $\{x_k\}$ 的需要, 而应将(12)改写为:

$$x_{k+1} + ax_k = r \quad (13)$$

相应的控制器为:

$$u_k = r_{k+1} + ar_k - ax_k - 4x_k(1 - x_k) \quad (14)$$

系统的控制结构如图 6 所示. 通过 150 次迭代消除初值效应, 再施加控制作用可取得了预期的控制效果. 仿真曲线如图 8 所示.

本文设控制目标为:

$$r_k = f(k) \quad (15)$$

当达到了控制目标时

$$r_{k+1} = x_{k+1} \quad (16)$$

$$u_k = r_{k+1} - 4x_k(1 - x_k) \quad (17)$$

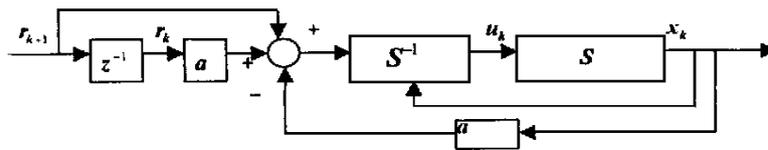


图6 逆系统方法控制结构图

Fig. 6 The control structure of inverse system method

这样可以得出另一种控制结构如图 7 所示. 此时系统只要一拍就可跟踪上控制目标, 但却会带来很大的振荡, 为避免振荡对系统带来的不良影响, 可以对控制目标作如下处理:

$$r_k = r^* (1 - e^{-\alpha k T}) \quad (18)$$

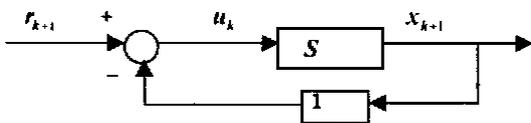


图7 反馈方法系统控制结构图

Fig. 7 The system structure of feedback control method

其中 $1 - e^{-\alpha k T}$ 为平滑因子. 改变 α 的值可以获得不同的平滑性能.

下面来考察两种情况下系统的控制性能(取 $\alpha = 1$).

(1) 设 $r = 1$ 为一常量, 其数值仿真如图 9 所示.

图 9 与图 8 对比可知, 反馈控制方法不必消除初始值效应, 在迭代到 25 步时已非常接近控制目标, 收敛速度比逆系统方法快很多, 且算法也要简单一些.

(2) 设 $r = t$ 为斜坡函数, 其数值仿真图如图 10 和图 11 所示.

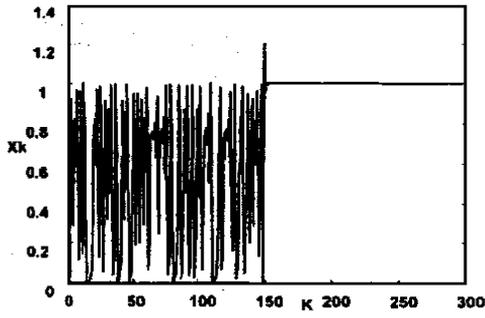


图 8 逆系统方法定值控制曲线

Fig. 8 Constant control of inverse system method

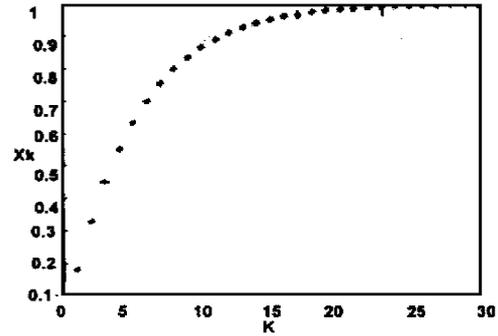


图 9 有平滑因子时反馈定值控制曲线

Fig. 9 Constant control of feedback method with smoothing factor

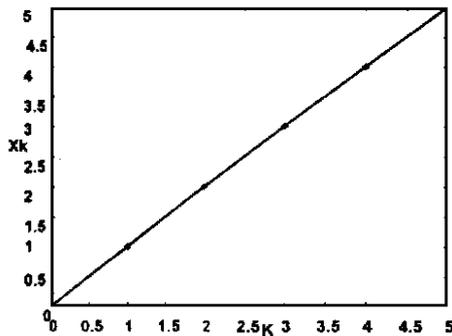


图 10 无平滑因子时系统的斜坡跟踪曲线

Fig. 10 Slope track of system without smoothing factor

从图 10- 11 可以看出, 无平滑因子时, 加入控制后, 过了一个采样周期(这里取为 0.2s), 系统就达到控制目标. 加入平滑因子后, 系统逐渐地过渡到控制目标. 由于实际的过程都是渐变的, 所以后一种情况更为合理.

4 结束语(Conclusion)

本文详细研究了 Logistic Map 从有序到混沌的迭代归宿情况, 说明了倍周期分叉走向混沌的过程, 并提出了一种混沌控制算法, 给出了计算机仿真结果. 仿真表明, 本文提出的控制算法不需要消除初值效应, 可直接施加控制, 收敛速度快, 加入平滑因子后避免了系统的震荡, 其性能优于文献[1]提出的逆系统控制方法.

参 考 文 献 (References)

- 1 陈立群, 戈新生, 混沌的非线性控制, 科技通报, 1996, 13(3): 156 ~ 158
- 2 Guanrong Chen, Control and Anti- Control of chaos, Lecture Notes, University of Houston and City University of Hong Kong, June, 2000

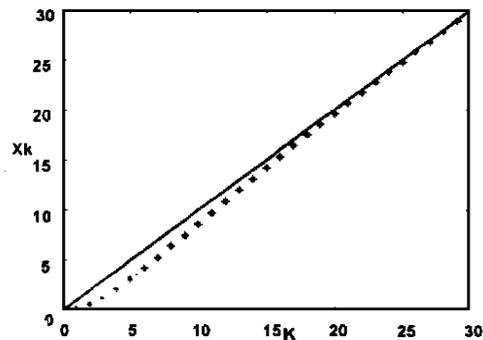


图 11 有平滑因子时系统的斜坡跟踪曲线

Fig. 11 Slope track of system with smoothing factor

- 3 杨晓松. 论混沌系统的行为及其控制特征. 重庆邮电学院学报, 1999, 13(3): 15~ 17
- 4 易丽沙等. 工科物理中介绍“混沌与分形”的认识与实践. 1998, 17(1): 46~ 48
- 5 王兴元, 朱伟勇. 二维 Logistic 映射中混沌与分形的研究. 中国图象图形学报, 1999, 4(4): 340~ 344
- 6 E. N. Lorenz 著, 刘式达等译. 混沌的本质. 气象出版社, 1997
- 7 唐 芳, 邱 琦. 混沌系统的辅助参考反馈控制. 物理学报, 1999, 5(5): 802~ 807
- 8 李勤学, 王万良, 许维胜, 徐立鸿, 吴启迪. 混沌及其控制研究进展. 机电工程, 1999, (5): 56~ 59
- 9 田 心, 杨福生. 混沌控制及其在生物医学中应用前景. 国外医学生物医学工程分册, 1999, 2(5): 257~ 262
- 10 钟晓敏, 方建安, 邵世煌. 混沌系统的一种自学习模糊控制. 信息与控制, 1998, 27(6): 475~ 478

作者简介

王晓华(1975-), 男, 博士研究生. 研究领域为智能信息融合与控制、红外被动式跟踪与多传感器数据融合.

敬忠良(1960-), 男, 国家教育部“长江学者奖励计划”特聘教授、博导、上海交通大学航空航天信息与控制研究所所长. 研究领域为随机控制、目标跟踪、智能信息融合与控制.

姚晓东(1970-), 男, 博士、上海交通大学博士后. 研究领域为信号处理、图像处理、智能信息融合与控制.