文章编号 :1002-0411(2004) 06-0656-04

求解不等圆布局问题的一类遗传算法

徐荣武 , 封汉颍 , 郝飞龙 , 孙冀辉
(中国人民解放军军械工程学院基础部 , 河北 石家庄 050003)

摘 要 :在已有求解不等圆布局问题算法的基础上 ,根据问题特点提出了一类遗传算法 ,通过将拟物方法与标准遗传算法结合使用 ,较好地解决了对布局优化函数进行全局最优求解的问题 . 最后通过实例计算验证了本算法的有效性 .*

关键词 :布局问题 ; 拟物方法 ; 遗传算法 ; 不等圆
中图分类号 :TP18　　　　文献标识码 :A

A Genetic Algorithm for Solving Unequal Circles Packing Problem

XU Rong-wu , FENG Han-ying , HAO Fei-long , SUN Ji-hui
(*Preps Department , Ordnance Engineering College , Shijiazhuang 050003 , China*)

Abstract : The authors bring forward a genetic algorithm for solving unequal circles packing problem based on the existing algorithms and the characteristics of the problem . The algorithm can find the global optimal value of the packing-optimization function by combining the quasi-physical algorithm and standard genetic algorithm . Finally , it is proved by several typical instances that the algorithm is effective .

Keywords : packing problem ; quasi-physical algorithm ; genetic algorithm ; unequal circles

1 引言 (Introduction)

布局问题(Packing Problem) 就是要把一些物体按一定的要求合理地放置在一个空间内 ,称物体为布局物体(或布局块) ,空间为布局容器 .从布局问题的上述定义可以看出 :它是由布局容器 、布局物体及其相互之间的关系和要求组成的 .这些关系 、要求都可认为是布局的约束 .当所有的布局约束都被满足时 ,布局问题才算得到解决 .

2 问题的提出 (Problem presentation)

所谓不等圆布局问题是指 :假设已知一个圆形的空盒子 (容器) ,另外又已知一些不同的圆饼 ,问能否将这些圆饼互不重叠地放进空盒子中去 (图 1) .此问题更形式化的表达如下 :对于任意给定的正整数 M 和任意给定的 $M+1$ 个正实数 $R_0 , R_1 , \cdots , R_M$,问是否存在 $2M$ 个实数 $x_1 , y_1 , \cdots , x_M , y_M$,使得对于 $1 ,2 , \cdots , M$ 中任意的正整数 i 有 :

$$\sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leqslant R_0 - R_i \tag{1}$$

对于 $1 ,2 , \cdots , M$ 中任意两个不同的正整数 i 、j 有 :

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \geqslant R_i + R_j \tag{2}$$

如果存在 ,则要具体给出一组合乎条件的实数 .

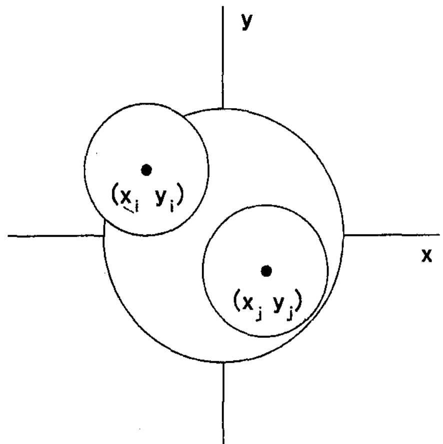

图 1 不等圆布局问题图例

Fig .1 Example of unequal circles packing problem

该问题属于 NP 完全问题 ,即当规模到达一定程度时 ,在合理的时间范围内无法求得其精确最优解 .人们研究了大量的启发式方法 ,以求得它的近似最优解 .其中 ,应用优化方法求解布局问题是一种重

* 收稿日期 :2004 - 06 - 06

要的思路,即用数学优化模型来描述布局问题,将布局问题转化为复杂函数的全局优化问题,例如:黄文奇等的求解布局问题的拟物算法[1,2],滕弘飞等的卫星舱布局非同胚拓扑模式优化算法[3,4],戴佐等的三维实体布局八叉树语言及优化算法[5],Szykman等的三维元件布局的模拟退火算法[6].

传统的优化算法对于求解凸函数的局部最优点非常有效,但是对于求解布局优化函数这样的复杂病态非凸函数的全局最优点就无能为力.另一方面,用确定性的优化算法求NP完全问题的最优解,需要的计算时间与问题的规模之间是指数关系.此时,对于大规模问题,由于计算时间的限制,往往难以得到问题的最优解;而用近似算法求得的解的质量较差.因此,优化算法的全局寻优能力和计算效率成为解决问题的关键.

3　问题分析及算法描述(The analysis of the problem and description of the algorithm)

3.1　拟物算法

所谓拟物即是找到与原始数学问题等价的物理世界并观察这个世界中物质运动的生动形象,然后从中受到启发以求解数学问题[1].拟物算法即是将圆饼想象为光滑的弹性实体,将圆盘也想象为内空外实的光滑弹性实体.在初始时刻这些想象圆饼与圆盘互相挤缩地相处在一起,它们互相之间存在着挤压弹性力的相互作用.如果布局问题客观上有解,则这 N 个弹性圆饼中的每一个在周围各弹性体所给予的弹性力的驱使之下都会发生一系列的运动,从而各圆饼最终都会达到自己的合适位置,即各圆饼处于圆盘内部且互不嵌入.因而布局问题事实上得到了解决.

不等圆布局问题的最终状态在拟物算法中即是使系统的弹性势能 U 为0的解,U 的具体表达式为:

$$U = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=i+1}^{M} U_{ij} \tag{3}$$

其中
$$U_{0j} = \begin{cases} \left(\sqrt{x_j^2 + y_j^2} + R_j - R_0\right)^2, & \text{当 } \sqrt{x_j^2 + y_j^2} > R_0 - R_j \\ 0, & \text{当 } \sqrt{x_j^2 + y_j^2} \leqslant R_0 - R_j \end{cases}$$

$$U_{ij} = \begin{cases} \left[R_i + R_j - \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right]^2, & \text{当 } \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} < R_i + R_j \\ 0, & \text{当 } \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \geqslant R_i + R_j \end{cases}$$

3.2　遗传算法

对于最优化问题,目标函数和约束条件种类繁多,有的是线性的,有的是非线性的;有的是连续的,有的是离散的;有的是单峰值的,有的是多峰值的.随着研究的深入,人们逐渐认识到在很多复杂情况下要想完全精确地求出其最优解既不可能,也不现实,因而求出其近似最优解或满意解是人们的主要着眼点之一.随着问题种类的不同,以及问题规模的扩大,要寻求到一种能以有限的代价来解决上述最优化问题的通用方法仍是一个难题.而遗传算法却为解决这类问题提供了一个有效的途径和通用框架.

遗传算法是模拟生物在自然环境中的遗传和进化过程而形成的一种自适应全局优化概率搜索算法.遗传算法在空间规划领域中的应用刚刚开始,不等圆布局问题为NP完全问题,而遗传算法本身的鲁棒性、并行性以及在NP完全问题求解中的广泛应用表明,遗传算法是解决此类问题的有效途径.

3.3　算法的描述

3.3.1　算法的思想

单纯的利用拟物算法求解不等圆布局问题往往会陷入局部最优,其原因在于布局优化函数是复杂病态非凸的.传统的优化方法(如梯度法等)在求解函数的局部最优点时非常有效,但是对于布局函数这样的分片光滑连续的复杂函数的全局最优求解就无能为力了.尽管人们研究了大量的技巧和策略来跳离局部最优[7],但是都不能从根本上保证得到全局最优解.而标准遗传算法在采用最优保存策略后能够以概率1收敛到全局最优解[7].这就启发我们结合使用拟物算法和遗传算法来求解不等圆布局问题,即首先利用拟物算法建立模型,给出优化函数(即势能函数),再利用遗传算法对优化函数进行全局最优求解.

3.3.2　具体步骤

(1)编码策略

传统的二进制编码存在着缺点,如相邻数的编码可能具有较大的Hamming距离,连续函数离散化时有精度映射误差,求解高维高精度优化问题时二进制编码将非常之长,从而使算法的搜索效率很低,所以本算法采用浮点编码,编码向量为 $V=(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_M, y_M)$.

(2)适应度函数

在进化初期,通常会出现一些适应度超常的染色体,若按比例复制,这些异常的染色体可能在种群中占据较大的比例,由于其竞争力突出从而可能控制选择过程,进而影响算法的全局优化性能,出现早熟现象.因此本算法采用基于序的评价函数.假设目前该代中的染色体为 $V_1, V_2, \cdots, V_{pop\_size}$,决策者可以给出一个序的关系,使染色体由好到坏进行重排,也就是说,一个染色体越好,其序号越小.设参数 $\alpha \in (0,1)$ 给定,定义基于序的评价函数为:

$$eval(V_i) = \alpha(1-\alpha)^{i-1}, \quad i = 1,2,\cdots,pop\_size$$

$i=1$ 意味着染色体是最好的,$i = pop\text{-}size$ 说明是最差的.

(3) 选择算子

选择过程是以旋转赌轮 pop_size 次为基础的.对每个染色体 V_i,计算累计概率 q_i:

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ q_i = \sum_{j=1}^{i} eval(V_j), \quad i = 1,2,\cdots,pop\_size \end{cases}$$

再从区间 $(0, q_{pop\text{-}size}]$ 中产生一个随机数 r,若 $q_{i-1} < r \leqslant q_i$,则选择第 i 个染色体 $V_i (1 \leqslant i \leqslant pop\_size)$.重复以上步骤 pop_size 次,这样可以得到 pop_size 个复制的染色体.

(4) 交叉算子

设参与交叉操作的父代染色体为 (V_1', V_2') 首先从开区间 $(0,1)$ 中产生一个随机数 c,然后,按下列形式在 V_1' 和 V_2' 之间进行交叉操作,并产生两个后代 X 和 Y:

$$X = cV_1' + (1-c)V_2', \quad Y = (1-c)V_1' + cV_2'$$

(5) 变异算子

本算法采用的是改进的高斯变异:这种变异算子最初是在演化策略中首先使用的,后来,演化规划也以它作为主要的搜索算子,重点搜索原个体附近的某个局部区域.用 $V = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示父代染色体,假定有 12 个 $(0,1)$ 分布的随机数 $r_i, i = 1,2,\cdots,12$,则服从 $N(0,\sigma)$ 的随机数依下式获得:

$$R = \sigma\left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6\right),\text{令 } \sigma = \frac{1}{6},\text{则新的基因值 } x_i' = x_i + \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6\right).$$

(6) 最优保存策略

最优保存策略的具体操作过程是:

a) 找出当前群体中适应度最高的个体和适应度最低的个体;

b) 若当前群体中最佳个体的适应度比总的迄今为止的最好个体的适应度还要高,则以当前群体中的最佳个体作为新的迄今为止的最好个体;

c) 用迄今为止的最好个体替换掉当前群体中的最差个体.

最优保存策略可视为选择操作的一部分.该策略的实施可保证迄今为止所得到的最优个体不会被交叉、变异等遗传运算所破坏,它是遗传算法收敛的重要保证条件.

(7) 终止准则

以进化代数达到一个给定的上界 T 作为收敛准则,若未达到上界即已得出布局方案,则提前终止.

4 实例测试及评述 (Examples and comments)

我们利用 Matlab V6.5 编制程序,对 5 个具体算例(见下表)进行了计算,每个算例都进行 10 次计算,均获得了成功.这里选的都是空间很紧张的情况.

表 1 实例测试数据

Tab.1 The test data of examples

序号	圆饼个数	圆饼半径	圆盘半径	运算次数	布局成功次数
1	7	20,20,20,20,20,20,20	60	10	10
2	16	21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36	132.8	10	10
3	15	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15	39.37	10	10
4	10	50,40,32,31.5,20,20,20,11,10,10	100	10	10
5	17	25,20,15,15,10,10,10,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5	50	10	10

相应计算结果的布局图见图 2 ~ 图 6:

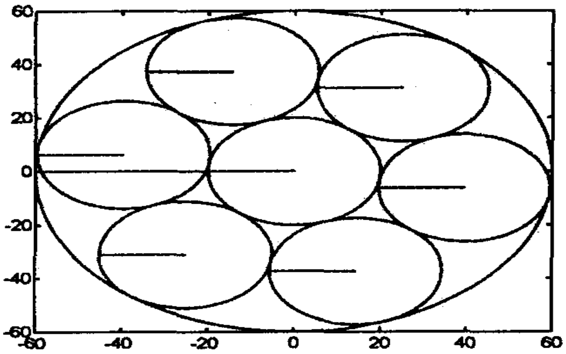

图 2　实例 1

Fig .2　Example 1

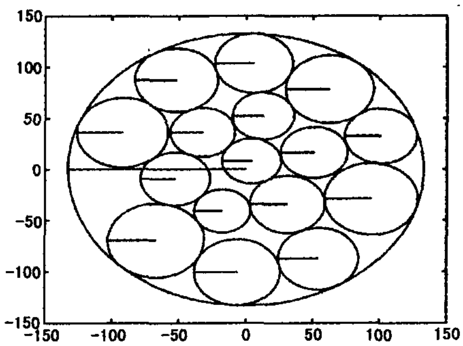

图 3　实例 2

Fig .3　Example 2

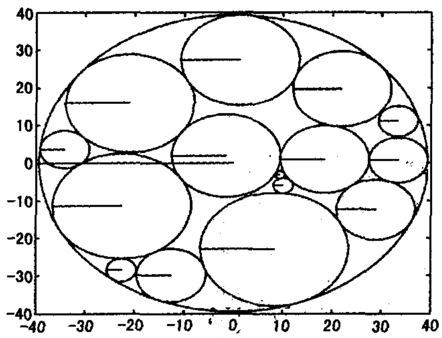

图 4　实例 3

Fig .4　Example 3

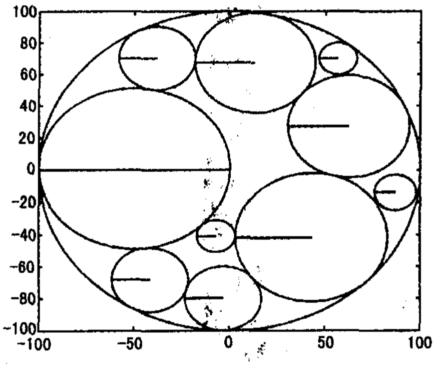

图 5　实例 4

Fig .5　Example 4

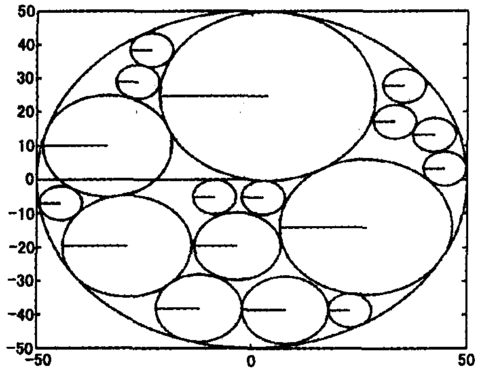

图 6　实例 5

Fig .6　Example 5

5　结语(Conclusion)

本文提出了一类求解不等圆布局问题的遗传算法,通过将拟物方法与标准遗传算法结合使用,较好地解决了对布局优化函数进行全局最优求解的问题.

本文算法可推广应用于圆柱状货物装载、光缆内光纤布局等领域.

参　考　文　献(References)

[1] 黄文奇,詹叔浩,等.求解 Packing 问题的拟物方法[J].应用数学学报,1979,2(2):176~180.

[2] 黄文奇,李庆华,余向东.求解空间 Packing 问题的拟物方法[J].计算机学报,1986,9(4):443~453.

[3] 滕弘飞,刘义军,等.旋转锥体空间中圆柱体群的布局优化[J].计算机学报,1993,16(7):519~525.

[4] 滕弘飞,孙守林,等.旋转舱内圆柱体及长方体群布局优化[J].大连理工大学学报,1993,33(3):303~309.

[5] 戴　佐,查建中.三维实体布局的八叉树语言及优化算法[J].计算机辅助设计与图形学学报,1996,8(1):61~67.

[6] Szykman S, Cagan J. Constrained three dimensional component layout using simulated annealing[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1997, 119(1):28~35.

[7] 黄文奇,许如初.支持求解圆形 Packing 问题的两个拟人策略[J].中国科学(E辑),1999,29(4):347~353.

[8] 周　明,孙树栋.遗传算法理论与应用[M].北京:国防工业出版社,1999.

作者简介

徐荣武(1980-),男,硕士研究生.研究领域为军事运筹学基本理论,组合优化问题.