

细沟侵蚀动态过程模拟数学模型和有限元计算方法

雷廷武^{1,2}, 姚春梅¹, 张晴雯², Mark Nearing³, 邵明安², 梅树立⁴

(1. 中国农业大学水利与土木工程学院, 北京 100083; 2 中国科学院, 水利部水土保持研究所, 杨凌 712100; 3 Southwest Watershed Research Center, 2000 E Allen Rd Tucson, AZ 85719, USA; 4 北京航空航天大学理学院, 北京 100083)

摘要: 建立了集中水流作用下均质土壤坡面上细沟侵蚀动态模拟数学模型。模型包括根据质量守恒原理推导而得到的变沟宽水流连续性方程和泥沙运移方程; 根据动量守恒方程推得到的水流动力学方程; 由紊流冲击分布概率来确定的土壤剥离方程; 过量泥沙采用沉积的一阶沉积方程。模型还考虑了沟床形态、水流动力、土壤侵蚀与泥沙沉积形成相互依赖的反馈环, 具有表达细沟的空间变化和时间演变的能力。给出了利用有限元方法对水动力学方程及泥沙运移连续方程进行顺序求解的数值计算公式以及模型数值求解的具体步骤。

关键词: 细沟侵蚀; 模型; 动态过程; 有限元模拟; 水动力学; 概率模型

中图分类号: S157.1

文献标识码: A

文章编号: 1002-6819(2004)04-0007-06

0 引言

土壤侵蚀形成的细沟, 既是坡面侵蚀的来源又是泥沙输运的通道, 在坡地侵蚀中具有极其重要的地位。通常侵蚀量大的地方, 细沟侵蚀很活跃^[1-7]。侵蚀细沟形态随时间与空间不断演变, 这种演变反过来影响细沟中水流的水力学特性。水流是坡面水蚀过程的驱动力, 细沟水流水力特性的动态变化将引起侵蚀细沟形态的演变。因此, 细沟演化的过程形成了一个侵蚀、水流水力特性、沟床形态变化间相互影响的互反馈环。沟中水流流速、深度、细沟宽度、水力糙度、局部细沟坡度、阻力坡度、侵蚀速率等都是细沟演变过程中随时空变化的函数。该研究的目的是采用理论分析, 建立描述细沟侵蚀过程及其形态发育演变过程的模拟模型, 给出相应的求解方法。

现有的许多模型通过许多假设及相应的数学模型来简化对细沟侵蚀的描述。作出这些简化的理由很多。首先, 这些模型大多数以水土保持中所需的土壤侵蚀预报为目的, 而不关心侵蚀过程的机理。对于整个细沟土壤侵蚀过程的完整描述, 涉及到许多复杂的数学公式, 有些往往不适用于土壤侵蚀预报, 并且有些还满足不了侵蚀预报的精度。造成这些现象的主要原因是, 即使在相同的环境条件下土壤侵蚀量差异也很大^[8]。到目前为止, 已有的模型还没有涉及到细沟侵蚀中细沟形态演化即随时空变化的问题。例如, 现阶段影响较大的 WEP 模型^[6,9,10], GUEST 模型^[11]及 EuroSEM 模型^[12], 均假定恒定的细沟宽度、不变的水力糙度、随距离线性变化的流量、不随时空变化的坡度。上述三个模型描述细沟的时空变化都有局限性。该三个模型以及其他一些模

型, 在给予恰当的参数, 可以适用于一般的土壤侵蚀预报目的, 但都不能模拟细沟形态演化动态过程。

本项研究是为了建立模拟坡面侵蚀细沟演变过程的数学模型。该模型能反映细沟侵蚀动态过程、细沟沟床形态变化及其中水流水力学特性的动态互反馈作用, 同时反映细沟瞬时形态的特征与时空变化。根据局部土壤剥离和泥沙沉积量可以对局部沟坡与宽度的变化随时进行动态更新。沟坡的变化将引起相关联的水流速度、剪切应力、能量等一系列变化, 这些变化反过来又影响水流剥离、输送和沉积泥沙量。该模型采用了一组完整的水动力学方程组, 包括一个以概率论为基础的土壤剥蚀模型、一个用于细沟侵蚀的新型泥沙运移方程。本文还叙述理论模型的有限元数值求解方法。

1 模型描述

1.1 水动力学方程

均匀沟宽的一维水动力学方程已有过广泛的讨论^[13-15]。本研究所针对的是沟宽非均匀并不断地动态变化的情况。根据质量守恒原理, 变沟宽的水流连续性方程给出如下

$$\frac{\partial(hw)}{\partial t} + \frac{\partial(uhw)}{\partial x} = \sigma_w \quad (1)$$

式中 x ——笛卡尔坐标, m; t ——时间, s; $h(x, t)$ ——铅直度量的水流深度, m; $u(x, t)$ ——水流关于深度与宽度在 x 方向上的平均流速, m/s; $w(x, t)$ ——细沟宽度, m; $\sigma(x, t)$ ——水流流量沿沟长的增减量, m/s, 当降雨量超过入渗量或有地下渗流溢出时, $\sigma(x, t)$ 为正值, 当有沿程损失(如入渗)时 $\sigma(x, t)$ 为负值。

在变沟宽条件下的动量守恒方程如下^[16]

$$\frac{\partial(uhw)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2hw)}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial(h^3w)}{\partial x} = -ghw \left[\frac{S_x}{\sqrt{1+S_x^2}} + S_{fx} \right] + F_{cn}hw n_x \quad (2)$$

式中 g ——重力加速度, m/s²; $S_x(x, t)$ ——细沟的坡度, m/m; $S_{fx}(x, t)$ ——阻力坡度^[17], m/m, 具有下列表达式

收稿日期: 2003-12-02 修订日期: 2004-03-01

基金项目: 教育部重大项目“细沟土壤侵蚀动力过程模型模拟及其基本参数的系统研究”; 中国科学院知识创新重要方向项目“水蚀预报模型研究”(KZCX3-SW-422)

作者简介: 雷廷武, 博士, 教授, 博士生导师, 从事土壤侵蚀及水土保持研究。北京 中国农业大学水利与土木工程学院, 100083

通讯作者: 姚春梅, 副教授, 硕士生导师, 从事土壤侵蚀及水土保持研究。北京 中国农业大学水利与土木工程学院, 100083



$$S_{fx} = \left(\frac{C}{u} \right)^2 \frac{1}{h} \quad (3)$$

其中 C ($m^{1/2}/s$)——水流阻力系数, 有下式确定^[17]

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (4)$$

式中 f ——Darcy-Weisbach 水力摩擦系数。

细沟的坡度简单地由下式给出

$$S_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad (5)$$

式中 $z(x, t)$ ——沟底地表高程, m。

式(2)中的 F_{cn} 为由土壤表面曲率引起的离心加速度对动量的贡献, 该项可表示为

$$F_{cn} = \frac{u^2}{R_n} \quad (6)$$

其中

$$R_n = \frac{(1 + S_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x} \quad (7)$$

单位矢量在 x 轴上的投影, 切矢量 n_x 由下式确定

$$n_x = -S_x \quad (8)$$

1.2 泥沙连续方程

与变沟宽细沟水流相联系的泥沙运移过程由下式给出

$$hw \frac{\partial c}{\partial t} + hwu \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(hw D_H \frac{\partial c}{\partial x} \right) + (S_{ss} - c\theta)w \quad (9)$$

式中 $c(x, t)$ ——泥沙含量, $kg \cdot m^{-3}$; $S_{ss}(x, t)$ ——泥沙源/汇项, $kg/(m^2 \cdot s)$; D_H ——泥沙在水中的扩散系数, m^2/s 。式(9)中的扩散系数在泥沙输运方程中并不常用, 与 D_H 有关的数据十分有限。然而, 物理上该过程的存在是肯定的, 特别是对于将问题作为一维情况处理时, 沟中水流断面上任一时刻、任一点总表现出不同的速度分布, 这种速度差异可以产生于水流的几何断面的变化, 同时还有自由水流与流体边界层间的流速差异, 这些都是泥沙在水流中动力扩散的原因。

1.3 泥沙源/汇项

在土壤侵蚀中, 用式(9)表示泥沙连续方程是无可争议的。然而, 式(9)中的泥沙源/汇项则有很多不同的表达式, 并且一直是土壤侵蚀界一个倍受关注的问题^[1, 2, 12, 18-27]。在该侵蚀模型, 使用与输沙能力相关的概念。当水流泥沙含量小于局部的水流输沙能力(所能携带的含沙量)时, 水流使土壤剥离; 当水流泥沙含量超过局部的水流输沙能力时, 水流中的泥沙开始沉积。

1.3.1 剥离速率

紊流是导致土壤剥蚀的原因^[28]。现在, 所有的以物理过程为基础的土壤侵蚀模型都采用平均水流参数, 如平均水流剪切应力^[6]或单位水流功率^[26]等。本研究中, 采用由水流的紊动特性计算土壤剥蚀的模型。Nearing等^[27]对该表达方法进行了详细描述。由紊流引起的土壤剥离的这种关系式具有下列形式

$$E = FPM \quad (10)$$

其中 E ——土壤剥蚀率, $kg/(m^2 \cdot s)$; F ——紊流冲击的时空分布频率, $1/(s \cdot m^2)$; P ——引发土壤剥离

(失效事件)的概率; M ——每一个失效事件平均所剥离的土壤质量, kg 。上述方程式也可以写成下列形式

$$E = KCP h^{1/2} S_x^{3/2} \quad (11)$$

式中 K ——经验系数, 可由试验数据确定; C ——Chezy 糙度系数; h ——水流深度, m ; S_x ——摩擦坡度, m/m 。土壤剥离的概率 P 是下列两个分布函数的重叠部分的值: 一个是土壤的拉伸应力, 它是土壤对被剥离的阻力; 另一个是地表土壤受到紊流冲击作用时所经受的紊流剪切应力(图1)。 E 为最大可能剥离速率, 即清水的剥离速率。实际的源项值 S_{ss} 与最大可能剥离速率及水流中的含沙量有关。计算方法在下文中讨论。

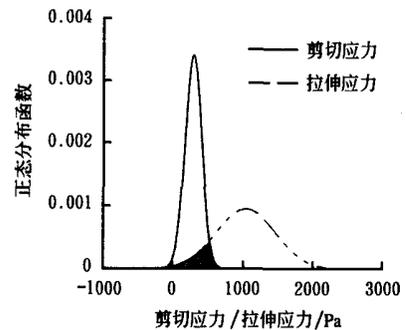


图1 剪切应力及拉伸强度正态分布函数

Fig 1 Distribution function for shear stress and tensile strength

1.3.2 输沙能力

该模型中所采用的输沙能力关系式为研究细沟侵蚀最新的室内试验结果, 表达式如下^[7]

$$\log_{10}(T_c) = A + \frac{B e^{[a + b \log(\omega)]}}{1 + e^{[a + b \log(\omega)]}} \quad (12)$$

式中 T_c ——输沙能力, $kg/(m \cdot s)$; $a = 0.845$, $b = 0.412$, $A = -34.47$, $B = 38.61$ 。 ω ——定义为水流功率, g/s^3 , 由下式给出

$$\omega = \rho g S_x q \quad (13)$$

式中 q ——单宽水流量, m^2/s ; ρ ——水的容重, g/cm^3 。

1.3.3 剥离、输沙的耦合

最大可能剥离速率 E , 用来描述清水、紊流对土壤剥离能力。水流中泥沙的存在, 会降低实际的剥离速率。一个很清楚的原因是泥沙对紊流速度脉动的影响。Einstein等^[29]及Vanoni^[30]都曾说明, 水流中泥沙的存在会导致紊流强度的减弱。Rose等^[21, 22]及Hairsine和Rose^[23, 24]认为水流中泥沙对剥离速率的影响是, 泥沙在输运过程中不断地在沟床沉积和再次启动, 保护着沟床的同时, 使剥离速率降低。Foster与Meyer^[31]、Meyer等^[32]认为, 泥沙存在使剥离速率降低是输沙过程要消耗能量, 从而使得水剥离土壤的能量减少。

在该模型中用下列公式来计算水流中的泥沙对剥离速率降低的关系:

$$S_{ss} = E \left[1 - \frac{cq}{T_c} \right] \quad (14)$$

1.3.4 泥沙沉积

当水流的输沙量(cq)大于水流的输沙能力 T_c 时,

泥沙就开始沉积, 沉积速度过量泥沙有关, 可以由下列一阶沉积表达式进行计算

$$S_{ss} = -\beta(cq - T_c) \quad (15)$$

式中 β ——一阶经验沉积系数, $1/m$ 。

1.4 沟床的瞬态演变

1.4.1 沟底高程的变化

细沟水流输沙能力随时间和空间变化, 同时是水流功率的函数。水流功率又是沟宽、水深、流速和局部阻力坡度的函数。输沙能力的差异, 不仅会影响沿沟长剥离量与沉积量的变化, 还会引起由剥离向沉积过程(或由沉积向剥离)的转化。因此, 即使起始时由均质土壤形成的一条坡度、宽度一定从而流速均一的细沟, 在侵蚀过程中沟宽、坡度的随机变化会引起输沙能力的变化, 导致泥沙连续性方程中源项的变化。

局部的土壤剥离和泥沙沉积会引起局部沟坡的瞬态变化, 原因是沟床随时间是非均匀侵蚀。在时间段(dt)内水流由地表剥离或沉积到地表面积($w dx$)上的泥沙量将引起地表土壤质量的改变, 其量值为($S_{ss} w dx dt$), 该质量用地表高程的变化来表示则为

$$S_{ss} w dx dt = \rho_b (\partial z / \partial t) w dx dt \quad (16)$$

式中 ρ_b ——土壤的体积密度, kg/m^3 。根据质量守恒定律可得: 水流对细沟土壤的剥离量或泥沙从水流中沉积下来的沉积量等于细沟沟床被剥离或从水流中沉积到地表的泥沙量, 即

$$S_{ss} w dx dt = -\rho_b \frac{\partial z}{\partial t} w dx dt \quad (17)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_b} S_{ss} \quad (18)$$

对式(17)积分得到

$$z(x, t) = -\frac{1}{\rho_b} \int_t S_{ss}(x, t) dt + f_0(x) \quad (19)$$

其中, $f_0(x)$ 为侵蚀过程开始时沟底的初始形态函数。

$S_{ss}(x, t) |_{x=x_1}$ 表示沉积过程, 在此情况下 $z(x, t) > f_0(x)$, 表示泥沙向表面的沉积使高程增加。反之, 对于剥离的情况, 则有 $z(x, t) < f_0(x)$ 及 $S_{ss}(x, t) > 0$ 。

1.4.2 沟宽变化

当细沟中某一部分发生沉积时, 引起其上游的沟坡减缓, 流速也相应降低; 沉积处沟宽相应增加, 由于质量守恒, 水流深度减低。在细沟变宽的过程中, 水流质量未变。因此, 根据质量守恒定律, 我们得到

$$V_1 w_1 H_1 = V_2 w_2 H_2 \quad (20)$$

式中 V_1, V_2 ——分别为沉积开始及结束时流体的速度, m/s ; w_1, w_2 ——沟宽, m ; H_1, H_2 ——水流深度, m , 它们之间的关系为

$$\begin{cases} V_2 = V \Big|_{t=t_1} + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \Delta t \right) \Big|_{t=t_1} = V_1 + \Delta V \\ w_2 = w \Big|_{t=t_1} + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \Delta t \right) \Big|_{t=t_1} = w_1 + \Delta w \\ H_2 = H \Big|_{t=t_1} + \left(\frac{\partial H}{\partial t} \Delta t \right) \Big|_{t=t_1} = H_1 + \Delta H \end{cases} \quad (21)$$

式中, $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ 。

此处, 我们设定沉积的泥沙总深度中的有一部分垫高了沟底, 从而减低了水的深度, 即

$$H_2 = H_1 + \beta \Delta z \quad (22)$$

式中 $0 < \beta < 1$ 为沉积引起水深降低的系数。由于 ΔV 很小, 为了求得 Δz , 我们做了进一步假定 $\Delta V = 0$, 则得到沟宽 w_2 的演变方程如下

$$w_2 = \frac{w_1 H_1}{H_1 + \beta \Delta z} \quad (23)$$

当沉积发生时, $\Delta z < 0$, 可以由式(23)看出, w_2 大于 w_1 , 即沟宽增加。

当水深减小到一定极限 H_{min} 时, 假定水深不能进一步减小, 即假设

$$H_1 + \beta \Delta z = H_{min} \quad (24)$$

从而

$$w_2 = \frac{w_1 H_1}{H_{min}} \quad (25)$$

2 有限元计算方法与计算公式

2.1 数值公式

采用有限元方法(FEM)来求解这些数学模型方程(式(1)、(2)、(9))。为了降低存储量和提高计算速度, 采用顺序求解的方法。在每一个时间步长中, 我们将方程(1)中的 u 、(2)中的 h 及它们相应的偏导数作为已知值, 由前一步计算得到。在方程(9)中 u 、 h 、 S_{ss} 为该时间步长中由方程式(1)及(2)计算得到的结果。在每一个单元中, 宽度 w 总是取为常量, 为节点宽度的平均值。从而, h 、 u 、 c 通过顺序求解方程式(1)、(2)、(9)依次得到。

采用这种求解方法和两节点的线性单元, 模拟这些过程的有限元数值公式为

$$\frac{w}{6} L \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{u}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \left(u_x \cdot w + \frac{u}{w} \cdot x \right) \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \{h\} = \frac{w}{6} L \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \{\sigma\} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{u}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sigma L}{6h} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \{h\} = -\frac{g}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{h\} - \frac{g \cdot h}{4w} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{w\} - \frac{gL}{6} \\ & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left\{ S_{x0} \{S_x\} + S_{fx} \{u_r \cdot \Delta t\} - F_{cn} \{n_x\} \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{wL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial c}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{u}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{D u}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sigma L}{6h} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \{c\} = \frac{L}{6h} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \{S\} \quad (28)$$

式中 $\bar{u}^{(e)}, \bar{h}^{(e)}, \bar{c}^{(e)}, \bar{w}^{(e)}, \bar{\sigma}^{(e)}, \bar{D}_H^{(e)}, \bar{u}_x^{(e)}, \bar{w}_x^{(e)}, \bar{S}_{x0}^{(e)}, \bar{S}_{fx}^{(e)}$ —— 相应变量在单元 e 内的平均值; L —— 单元的长度。

上述三个方程可由一个通用的方程表示为

$$[p^{(e)}]\{\dot{Q}\} + [k^{(e)}]\{Q\} - \{f^{(e)}\} = \{0\} \quad (29)$$

其中, $\{Q\}$ 为 $\{h\}$ 、 $\{u\}$ 或 $\{c\}$, (p) 、 (k) 、 $\{f\}$ 分别为每一个单元中各方程的质量矩阵、刚度矩阵、力矢量。

由式(26)、(27)、(28) 给出的方程组, 是关于时间的常微分方程组。可用时间“步进积分”方法获得不同时间步长中的解答, 采用有限差分方法处理。

将单元矩阵组集, 得到求解问题的方程组, 所涉及的总刚矩阵 $[A]$ 、总力矢量 $\{B\}$ 由下列公式确定

$$[A]\{Q\} = \{B\} \quad (30)$$

$$[A] = \sum_{e=1}^N \left(p + \theta \Delta t [k^{(e)}] \right) \quad (31)$$

$$\{B\} = \sum_{e=1}^N \left([p^{(e)}] - (1 - \theta) \Delta t [k^{(e)}] \right) \{Q\}_t + \Delta t \{f^{(e)}\} \quad (32)$$

式中 $\theta = 0, \frac{1}{2}, 1$ 分别表示时间的不同差分格式。

2.2 求解步骤

程序框架结构如下描述

- 1) 输入数据: 细沟信息数据: 初始条件与边界条件, 高程, 宽度, 求解时流速, 水深, 泥沙含量的误差限; 土壤信息数据: 抗拉强度及其方差或变差系数等。
- 2) 对各参数进行初始化。
- 3) 求解根据质量与动量守恒所建立的水力学方程(26)与(27), 得到流速和水深值。
- 4) 用(15)式计算出输沙能力。
- 5) 计算剥离速率或沉积速率。如果水流载沙量小于其对应的输沙能力, 用式(17)计算剥离速率; 反之, 则用式(18)计算沉积速率。
- 6) 用式(30), 求解输沙连续性方程, 得到泥沙含量。
- 7) 计算与前一时间步长相比较(或第一个时间步长与初始值比较)的速度、水深、泥沙含量误差。
- 8) 检验误差
如果速度、水深、泥沙含量的误差限中一个或几个大于设定值, 回到第3步进行迭代计算, 否则, 继续进行下一步9)。
- 9) 由泥沙源汇项, 即式(21)计算沟底高程变化。
- 10) 用式(25)计算细沟宽度的演化。
- 11) 用新获取的沟底高程数据, 用式(5)或其他合适的方法计算细沟沟床坡度。
- 12) 检验时间步数。如果达到所需的时间步数和总的时间长度, 停止计算。否则, 回到第3步, 进行下一个时间步长的计算。

3 模型的意义与局限

如上所述, 集中水流影响下细沟土壤侵蚀与细沟形

态的演变在土壤侵蚀与泥沙运移中十分重要。因此, 模拟侵蚀细沟中土壤水蚀过程具有重要意义且应该包括所有不同的相关过程。由流速和水深所定量刻画的水流动力是土壤水蚀的首要原因。细沟中土壤剥离特性受水力学特性、土壤表面形态及其变化的影响。泥沙运动由水流携带土壤颗粒的能力和土壤与水之间的交互作用(如泥沙在水中的水动力扩散)等确定。细沟中土壤从地表的剥离和水流中的泥沙向地表的沉积, 会改变沟床的形态(高程、宽度), 这种改变反过来又影响水流的水力学特性, 进而影响产沙过程。

该模型概括了以上所阐述的各个方面。该模型及其数值计算公式可以作为一种工具, 用于优化土壤在水流中扩散所需的参数(D_H)及泥沙沉积参数(β), 这两个参数用其他方法是很难确定的。另外, 处理产沙过程(如土壤剥离、沉积、扩散)的方法也得到了实际和定量的说明。

该模型用基于紊流的土壤剥离函数来确定土壤的剥离速率, 效果良好, 但以前没有明确地把它用于细沟侵蚀模型。

沟床高程的演化及其对细沟局部坡度、水力特性及产沙的影响可用该模型来模拟。水力学特性、沟坡、土壤剥离/沉积、高程改变、坡度与水力学特性的改变处理成为交互作用下互反馈的过程。通过该模型可以把一个过程对另一个过程的影响效果以及和泥沙沉积相关联的细沟变宽的过程和结果等都定量地加以模拟和说明。尽管模型能够说明土壤水蚀的诸多方面, 但如何将某些过程(诸如细沟中的跌坎、细沟的变窄等)也考虑进去, 尚需进一步深入研究。此外, 对于该模型的试验验证将另文发表。

[参 考 文 献]

- [1] Ellison W D. Soil erosion studies part V I, soil detachment by surface flow [J]. Agric Eng Sept Issue, 1947, 28, 402- 405
- [2] Foster G R. Modeling the erosion process [A]. Ch 5 In C. T. Haan (ed) Hydrologic modeling of small watersheds [C]. ASA E, St Joseph, MI, 1982
- [3] Govers G, Rauw s G. Transporting capacity of overland flow on plane and on irregular beds [J]. Earth Surface Processes Landforms, 1986, 11: 515- 524
- [4] Govers G. Empirical relationships for the transport capacity of overland flow [A]. Erosion, transport, and deposition process. In Proc Jerusalem Workshop [C]. Jerusalem, Israel March-April 1987. IHS Pub. no. 1990, 189: 45- 63
- [5] Govers G. Relationship between discharge, velocity, and flow area for rills eroding loose, non-layered materials [J]. Earth Surface Processes and Landforms, 1992, 17, 515- 528
- [6] Nearing M A, Foster G R, Lane L J, et al. A process-based soil erosion model for USDA water erosion prediction project technology [J]. Trans of the ASA E,

- 1989, 32: 1587- 1593
- [7] Nearing M A, Norton L D, Bulgakov D A, et al Hydraulics and Erosion in eroding rills[J]. Water Resour Res, 1997, 33(4): 865- 876
- [8] Wendt R C, Alberts E E, Hjarnfelt Jr A T. Variability of runoff and soil loss from fallow experimental plots [J]. Soil Sci Soc Am J, 1986, 50: 730- 735
- [9] Nearing M A, Lane L J, Alberts E E, et al Prediction technology for soil erosion by water: status and research needs[J]. Soil Sci Soc Am J, 1990, 54: 1702- 1711.
- [10] Nearing M A, Nicks A D. Evaluation of WEPP: Hillslopes and small watersheds[A]. N: NATO-ASI book "Global Change: Modeling Soil Erosion by Water" [C]. 1996(in press).
- [11] Misra R K, Rose C W. Application and sensitivity analysis of process based erosion model Guest [J]. European J of Soil Science, 1996, 47: 593- 604
- [12] Morgan R P C, Quinton J N, Rickson R J. EUROSEM Documentation Manual [Z]. Silsoe College, Silsoe, Bedford, U K, 1992
- [13] Milne-Thomson M C B E. Theoretical Hydrodynamics [M]. The Macmillan Company. New York 1960
- [14] Shames I H. Mechanics of fluids third edition [M]. McGraw-Hill Book Company. New York 1992
- [15] Ziekiewicz, Taylor R L. The finite element method fourth edition. Vol 2 solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity [M]. McGraw-Hill Book Company. NY. 1991.
- [16] Jayawardena A W, White J K. A Finite Element Distributed Catchment Model, I [J]. Analytical Basis J. Hydrology, 1997, 34, 269- 286
- [17] Chow V T. Open-Channel Hydraulics [M]. McGraw-Hill, Inc New York, NY. 1959
- [18] Elliot W J. A process based rill erosion model[D]. Iowa State Univ. Ames, IA. 1988
- [19] Elliot W J, Liebenow A M, Laflen J M, et al A compendium of soil erodibility data from WEPP cropland soil field erodibility experiments 1987 & 88[R]. NSERL Rpt No. 3 Ohio State Univ. and Nat Soil Erosion Res Lab. W. Laf. N. 1989
- [20] Elliot W J, Laflen J M. A process-based rill erosion model[J]. Trans of the ASAE, 1993, 36: 65- 72
- [21] Rose C W, Williams J R, Sander G C, et al A mathematical model of soil erosion and deposition processes: I theory for a plane land element[J]. Soil Sci Soc Am J, 1983a, 47: 991- 995
- [22] Rose C W, Williams J R, Sander G C, et al A mathematical model of soil erosion and deposition processes: II. application to data from an arid-zone catchment[J]. Soil Sci Soc Am J, 1983b, 47: 996- 1000
- [23] Hairsine P B, Rose C W. Modeling water erosion due to overland flow using physical principles 1. sheet flow [J]. Water Resour Res, 1992(a), 28: 237- 243
- [24] Hairsine P B, Rose C W. Modeling water erosion due to overland flow using physical principles, 2, Rill Flow [J]. Water Resour Res, 1992(b), 28, 245- 250
- [25] Laflen J M, Elliot W J, Simanton R, et al WEPP soil erodibility experiments for rangeland and cropland soils [J]. J Soil and Water Conservation, 1991, 46(1): 39- 44
- [26] Morgan R P C. The european soil erosion model: an update on its structure and research base[A]. In R. J. Rickson (Ed.), Conserving soil resources, european perspectives[C]. CAB International, Oxon, U K, 286- 299, 1995
- [27] Nearing M A. A probabilistic model of soil detachment by shallow turbulent flow [J]. Trans of the ASAE, 1991, 34: 81- 85
- [28] Nearing M A, Parker S C. Detachment of soil by flowing water under turbulent and laminar conditions [J]. Soil Sci Soc Am J, 1994, 58: 1612- 1614
- [29] Einstein H A, Ning Chien. Second Approximation to the Solution of the Suspended Load Theory [A]. Fluid Mechanics Laboratory, University of California, Berkeley, 1954
- [30] Vanoni V, Namicos G N. Resistance properties of sediment-laden strains [J]. Trans of the ASCE, 1960, 3055
- [31] Foster G R, Meyer L D. A closed form erosion equation for upland areas[A]. In: Sedimentation (Einstein) [C]. Shen H W (ed.) Colorado State University, Ft. Collins, CO Ch. 12, 1972
- [32] Meyer L D, Foster G R, Nikolov S. Effect of flow rate and canopy on rill erosion [J]. Trans of the ASAE, 1975, 18: 905- 911.
- [33] Foster G R, Huggins L F, Meyer L D. A laboratory study of rill hydraulics: I velocity relationships [J]. Trans of the ASAE, 1984, 27, 790- 796
- [34] Gilley J E, Kottwitz E R, Simanton J R. Hydraulic characteristics of rills [J]. Trans of the ASAE, 1990, 33: 1900- 1906

Simulation study on dynamic rill erosion processes: mathematical models and FEM formulation

Lei Tingwu^{1,2}, Yao Chumei¹, Zhang Qingwen², Mark Nearing³, Shao Ming'an², Mei Shuli⁴

(1. College of Hydraulic and Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China;

2. Institute of Soil and Water Conservation, Chinese Academy of Sciences, Ministry of Water Resources, Yangling 712100, China; 3. Southwest Watershed Research Center, 2000 E Allen Rd. Tucson, AZ 85719, USA;

4. College of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract A series of mathematical models were formulated for the dynamic simulation of the hill slope rill erosion of homogeneous soil body under concentrated flow. The models include the following components: the continuation equation of water flow in rills of variable width based on mass conservation; the hydrodynamic equation of rill flow based upon momentum conservation; the sediment transportation equation based on mass conservation; soil detachment equation based on the probability of turbulent bursts; as well as the equation of sediment deposition of the first order. The model takes into account of the interdependent feedback loop of rill morphology, hydrodynamics, soil erosion, and sediment deposition. Numerical formula with finite element method for the hydrodynamic and sedimentation processes were given for sequential solution to the model equations. The simulation procedures were outlined.

Key words rill erosion; model; dynamic processes; finite element methods; hydrodynamics; probabilistic modeling