

文章编号: 1002-0411(2003)02-123-05

## 环型二级倒立摆的控制研究与实现

张冬军<sup>1</sup> 从爽<sup>1</sup> 李泽湘<sup>2</sup> 秦志强<sup>2</sup>

(1. 中国科学技术大学自动化系 合肥 230027; 2. 香港科学技术大学电机及电子工程系 香港)

**摘要:** 通过分析环型二级倒立摆系统的动力学特性, 将系统的状态空间方程在“倒立”的平衡点附近进行线性化处理, 应用线性二次型最优控制策略, 对环型二级倒立摆进行控制器的设计与仿真实验, 并成功地将所设计的控制器应用到实际的环型二级倒立摆系统上, 使其稳定地平衡在“倒立”状态. 所做应用与实际实验在国内尚未见到报道.\*

**关键词:** 旋转倒立摆; 最优控制; 非线性系统; LQY

中图分类号: TP13

文献标识码: B

### STUDY AND REALIZATION OF ROTARY DOUBLE INVERTED-PENDULUM CONTROL

ZHANG Dong-jun<sup>1</sup> CONG Shuang<sup>1</sup> LI Ze-xiang<sup>2</sup> QIN Zhi-qiang<sup>2</sup>

(1. Dept. of Automation, University of Sci. & Tech. of China, Hefei 230017;

2. Dept. of EEE, Hong Kong University of Sci. & Tech. Hong Kong)

**Abstract:** This paper analyses the dynamics of rotary inverted pendulum system and linearizes the pendulum system at the unstable equilibrium point at the “inverted” state. The linear quadratic optimal control strategy is adopted to design the controller and the simulation experiment is done. The controller designed is successfully applied to the actual rotary inverted pendulum system which makes it be steadily stabilized at the “inverted” state. Such application and actual experiment is the first in China.

**Keywords:** rotary inverted-pendulum, optimal control, nonlinear system, LQY

### 1 引言(Introduction)

倒立摆系统一直是自动控制、机械电子等领域中非常典型的教学实验设备, 因为倒立摆控制系统的线性设计非常直观地说明现代线性控制理论的优点和有效性, 同时它还涉及到系统辨识、非线性系统的线性化、执行电机的控制等方面. 因而倒立摆系统一直是控制理论界关注的焦点, 人们将各种先进的控制算法运用到倒立摆系统上进行实验验证. 倒立摆的研究始于 20 世纪 60 年代, 当时主要集中在直线轨道的倒立摆系统的线性控制<sup>[1]</sup>. 近 10 年来, 三级倒立摆控制系统的实验成功更是掀起了一股研究的热潮<sup>[2]</sup>, 与此同时, 旋转轨道的环型倒立摆系统由于其自身的特点也开始受到研究者的关注<sup>[3]</sup>. 环型倒立摆系统是一种典型的非线性系统, 它具有如下特性:

a) 不确定性. 主要是模型的参数误差以及机

械传动过程中的减速齿轮间隙所导致, 不过与直线型倒立摆系统相比, 由于没有了导轨上拖动小车的皮带, 影响程度有所改善.

b) 耦合特性. 从系统的数学模型中可以看到, 环型倒立摆摆杆和水平的连杆之间, 以及多级倒立摆系统的上下摆杆之间都具有较强耦合.

c) 开环不稳定系统. 倒立摆杆有两个平衡状态: 垂直向下和垂直向上. 垂直向下的状态是稳定的平衡点, 而垂直向上的状态是不稳定的平衡点, 开环时微小的扰动就会使系统离开平衡点而进入到垂直向下的状态中去.

d) 行程无限制. 旋转型倒立摆系统的连杆没有行程限制, 而直线型的倒立摆系统小车的行程是有物理限制的, 因而增加了控制的约束, 使得一些算法在直线型倒立摆系统上无法实现.

本文通过对环型倒立摆系统的分析, 选择了

\* 收稿日期: 2002-05-20  
基金项目: 中科院优秀青年学者奖基金资助项目

LQY 输出最优控制器控制环型二级倒立摆系统稳定在垂直向上的平衡点上. 并通过合作, 在深圳固高公司最新制造出的环型二级倒立摆系统上首次实现了所设计的垂直平衡控制. 本文的内容安排如下: 第2节通过对倒立摆系统的动力学特性分析, 建立被控系统的非线性数学模型并将之在平衡点附近线性化. 第3节对所选用的控制器进行设计. 第4节给出了控制系统的仿真结构, 以及系统的仿真和实际控制系统的实验结果. 最后给出结论.

## 2 环型倒立摆系统数学模型及其线性化 (Rotary inverted pendulum system's mathematics model and its linearization)

本文使用的环型二级倒立摆控制系统结构如图1所示.

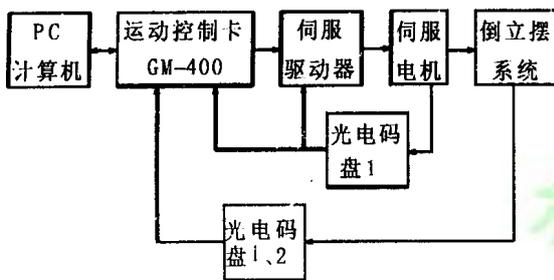


图1 环型二级倒立摆控制系统结构图

Fig. 1 The structure of rotary double inverted pendulum control system

倒立摆系统的物理模型如图2所示.

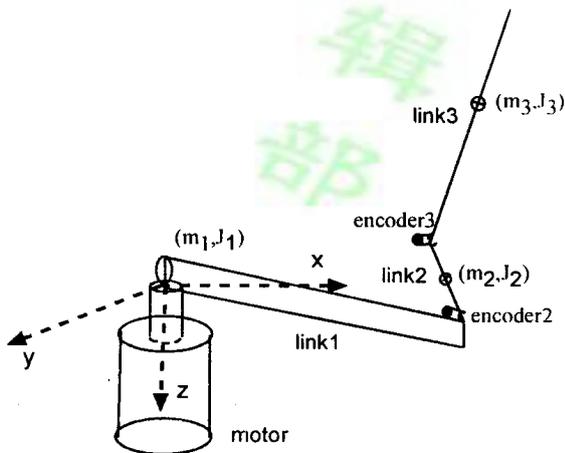


图2 环型二级倒立摆物理模型

Fig. 2 The physical model of rotary double inverted pendulum

其中与电机相连接的是 link<sub>1</sub>, 即平行杆; 而与平行杆另一端相连的是倒立摆 link<sub>2</sub> (下杆) 和 link<sub>3</sub> (上

杆). 三个杆的质量分别为  $m_1, m_2$  和  $m_3$ ; 转动惯量分别为  $J_1, J_2$  和  $J_3$ ; 杆长分别为  $2l_1, 2l_2$  和  $2l_3$ .

环型二级倒立摆的工作原理为: 电机的转动带动平行杆旋转, 由此带动与平行杆另一端相连的下杆和上杆在垂直方向做旋转运动. 控制的目的是希望通过控制电机的力矩, 并通过水平杆的作用, 达到控制上、下杆变化的角度, 使两者共同平衡在垂直的180度的位置上. 为此, 需要首先建立被控系统的数学模型. 我们定义系统的坐标系如图2中所示, 系统的各部分坐标为:

$$\begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases} = \begin{cases} l_1 \cos\theta_1 \\ l_1 \sin\theta_1 \\ 0 \end{cases}, & \begin{matrix} \text{水平连杆顶端} \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{cases} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{cases} = \begin{cases} l_1 \cos\theta_1 - l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ l_1 \sin\theta_1 + l_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ l_2 \cos\theta_2 \end{cases}, & \begin{matrix} \text{下摆杆质心} \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{cases} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{cases} = \begin{cases} l_1 \cos\theta_1 - 2l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 - l_3 \sin\theta_1 \sin\theta_3 \\ l_1 \sin\theta_1 + 2l_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 + l_3 \cos\theta_1 \sin\theta_3 \\ 2l_2 \cos\theta_2 + l_3 \cos\theta_3 \end{cases}, & \begin{matrix} \text{上摆杆质心} \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{cases} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{cases} = \begin{cases} l_1 \cos\theta_1 - 2l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ l_1 \sin\theta_1 + 2l_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ 2l_2 \cos\theta_2 \end{cases}, & \begin{matrix} \text{质量块} \\ \\ \end{matrix} \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\theta_1$  为连杆与  $x$  轴方向的夹角,  $\theta_2, \theta_3$  分别为下、上摆杆与  $z$  轴方向的夹角.

应用 New ton-Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q})$$

其中,  $L$  为拉格朗日算子,  $q_i$  为系统的广义坐标,  $i=1, 2, 3, 4, q = \{x, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ , 称为广义变量,  $\tau$  称为系统沿该广义坐标方向上的广义外力.  $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  是系统的动能,  $V$  是系统的势能. 则对于倒立摆系统:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \\ T_2 &= \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[ \left[ \frac{d}{dt} (l_1 \cos\theta_1 - l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2) \right]^2 + \left[ \frac{d}{dt} (l_1 \sin\theta_1 + l_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2) \right]^2 + \left[ \frac{d}{dt} (l_2 \cos\theta_2) \right]^2 \right] \\ T_3 &= \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \left[ \left[ \frac{d}{dt} (l_1 \cos\theta_1 - 2l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 - l_3 \sin\theta_1 \sin\theta_3) \right]^2 + \left[ \frac{d}{dt} (l_1 \sin\theta_1 + 2l_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 + l_3 \cos\theta_1 \sin\theta_3) \right]^2 + \left[ \frac{d}{dt} (2l_2 \cos\theta_2 + l_3 \cos\theta_3) \right]^2 \right] \end{aligned}$$

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 \left[ \left( \frac{d}{dt} (l_1 \cos \theta_1 - 2l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} (l_1 \sin \theta_1 + 2l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} (2l_2 \cos \theta_2) \right)^2 \right]$$

$$V = m_1 g (2l_2 + l_3) + m_2 g [l_3 + l_2 + l_2 (1 - \cos \theta_2)] + m_3 g [2l_2 (1 - \cos \theta_2) + l_3 (1 - \cos \theta_3)] + m_4 g [2l_2 (1 - \cos \theta_2) + l_3]$$

其中:  $J_1 = m_1 l_1^2 / 3$ ,  $J_2 = m_2 l_2^2 / 3$ ,  $J_3 = m_3 l_3^2 / 3$ ,  $u$  是电机输入力矩;  $g$  是中立加速度.

若令  $X = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3\}$ ,  $v = \ddot{\theta}_1$  获得以下(2)式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 l_2 (m_2 + 2m_3 + 2m_4) \cos \theta_2 & l_2^2 (\frac{4}{3} m_2 + 4m_3 + 24m_4) & 2l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ l_1 l_3 m_3 \cos \theta_3 & 2l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) & \frac{4}{3} l_3^2 m_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g l_2 (m_2 + 2m_3 + 2m_4) \sin \theta_2 \\ -g l_3 m_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 - c_3 & c_3 \\ 0 & c_3 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

上式可以简化为:

$$M \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g l_2 (m_2 + 2m_3 + 2m_4) \sin \theta_2 \\ -g l_3 m_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} + \text{其中}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}} = \bar{A}\bar{X} + \bar{B}U \\ Y = \bar{C}\bar{X} \end{cases}$$

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB, C = CT^{-1} \quad (3)$$

将连续系统进行离散化处理, 可得离散化后的被控系统的状态方程为:

$$\begin{cases} X(k+1) = GX(k) + Hu(k) \\ Y(k) = CX(k) \end{cases} \quad (4)$$

那么系统在  $x_0 = \{0, 0, \pm \pi, 0, \pm \pi, 0\}$  处线性化为:

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}} = A\bar{X} + BU \\ Y = C\bar{X} \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ M_{x_0}^{-1} F & M_{x_0}^{-1} G \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ M_{x_0}^{-1} V \end{bmatrix}, C = [I_{3 \times 3} \quad 0_{3 \times 3}]$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g l_2 (m_2 + 2m_3 + 2m_4) & 0 \\ 0 & 0 & g l_3 m_3 \end{bmatrix}$$

令:  $\bar{X} = TX$ , 其中

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

则有

其中:  $G = e^{\bar{A}T_s}$ ,  $H = \int_0^{T_s} e^{\bar{A}(T_s - \tau)} \bar{B} d\tau$ ,  $T_s$  为采样周期, 实验中取  $T_s = 0.005s$ .

实际应用环型二级倒立摆系统的参数如下:

$$\begin{aligned} m_2 &= 0.062\text{kg}, m_3 = 0.126\text{kg}, m_4 = 0.178\text{kg} \\ l_1 &= 0.213\text{m}, l_2 = 0.088\text{m}, l_3 = 0.248\text{m} \\ c_1 &= 0.051\text{N} \cdot \text{s/m}, c_2 = 0.0008\text{N} \cdot \text{s/m}, \\ c_3 &= 0.0008\text{N} \cdot \text{s/m} \end{aligned}$$

### 3 系统分析及控制器设计 (System analysis and controller design)

首先, 我们考察倒立摆系统的稳定性. 在  $x_0 = \{0, 0, \pm \pi, 0, \pm \pi, 0\}$  处, 系统  $(G, H)$  的特征根为

$$\text{Eigenvalue}(G) = [1.02826 \quad 0.97212 \quad 1.01366 \quad 0.9865 \quad 1.0000 \quad 1.00000]$$

显然, 系统开环不稳定. 需要设计控制器来镇定系统.

构造倒立摆系统的能控性矩阵,  $M_c = [H \quad GH \quad \dots \quad G^5 H]$ , 通过计算可得  $\text{rank}(M_c) = 6$ , 即系统可控. 根据线性系统理论, 可以设计状态反馈控制器将

闭环系统的极点配置在  $s$  域任意位置. 状态反馈控制器形式为

$$u(k) = - K_p X(k) \quad (5)$$

同样地, 系统也是可观的, 即可以设计状态观测器来求取系统中没有直接测量的速度变量. 但是为方便起见, 同时由于光电编码器的信号较为可靠, 我们实际采用角度量的差分来近似速度量.

为了考察系统的相对可控性能, 计算系统可控矩阵的奇异值

$$Q = [\bar{B} \quad \overline{AB} \quad \overline{A^2B} \quad \overline{A^3B} \quad \overline{A^4B} \quad \overline{A^5B}]$$

$$\delta = \frac{\max[\text{Eigenvalue}(Q^*Q)]}{\min[\text{Eigenvalue}(Q^*Q)]} = 839.01$$

从  $\delta$  值来看, 系统可控性能较好. 对单级倒立摆控制系统, 通过实验[4]我们已经得出结论: 在 LQR、LQY 以及 L 急电配置 3 中控制方法中, LQY 具有最佳的控制效果. 因此, 对于环型二级倒立摆, 我们直接采用 LQY 控制策略设计控制器. 输出线性二次型最优控制策略设计过程如下.

设输出反馈调节律的形式为  $u(k) = - K_y X(k)$ . 此时可通过使二次型性能指标函数

$$J_y = \sum_{k=1}^{\infty} (Y(k)^T Q_y Y(k) + u(k)^T R_y u(k)) \quad (6)$$

为最小, 求得反馈矩阵

$$K_y = (H^T S H + R_y)^{-1} (H^T S G) \quad (7)$$

其中  $S$  由下列黎卡蒂(Ricatti)方程获得:

$$G^T S G - G^T S H (H^T S H + R_y)^{-1} \cdot$$

$$H^T S G + C^T Q_y C = S \quad (8)$$

$Q_y$ 、 $R_y$  分别用来对输出向量  $Y(k)$ 、控制向量  $u(k)$  在性能指标中的相对重要性进行加权. 一般地, 取  $R_y = 1$ .

#### 4 仿真及实控结果 (Simulation and actual control results)

首先对实验系统进行仿真实验, 仿真环境为 MATLAB Ver5.3 中的 SIMULINK Ver3.0. 仿真结构如图 3 所示.

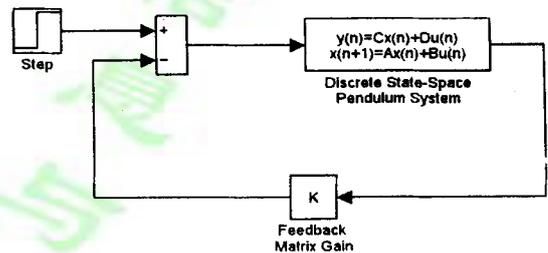


图 3 仿真系统结构图

Fig. 3 The simulation system structure

仿真中状态反馈矩阵为:

$$K_y = [1.3392 \quad 4.7797 \quad 276.3570 \\ 170.1969 \quad -458.4606 \quad -75.7067]$$

系统初始状态为:

$$x_0 = [0 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0 \quad -0.1 \quad 0]$$

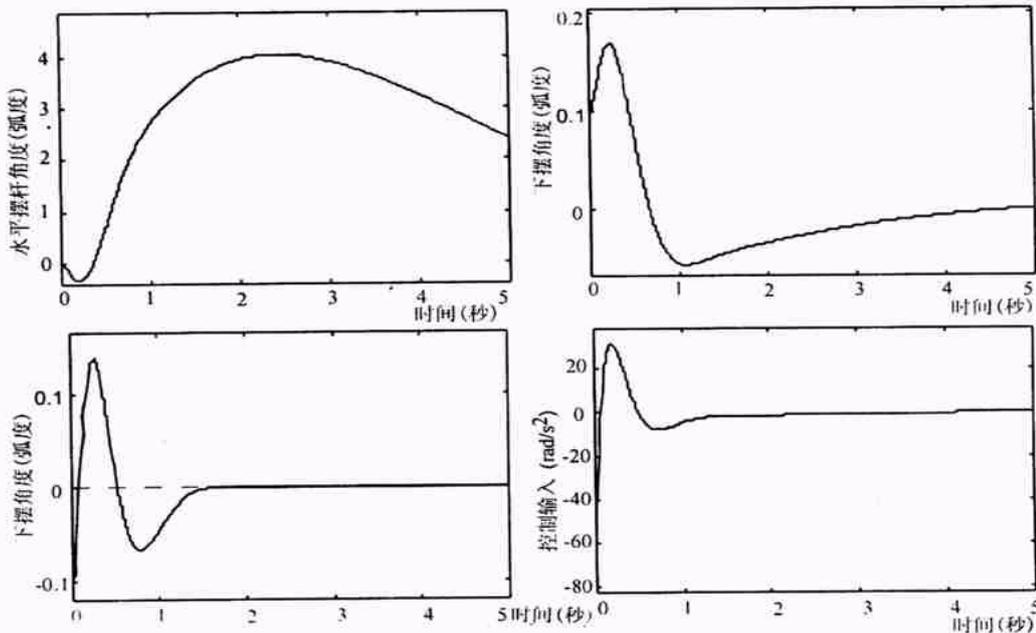


图 4 环行二级倒立摆的系统仿真曲线

Fig. 4 The system simulation curves of rotary double inverted pendulum

环型二级倒立摆系统仿真的水平连杆、下摆角度、上摆角度以及控制量的结果曲线如图 4 所示。

对实际的环型二级倒立控制系统进行实控, 并通过对实际系统的在线调节, 获得实际控制系统中

的状态反馈矩阵为:

$$K_y = [0.9 \ 1.18 \ 330.6 \ 29.1 \ -376.39 \ -52.08]$$

实际环型二级倒立摆系统的控制过程中各对应变量的控制曲线如图 5 所示。

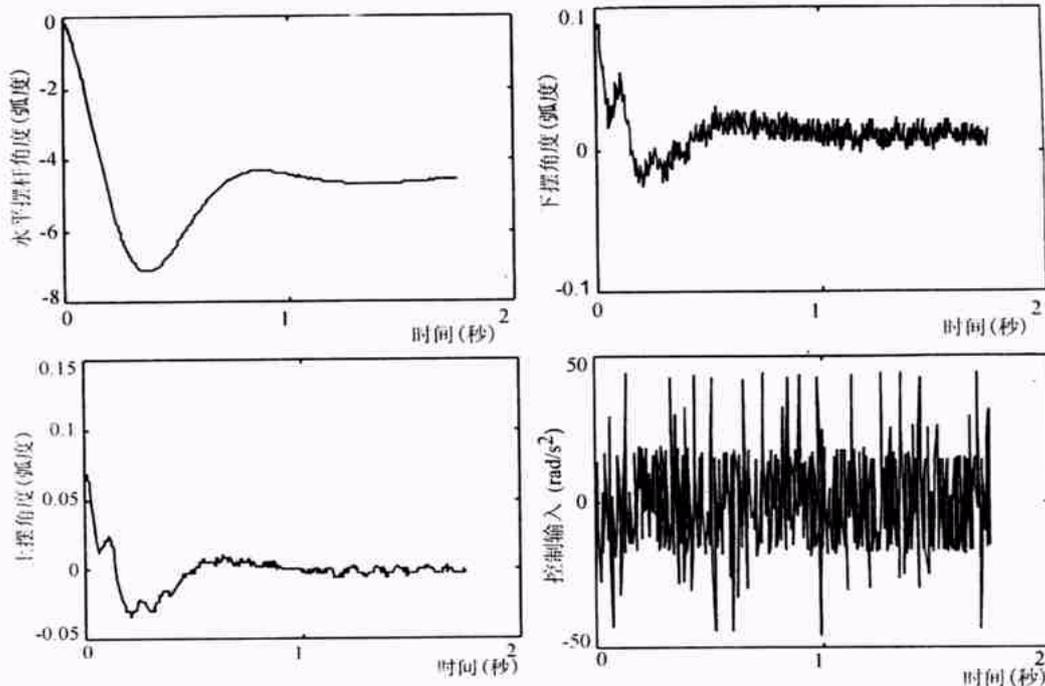


图 5 环型二级倒立摆系统的实际控制的曲线记录

Fig. 5 The actual control curve records of rotary double inverted pendulum system

从上面所做出的系统控制曲线中可以看出:

1) 由于系统的非线性以及建模误差, 反馈控制矩阵在实际的控制系统中还要设计者根据实际情况来进行一定的调节。

2) 由于实际系统中减速齿轮的间隙以及非线性摩擦力的影响, 实际系统运行中存在一定程度的抖动。

3) 无论是仿真还是实际控制时, 平行连杆的角度都存在较大的稳态误差。这是因为为了稳定倒立两个摆杆, 平行连杆的反馈参数相对较小, 当倒立的摆杆保持稳定时, 由于摩擦力的作用, 平行连杆不能回到指定的位置。

4) 实验结果证明输出线性二次型最优控制器能够控制环型串联二级倒立摆, 并且具有较好的稳态特性。

## 5 结论 (Conclusions)

本文通过理论分析、仿真实验并结合先进的运动控制板、高精度电机, 在微机和控制软件的辅助下, 成功地将实际的旋转串型倒立摆稳定在垂直倒

立状态。实际系统的控制结果证实本文提出的控制策略是有效的, 并且表现出较好的控制性能。但连杆的定位控制不能通过线性控制器来实现, 因此接下来需要设计控制器改善连杆的稳态特性和整个控制系统的鲁棒性, 消除由于齿轮间隙造成的震动。

## 参 考 文 献 (References)

- 1 Furuta K, et al. Control of unstable mechanical system: control of pendulum [J]. Int. J. of Control, 1976, 23(5): 673~ 692
- 2 Eltohamy K G. Nonlinear optimal control of a triple inverted pendulum with single control input [J]. Int. J. of Control, 1998, 69(2): 239~ 256
- 3 Astrom K J, Furuta K. Swing up a pendulum by energy control [J]. Automatica, 2000, 36(200): 287~ 295
- 4 丛 爽, 张冬军, 魏衡华. 单级倒立摆三种控制方法的对比研究 [J]. 系统工程与电子技术, 2001, 266(11): 47~ 49, 99

## 作者简介

张冬军(1975- ), 男, 硕士研究生。研究领域为直线以及环型单级和多级倒立摆系统多种方法的实现研究。

丛 爽(1961- ), 女, 博士, 教授, 博士生导师。研究领域为先进控制策略在运动控制中的应用与实现, 模糊控制, 神经网络控制, 遗传算法等。