第 29 卷第 1 期 信 息 与 控 制 Vol. 29, No. 1
2000 年 2 月 Information and Control Fed. , 2000

文章编号: 1002-0411(2000)01-055-04

非线性相似组合系统的渐近稳定

李忠海 王 征 张嗣瀛
(东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110006)

摘 要: 本文对一类具有相似性的不确定非线性组合系统设计了鲁棒控制器. 对不确定性只要求一个已知的可能函数界, 互联的强度由非减函数限制, 减弱了对互联项的要求. 我们利用系统本身的相似性, 简化了设计过程. 所得控制器保证系统的渐近稳定性.

关键词: 非线性系统, 相似系统, 分散鲁棒控制, 渐近稳定
中图分类号: TP13 文献标识码: A

1 引言

研究一般非线性系统的鲁棒控制问题的难度是很大的. 利用系统的特殊结构简化控制器的设计过程已成为大系统控制的主要研究方法之一. 杨光红[1]等人研究了一类对称组合系统的分散控制问题. 严星刚[2]等人利用相似性研究了一类具有相似结构系统的鲁棒分散控制和全息控制问题. 对不确定性的研究, 包括参数不确定和外部干扰不确定性, 已经成为现代控制领域的研究热点. 主要是利用不确定性的可能界和结构性质, 实现鲁棒性. Shu et al[3]提出了互联项的指数界. *Chen* 和 *Pandey*[4]提出了二阶多项式函数界. *M. C. Han* 和 *Y. H. Chen*[5]提出了非减函数界, 并提出了对强互联系统的研究提出了使系统实际稳定的鲁棒控制器.

本文利用系统的相似结构, 研究了一类非线性组合系统的鲁棒控制问题. 该系统的不确定性可以是时变的, 互联的界为一类连续函数. 我们利用非线性反馈控制器, 保证系统的渐近稳定.

2 系统描述

考虑如下不确定非线性组合系统:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, f) + \Delta f_i(x_i, \sigma_i, t) + [B_i(x_i, t) + \Delta B_i(x_i, \sigma_i, t)]u_i + g_i(x, \sigma_i, t) \tag{1}$$

其中 $i=1,2,\cdots,N$, $x_i \in R^n$, $u_i \in R^m$ 是第 i 个系统的状态和输入, $\sigma_i(t) \in R^{s_i}$ 是不确定参数, $g_i(x, \sigma_i, t)$ 是子系统间的互联项, 未知函数 $\sigma_i(t): R \to \Omega_i$ 是 Lebesque 可测的, Ω_i 为 R^{s_i} 中的已知紧集, $f_i(\cdot, \cdot): R^n \times R \to R^n$, $B_i(\cdot, \cdot): R^n \times R \to R^n$ 是已知的连续函数, 未知函数, $\Delta f_i(x_i, \sigma_i, t): R^n \times \Omega_i \times R \to R^n$, $\Delta B_i(x_i, \sigma_i, t): R^n \times \Omega_i \times R \to R^n$, 及互联函数 $g_i(x_i, \sigma_i, t): R^{n \times n} \times \Omega_i \times R \to R^n$ 对 t 是 Lebesgue 可测的, 对其他分量是连续的.

我们对系统提出如下假设:

假设 1 系统的标称系统为相似组合系统, 即存在同胚变换 $z_i = \varphi_i(x_i)$ 和反馈控制, $u_i = \alpha_i(x_i, t) + \beta_i(x_i, t)v_i$, 使每个孤立标称子系统都可变成如下形式:

◦ 收稿日期: 1999- 08- 12
基金项目: 国家自然科学基金(69774005), 国家攀登计划基金和国家教委博士点基金

$$\dot{x}_i = f(v, t) + B(z_i, t)v_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2}$$

注 1 此假设中的定义来源于文[2], 其中$(\varphi_i, \alpha_i, \beta_i)$为第 i 个子系统的相似参量. 它是简化控制器设计过程的基础.

假设 2 系统(2)渐近稳定, 即存在状态反馈 $v_i = u_{i1}(z_i, t)$，使

$$\dot{x}_i = f(z_i, t) + B(z_i, t)v_i = \bar{f}(z_i, t) \tag{3}$$

渐近稳定, 且存在非减函数 γ_l, $l = 1, 2, 3$, 和正定函数 $V(z_i, t)\,\forall\,(z_i, t) \in R^n \times R^+$，使

$$\gamma_l(0) = 0 \qquad l = 1, 2, 3 \tag{4}$$

$$\gamma_1(\|z_i\|) \leqslant V(z_i, t), \leqslant \gamma_2(\|z_i\|), \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\bar{f} \leqslant -\gamma_3(\|z_i\|) \tag{5}$$

此假设是对孤立系统的确定部分的基本假设.

假设 3 不确定部分和互联项满足匹配条件: 即存在连续函数 d_i, E_i, h_i 和 ρ_i，使

$$\begin{aligned} \Delta f_i(x_i, t) &= B_i(x_i, t)d_i(x_i, \sigma_i, t) \\ \Delta B_i(x_i, t) &= B_i(x_i, t)E_i(x_i, \sigma_i, t) \\ g_i(x_i, t) &= B_i(x_i, t)h_i(x_i, \sigma_i, t) \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\min\lambda_m[\frac{1}{2}(E_i + E_i^T)] \geqslant \rho_i > -1$

注 2 此假设只是为简化证明过程而设, 这个条件完全可以放宽到更一般的条件.

3 分散鲁棒控制器的设计

首先利用系统的相似性, 对系统(1)作变换: $z_i = \varphi_i(x_i)$，得

$$z_i = f(z_i, t) + \bar{\Delta} f_i(z_i, \sigma_i, t) + [B(z_i, t) + \bar{\Delta} B_i(z_i, \sigma_i, t)]v_i + \bar{g}_i(z, \sigma_i, t) \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} f_i(z_i, t) &= [\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}]^{-1} B_i(\Phi^{-1}(z_i), t)d_i(\Phi^{-1}(z_i), \sigma_i, t) \\ \bar{\Delta} B_i(z_i, t) &= [\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}]^{-1} B_i(\Phi^{-1}(z_i), t)E_i(\Phi^{-1}(z_i), \sigma_i, t) \\ \bar{g}_i(z_i, t) &= [\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}]^{-1} B_i(\Phi^{-1}(z_i), t)h_i(\Phi^{-1}(z_i), \sigma_i, t) \end{aligned} \tag{8}$$

由(6), (8)式可得:

$$\bar{\Delta} f_i = B d_i(\Phi^{-1}(z_i), \sigma_i, t), \quad \bar{\Delta} B_i = B E_i(\Phi^{-1}(z_i), \sigma_i, t), \quad \bar{g}_i = B h_i(\Phi^{-1}(z_i), \sigma_i, t) \tag{9}$$

对系统(7)作如下假设:

假设 4 不确定部分和互联部分满足: $\|e_i\| = \|d_i + E_i u_{i1} + h_i\| \leqslant \sum_{j=1}^{N} \Psi_{ij}(\|z_j\|)$ (10)

其中 Ψ_{ij}为非减连续函数

注 3 此假设是对系统(7)提出的. 由于同胚变换的影响, 使系统(1)的不确定部分和互联项部分未必满足假设 4, 因此可将本文的结论应用于更广泛的领域.

对系统(7)取如下控制器:

$$v_i = u_{i1} + u_{i2} \tag{11}$$

其中 u_{i1} 由(3)式决定，$u_{i2} = -\frac{1}{2}(1 + \rho_i)^{-1} B^T \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}V}$

ψ_i 满足: $\frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}V} = 1 + \frac{N}{2}\gamma_3^{-1}\sum_{i=1}^{N}((\psi_{ji} \circ \gamma_1^{-1})(V))^2$

定理 **1**　在控制器(11) 的控制下, 系统(7) 渐近稳定.

证明　取 $\overline{V}(z, t) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(V)$,

由(3), (5), (9), (10) 和(11) 式可得:

$$\dot{\overline{V}}(z_i, t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\psi_i(V)}{dV} \frac{\partial V(z_i, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\psi_i}{dV}\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z_i}(\overline{f} + B(I + E_i)u_{i2} + Be_i)\right]$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{d\psi_i(V)}{dV}\left[-\gamma_3 - \frac{d\psi_i}{dV}\|B^{T}\frac{\partial V}{\partial z_i}\|^2 + \|B^{T}\frac{\partial V}{\partial z_i}\|^2 \sum_{j=1}^{N}\Psi_{ij}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{d\psi_i(V)}{dV}\gamma_3 - \frac{1}{2}\left(\frac{d\psi_i}{dV}\right)^2\|B^{T}\frac{\partial V}{\partial z_i}\|^2 + \frac{d\psi_i}{dV}\|B^{T}\frac{\partial V}{\partial z_i}\|^2\sum_{j=1}^{N}\Psi_{ij}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[-\gamma_3 - \frac{N}{2}\sum_{j=1}^{N}((\Psi_{ij}\circ\gamma_1^{-1})(V))^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{d\psi_i}{dV}\right)^2\|B^{T}\frac{\partial V}{\partial z_i}\|^2\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N}\left[\left(\frac{1}{2N}\left(\frac{d\psi_i}{dV}\right)^2\|B^{T}\frac{\partial V}{\partial z_i}\|^2 + \frac{N}{2}\sum_{j=1}^{N}\Psi_{ij}\right]\right]$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N}\left[-\gamma_3 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}((\Psi_{ij}\circ\gamma_1^{-1})(V))^2 - \frac{N}{2}\sum_{j=1}^{N}\Psi_{ij}^2\right]$$

由(5) 式可知: $\gamma_2^{-1}(V) \leqslant \|z_i\| \leqslant \gamma_1^{-1}(V)$, 则 $\Psi_{ij}(\|z_i\|) \leqslant (\Psi_{ji}\circ\gamma_1^{-1})(V)$

所以 $\dot{\overline{V}} \leqslant -N\gamma_3 < 0$

注 **4**　控制器(11) 的设计思想来源于文[5]. 定理 1 的结论是对系统(7) 讨论的. 但只需将同胚变换代入控制器和 Lyapunov 函数, 就可以得到对系统(1) 的结论.

定理 **2**　系统(1) 在如下控制器的控制下渐近稳定:

$$u_i = \alpha_i + \beta_i[u_{i1}(\varphi_i(x_i)) + u_{i2}(\varphi_i(x_i))] \tag{12}$$

此定理的证明类似于定理 1 的证明. (略)

4　相似性分析

由上述讨论不难看出, 利用相似性可以明显简化控制器的设计过程, 相似性不仅可以不必针对每个子系统设计控制器, 而且可以使控制器的差异只与系统的相似参量有关. 控制器(11) 中并没有达到这样的效果, 但只需对其中的内容作如下调整:

取 $\Psi_{ij}(z_i, t)$ 的上界函数 $\Psi(z_i, t)$, (对任意的 i, j, 有 $\Psi(z_i, t) > \Psi_{ij}(z_i, t)$, 代入控制器(11) 即可. 这说明各子系统的控制器也因子系统间的相似性而具有一定的相似性.

与文[5]相比, 我们从两个方面降低了对系统的假设. 其一是不必假设当 $s \to \infty$ 时, $\gamma_l\ l = 1, 2, 3$ 大于某个正常数, 其二是对各子系统而言可以不满足假设 4, 并且所得的控制结果是渐近稳定. 这些都得益于组合系统的相似性结构性质.

5　例子

取恒等变换 $z_i = x_i, u_i = v_i$, 使系统变成如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i2} = 2\,\mathrm{tg}\,x_{j1} + \dfrac{\omega_1 x_{j2}}{\cos^2 x_{j1}} + \dfrac{u_i}{\omega_2\cos^2 x_{j1}} \end{cases} \quad i = 1, 2 \tag{13}$$

设不确定参数满足: $\omega_1(t) = \sin(10t)$, $0.25 \leqslant \omega_2 \leqslant 0.75$

取系统(13)的标称系统为: $\dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{i1}$ 取 $u_{i1} = -(x_{i1} + 2x_{i2})$

Lyapunov 函数为: $V = 0.5x_{i1}^2 + x_{i1}x_{i2} + 0.5x_{i2}^2$

非减函数为: $\gamma_1(s) = 0.292s^2$, $\gamma_2(s) = 1.308s^2$, $\gamma_3(s) = s^2$

由假设 4 得: $\| e_i \| \leqslant 0.5 \| x_{i1} \| + 1.25 \| x_{i2} \| + 2.431$

由(11)式得:

$$u_{i2} = -(x_{i1} + x_{i2})(5.833V^2 + 6.49V^{1.5} + 5.378V + 7.514V^{0.5} + 3.948) \quad (14)$$

则系统(13)在控制器(14)的控制下渐近稳定.

参 考 文 献

1 G Yang, S Zhang. Structural Properties of Large-scale System spossessing Similar Structures. Automatica, 1995, **31**(7): 1011~1017

2 严星刚, 张嗣瀛. 不确定非线性相似组合大系统的结构相似鲁棒控制器设计. 控制理论与应用, 1997, **14**(4): 513~519

3 Shu Rigopoulos K, Cinar A. Variational Control of an Exotherm ic CSTR: Productivity Improvement by Multiple Input Oscillations, IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, **34**: 193~196

4 Chen Y H, Pandey S. Uncertainty Bounded-based Hybrid Control for Robot Manipulators. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1998, **6**: 303-311

5 Han M C, Chen YH. Decentralized Control Design: Uncertain Systems with Strong Interconnections, INT. J. Control, 1995, **61**(6): 1363~1385

6 张嗣瀛. 复杂控制系统的对称性及相似性结构. 控制理论与应用, 1994, **11**(2): 231~237

7 严星刚等. 一类时变非线性相似组合大系统的全息控制. 控制与决策, 1996, **11**(Suppl.1): 138~143

8 J C Shen. Designing Stablilising Controllers and Observers Foruncertain Linear Systems with Time-varying Delay, Ieee Proc.-Control Theory 1997, **144**(4)

ASYMPTOTIC STABILITY FOR NONLINEAR SIMILAR COMPOSITE SYSTEM

LI Zhong-hai WANG Zheng ZHANG Si-ying

(*School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang* 110006)

Abstract: The robust control scheme is proposed for a class of nonlinear similar composite system. The uncertainties in the system must have a given function bound. The bounds of the interconnections between subsystems are non-decedent functions. The similarity of each subsystem is used to simply the design of controllers. The controllers guarantee osymptotic stability for large-scale systems.

Keywords: nonlinear system, similar composite system, decentralized robust control, asymptotic stability

作者简介

李忠海(1962-), 男, 博士研究生, 副教授. 主要研究领域为复杂大系统的鲁棒控制和 H_∞ 控制的理论和应用.

王 征(1971-), 男, 博士研究生. 主要研究领域为复杂大系统的鲁棒控制.

张嗣瀛(1925-), 男, 中国科学院院士, 教授. 主要研究领域为复杂大系统的结构及其鲁棒控制.