能量法计算临界荷载和自振频率的一点说明

陈玉骥
(佛山科学技术学院土木工程系，佛山 528000)

摘要　从用能量法计算压杆临界荷载和质量杆自振频率的公式出发，根据两种力学问题的基本方程，推导出相应的弹性总势能泛函，并由此说明了选取的位移函数若同时满足位移边界条件和力的边界条件，则其计算精度将显著提高的原因.

关键词　能量法，临界荷载，自振频率

在现有力学教材中，给出的用能量法计算压杆临界荷载和质量杆 (必须考虑其质量的杆件) 自振频率的公式分别为

$$P_{\mathrm{cr}}=\frac{\displaystyle\int_0^l EI(y'')^2\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l (y')^2\mathrm{d}x} \tag{1}$$

$$\omega^2=\frac{\displaystyle\int_0^l EI(Y'')^2\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l mY^2\mathrm{d}x} \tag{2}$$

式中，$y=y(x)$ 为压杆在临界状态时的挠度，$Y=Y(x)$ 为质量杆的振型函数，$m=m(x)$ 为质量杆单位长度的质量，EI 为杆件的抗弯刚度. 用式 (1),(2) 计算时，要求给出的位移 y, 振型函数 Y 必须满足位移边界条件，若能同时满足力的边界条件，则其计算精度将显著提高. 下面给出数学证明.

先取式 (1) 等号右边的分子进行如下推导

$$\int_0^l EI(y'')^2\mathrm{d}x=(EIy''y')_0^l-(EIy'''y)_0^l+\int_0^l EIy^{(4)}y\mathrm{d}x \tag{3}$$

又由压杆稳定问题的基本方程

$$EIy^{(4)}+Py''=0 \tag{4}$$

故式 (3) 成为

$$\int_0^l EI(y'')^2\mathrm{d}x=(EIy''y')_0^l-(EIy'''y)_0^l-P\int_0^l y''y\mathrm{d}x=$$

$$(EIy''y')_0^l-(EIy'''y)_0^l-P(yy')_0^l+P\int_0^l (y')^2\mathrm{d}x$$

由此可得压杆的弹性总势能

$$\varPi_1=\int_0^l EI(y'')^2\mathrm{d}x-P\int_0^l (y')^2\mathrm{d}x=$$

$$(EIy''y')_0^l-(EIy'''y)_0^l-P(yy')_0^l \tag{5}$$

显然，计算压杆临界荷载时，若事先给出的挠度 $y=y(x)$ 同时满足位移边界条件和力的边界条件，则式 (5) 右端为零，表明结构的总势能达到最小值；若仅能满足位移边界条件，总势能将不是最小值，相应临界荷载的计算精度就会较差.

2005–10–19 收到第 1 稿，2005–12–16 收到修改稿.

同理，取式 (2) 等号右边的分子进行推导并利用质量杆自由振动的运动微分方程经过分离变量后得到的振型应满足的基本方程 $EIY^{(4)}-m\omega^2Y=0$, 可得质量杆的弹性总势能

$$\varPi_2=\int_0^l EI(Y'')^2\mathrm{d}x-\omega^2\int_0^l mY^2\mathrm{d}x=$$

$$(EIY''Y')_0^l-(EIY'''Y)_0^l \tag{6}$$

由式 (6) 可得与前述计算临界荷载时对挠度选取相同的结论，即，若要得到精度较高的质量杆的自振频率，给出的振型函数 $Y=Y(x)$ 必须同时满足位移边界条件和力的边界条件. 下面两个例子可以很清楚地说明以上问题.

例 1　试求图 1 所示两端简支压杆的临界荷载.

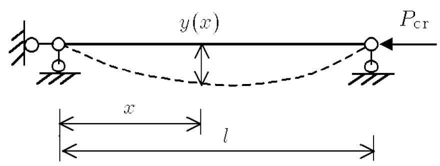

图 1

解 1　取挠度为二次抛物线 $y=x(l-x)$, 由式 (1) 得：$P_{\mathrm{cr}}=12EI/l^2$, 与精确解 $P_{cr}=\pi^2EI/l^2$ 比较，误差 21.59%.

解 2　取简支梁在单位均布荷载作用下的挠度 $y=\dfrac{x}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$, 由式 (1) 得：$P_{\mathrm{cr}}=9.882EI/l^2$, 与精确解比较，误差 0.13%.

例 2　试求图 2 所示悬臂均质杆 (m 为常数) 的基本频率.

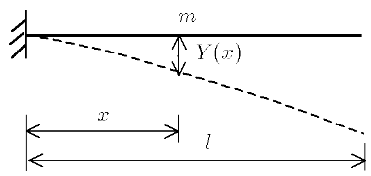

图 2

解 1　取振型函数为二次抛物线 $Y=a\dfrac{x^2}{l^2}$(a 为常数), 由式 (2) 得：$\omega=\dfrac{4.472}{l^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}}$, 与精确解 $\omega=\dfrac{3.516}{l^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}}$ 比较，误差 27.20%.

解 2 取悬臂梁在单位均布荷载作用下的挠度 $Y = \frac{1}{24EI}(6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4)$ 作为振型函数，由式 (2) 得：$\omega = \frac{3.530}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$，与精确解比较，误差 0.40%.

上述算例中，虽然位移函数 ($y = y(x)$, $Y = Y(x)$) 只取了一项，但当位移函数取为多项式计算时，以上结论同样成立.

参 考 文 献

1 李廉锟. 结构力学. 北京：高等教育出版社， 2004