基于四值语义的缺省逻辑

岳安步 林作铨
(北京大学信息科学系 北京 100871)

摘 要 基于公式变换,给出一组缺省理论的变换方法,将命题语言 L 中的缺省理论变换到对应的命题语言$\overline{L}^{+}$中,保证了所得到的缺省理论的所有扩张均不平凡,并通过一种弱变换可同时保证缺省扩张的存在性.为缺省理论定义了各种四值模型,使得缺省逻辑具有非单调超协调推理能力,并证明了$\overline{L}^{+}$中的缺省扩张与 L 中缺省理论的四值模型之间具有一一对应关系.四值模型描述了公式变换的语义,基于四值语义的缺省推理通过缺省理论的变换技术能在标准的缺省逻辑中实现.

关键词 缺省逻辑;四值逻辑;非单调逻辑;超协调逻辑;非单调超协调逻辑
中图法分类号 TP301

Default Logic Based on Four Valued Semantics

YUE An-Bu LIN Zuo-Quan
(*Department of Information Science, Peking University, Beijing* 100871)

Abstract By the formula transformations, a set of transformations for a default theory is provided. The default theory in a propositional language L is transformed into the corresponding language $\overline{L}^{+}$, and thus all the extensions of the transformed default theory are non-trivial. A weak transformation of default theory is also given to ensure the existence of the default extensions. The various four-valued models are defined for default theories such that the default logic has the ability of nonmonotonic paraconsistent reasoning. It is proved that there is a one-to-one relationship between the extensions of $\overline{L}^{+}$ and the four-valued models of default theory of L. The four-valued models describe semantics for the formula transformations. The default reasoning based on four valued semantics can be computed in the context of standard default logic by the transformation technique of default theories.

Keywords default logic; four-valued logic; nonmonotonic logic; paraconsistent logic; nonmonotonic paraconsistent logic

1 引 言

Reiter 的缺省逻辑是一个重要的非单调逻辑[1].缺省逻辑在经典逻辑的基础上通过引入缺省规则处理不完全知识下的非单调推理.一个缺省理论(W,D)用公式集 W 和缺省规则集 D 定义,通过计算它的缺省扩张来进行推理.由于缺省逻辑建立在经典逻辑基础上,具有平凡性,即 W 中包含的任何矛盾均会导致缺省扩张包含任意结论.因此缺省逻辑不能处理含矛盾知识的推理问题.

使得缺省理论具有不平凡扩张的一个有效方法是消除 W 中的矛盾.文献[2]提出的符号系统首先利用公式的变换技术分解矛盾,然后再运用缺省规

收稿日期:2004-09-20;修改稿收到日期:2005-05-19.本课题得到国家自然科学基金(60373002,60496322)和国家“九七三”重点基础研究发展规划项目基金(2004CB318000)资助.岳安步,男,1978 年生,博士研究生,主要研究方向为非单调推理和超协调逻辑.E-mail: yueanbu@is.pku.edu.cn.林作铨,男,1963 年生,博士,教授,主要研究领域为计算机科学、人工智能.

则发现和处理这些矛盾,由于矛盾已被公式的变换消除,符号系统能够得出不平凡的缺省扩张,这样即使由不协调的知识出发也不会推出任意结论,实现了超协调推理.运用缺省规则发现和处理矛盾的一个好处是可以对不同的处理需求制定不同的缺省规则来完成推理.但是,符号系统并未提出对缺省规则的变换,缺省规则仅仅作为推理的辅助手段引入,而没有用于知识表示.双缺省逻辑[3]则把公式的变换扩展至缺省理论,缺省理论首先被变换成双缺省理论,再计算它的双缺省扩张来进行推理.这种变换保证了双扩张的不平凡性,使得双缺省逻辑能处理矛盾.

Belnap 的四值逻辑是一个重要的超协调逻辑[4,5].四值逻辑在经典真(t)、假(f)值之外,增加了表示未知信息的真值($\perp$)和表示矛盾的真值($\top$)来处理不完全、不协调的知识.在经典逻辑中,不协调的知识缺乏经典模型因而不能处理矛盾,而在四值逻辑中不协调的知识可被赋予非经典的真值从而存在四值模型.

Arieli 等人在 Belnap 的四值逻辑[4,5]基础上引入非单调推理机制扩展了四值逻辑的推理能力[6].在文献[7]中,Arieli 等通过公式变换技术消除了命题公式之间的矛盾,建立了(变换前公式集的)四值模型与(变换后公式集的)经典模型之间的一一对应关系,并利用限制逻辑[8]对变换后的公式集进行推理,实现了四值逻辑的各种优先推理模式,这里,限制逻辑事实上作为实现的手段使用,没有用于知识表示.

基于公式变换技术,我们给出了一种缺省理论的变换方法,把可能蕴含矛盾的 L 中的缺省理论变换到对应的命题语言 $\overline{L}^+$ 中,这样的变换保证了缺省扩张的不平凡性.本文采用的变换技术使得缺省理论变换后仍然为缺省理论,而不是双缺省理论.这就使得我们能够在缺省逻辑的标准定义下求解缺省扩张.同时,我们给出缺省逻辑的一组四值模型,定义缺省逻辑的四值语义.基于四值语义的缺省逻辑事实上成为四值逻辑的一个非单调扩展,可称为四值缺省逻辑.我们证明了使用变换技术得到的缺省扩张与缺省理论的四值模型之间具有一一对应关系,使得这种变换技术可作为缺省逻辑四值语义的有效实现手段.我们还讨论了一种保证扩张必然存在的弱变换并建立了相应的四值语义,在这样的语义下缺省理论的四值模型必然存在.

本文第 2 和 3 节分别简要回顾了 Reiter 的缺省逻辑和 Belnap 的四值逻辑;第 4 节给出了四值缺省逻辑,通过公式变换计算缺省理论的四值模型;第 5 节给出了增加约束的四值语义;在第 6 节中,我们比较了相关工作.最后,我们对本文工作进行总结,并提出进一步的研究问题.

2 缺省逻辑

令 L_P 是一个(经典)命题语言,L_P 中的一个(合式)公式集称为一个理论,一个平凡的理论包括所有公式.我们用 $Th(\Sigma)$ 表示理论 Σ 的命题演绎闭包.

缺省逻辑用 $T=(W,D)$ 表示一个缺省理论,其中 W 是 L_P 中的理论,D 是形如 $(\alpha:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k/\gamma)$,$k\geq 1$ 的缺省规则集,L_P 中的公式 α,γ 分别被称为缺省规则的前提和结论,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 被称为验证.用 $Preq(D)$,$Jus(D)$,$Cons(D)$ 分别表示 D 中所有缺省规则的前提、验证和结论的集合.为简单起见,本文只考虑 $k=1$ 时的单验证缺省规则,即形如 $(\alpha:\beta/\gamma)$ 的缺省规则.若 β 与 γ 等价则称缺省规则称为正规的,若 β 蕴涵 γ 则称缺省规则为半正规的,若缺省规则中没有出现前提 α 则称为前提为空的缺省规则.

定义 1[1]. 设 $T=(W,D)$ 为一个缺省理论,任给 L_P 中的公式集 S,$\Gamma(S)$ 是满足下列条件的最小公式集:

(D1) $\Gamma(S)=Th(\Gamma(S))$,

(D2) $W\subseteq\Gamma(S)$,

(D3) 若 $(\alpha:\beta/\gamma)\in D$,$\alpha\in\Gamma(S)$ 且 $\neg\beta\notin S$,则 $\gamma\in\Gamma(S)$.

公式集 E 是 T 的缺省扩张当且仅当 $\Gamma(E)=E$,即 E 是 Γ 算子的不动点.

由以下命题知,缺省逻辑不能处理 W 中包含的矛盾.

命题 1[1]. 一个缺省理论 $T=(W,D)$ 具有平凡扩张,当且仅当 W 是不协调的.

在本文的证明过程中,我们将使用到下列定义和性质.

命题 2[1]. 若 E,F 都是 $T=(W,D)$ 的扩张,且 $F\subseteq E$,则 $E=F$.

定义 2[1]. $GD(E,T)=\{\alpha:\beta/\gamma\mid\alpha:\beta/\gamma\in D$,其中 $\alpha\in E,\neg\beta\notin E\}$.

定理 1[1]. E 是 $T=(W,D)$ 的扩张,当且仅当 $E=Th(W\cup Cons(GD(E,T)))$.

定理 2[1]. 所有的正规缺省理论(即其缺省规则都是正规的)均有扩张.

3　四值逻辑

令 L 为不含命题常元的(四值)命题语言，L 包含逻辑连接词 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \supset$，其中，$\rightarrow$ 为实质蕴含词，$\supset$ 为内在蕴涵词. $A(L)$ 为 L 中所有原子命题的集合.

Belnap 的四值逻辑[4~6] 用 $FOUR=\{\bot,\mathrm{t},\mathrm{f},\top\}$ 表示真值集，四个真值有时也相应记为 $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$，分别表示未知、真、假、矛盾四种情形，$FOUR$ 形成一个双格结构(见图 1).

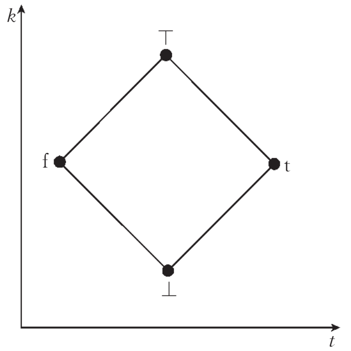


图 1　$FOUR$

(1)$(FOUR,\leq_t)$：在这个格中，t 是最大元，f 是最小元，$\bot$，$\top$ 之间不可比较，$\leq_t$ 反映了“成真程度”的高低.

(2)$(FOUR,\leq_k)$：在这个格中，$\top$ 是最大元，$\bot$ 是最小元，t，f 之间不可比较，$\leq_k$ 反映了包含“信息程度”的多少.

在采用二元组形式的双格结构下(其中 $\{1,0\}$ 形成具有偏序关系 $0<1$ 的二元格)，可用第一个分量为真表示公式具有成真的信息，第二个分量为真则表示公式具有成假的信息. 注意到，经典逻辑中公式成真当且仅当该公式不假，公式成真的信息和公式成假的信息互相不独立. 四值逻辑正是把公式成真和公式成假的信息分别看待才使得某公式可以同时既有成真的信息又有成假的信息，从而可以处理经典意义下的矛盾.

偏序关系 $\leq_t$，$\leq_k$ 也可由两个子格的偏序关系定义：

$$(x_1,y_1)\leq_t(x_2,y_2)\ \text{iff}\ x_1\leq x_2\wedge y_1\geq y_2,$$

$$(x_1,y_1)\leq_k(x_2,y_2)\ \text{iff}\ x_1\leq x_2\wedge y_1\leq y_2.$$

在不导致歧义的前提下，四值格上的运算也用符号 $\neg,\wedge,\vee,\supset,\rightarrow$ 表示，可由两个子格上相应的运算加以定义：

$$\neg(x,y)=_{def}(y,x),$$

$$(x_1,y_1)\wedge(x_2,y_2)=_{def}(x_1\wedge x_2,y_1\vee y_2),$$

$$(x_1,y_1)\vee(x_2,y_2)=_{def}(x_1\vee x_2,y_1\wedge y_2),$$

$$(x_1,y_1)\supset(x_2,y_2)=_{def}(\neg x_1\vee x_2,x_1\wedge y_2),$$

$$(x_1,y_1)\rightarrow(x_2,y_2)=_{def}\neg(x_1,y_1)\vee(x_2,y_2).$$

一个四值赋值是一个把公式映射到 $FOUR$ 上的函数 $v:L\mapsto FOUR$，v 把逻辑否定词映射为一元运算 $\neg$，把析取词、合取词和内在蕴涵词分别映射为二元运算 $\vee$，$\wedge$ 和 $\supset$. 我们称一个四值赋值 v 满足 ψ，若 $v(\psi)\in\{\mathrm{t},\top\}$. 满足 Γ 中所有公式的赋值 v 称为 Γ 的四值模型. Γ 的所有四值模型的集合记为 $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

定义 3[6]．　设 $\Gamma\cup\{\phi\}$ 为 L 中的一个公式集. 称 $\Gamma\models^4\phi$，若 Γ 的所有四值模型都满足 ϕ.

可在四值逻辑中引入优先推理，为此，先引入优先关系和优先模型的概念.

定义 4[6]．　令 u,v 都是四值赋值，定义优先关系如下：

(1)$v\leq_k u$，若对所有的原子 p，$v(p)\leq_k u(p)$；

(2)$v\leq_{I_1}u$，若对所有的原子 p，若 $v(p)=\top$，则 $u(p)=\top$；

(3)$v\leq_{I_2}u$，若对所有的原子 p，若 $v(p)\in\{\top,\bot\}$，则 $u(p)\in\{\top,\bot\}$.

定义 5[6]．　定义四值优先模型如下：

(1)设 $v\in\mathrm{mod}(\Gamma)$，称 v 为公式集 Γ 的 k-极小模型，若 $\forall u\in\mathrm{mod}(\Gamma)$，$v\leq_k u$；

(2)设 $v\in\mathrm{mod}(\Gamma)$，称 v 为公式集 Γ 的最协调模型，若 $\forall u\in\mathrm{mod}(\Gamma)$，$v\leq_{I_1}u$；

(3)设 $v\in\mathrm{mod}(\Gamma)$，称 v 为公式集 Γ 的最经典模型，若 $\forall u\in\mathrm{mod}(\Gamma)$，$v\leq_{I_2}u$.

定义 6[6]．　设 $\Gamma\cup\{\phi\}$ 为 L 中的一个公式集，定义：

(1)$\Gamma\models^k\phi$，若 Γ 的所有 k-极小模型都是 ϕ 的四值模型；

(2)$\Gamma\models^{I_1}\phi$，若 Γ 的所有最协调模型都是 ϕ 的四值模型；

(3)$\Gamma\models^{I_2}\phi$，若 Γ 的所有最经典模型都是 ϕ 的四值模型.

一个命题语言是否包括内在蕴涵词将影响命题语言的表达能力.

定理 3[6]．　若 L 不含内在蕴涵词 $\supset$，则 $\Gamma\models^k\phi$ iff $\Gamma\models^4\phi$.

定理 4[6]．　若 $\Gamma\models^4\phi$，则 $\Gamma\models^{I_1}\phi$.

定理 5[6]．　若 $\Gamma\models^4\phi$，则 $\Gamma\models^{I_2}\phi$.

4 四值缺省逻辑

本文限制语言 L 只有有限多个原子命题变元. 记 $\overline{L}^+$ 为满足 $A(\overline{L}^+)=\{p^+,p^-\mid p\in A(L)\}$ 且 $A(L)\cap A(\overline{L}^+)=\varnothing$ 的(经典)命题语言, $\overline{L}^+$ 中只有 $\neg,\vee,\wedge$ 三个逻辑连接词. 四值缺省逻辑把缺省理论的定义语言扩展至四值命题语言 L 上, 下文若提及 L 中的缺省理论 T 的扩张则隐含表明 T 中不出现连接词 $\supset$.

4.1 公式变换

为了能在经典逻辑中处理矛盾, 公式变换技术被大量地研究[2,3,7,9], 本小节按与他们不同的方式描述公式变换技术, 为限制篇幅起见我们省略本小节定理的证明.

定义 7. 对所有 $\phi\in L$, 都有 ϕ 的变换 $\overline{\phi}^+\in\overline{L}^+$, 其中:

(1) 若 $\phi=p,p\in A(L)$, 则 $\overline{\phi}^+=p^+$;

(2) 若 $\phi=\neg p,p\in A(L)$, 则 $\overline{\phi}^+=p^-$;

(3) 若 $\phi=\varphi\vee\psi$, 则 $\overline{\phi}^+=\overline{\varphi}^+\vee\overline{\psi}^+$;

(4) 若 $\phi=\varphi\wedge\psi$, 则 $\overline{\phi}^+=\overline{\varphi}^+\wedge\overline{\psi}^+$;

(5) 若 $\phi=\varphi\supset\psi$, 则 $\overline{\phi}^+=\neg\overline{\varphi}^+\vee\overline{\psi}^+$;

(6) 若 $\phi=\neg\neg\psi$, 则 $\overline{\phi}^+=\overline{\psi}^+$;

(7) 若 $\phi=\neg(\varphi\vee\psi)$, 则 $\overline{\phi}^+=\overline{\neg\varphi}^+\wedge\overline{\neg\psi}^+$;

(8) 若 $\phi=\neg(\varphi\wedge\psi)$, 则 $\overline{\phi}^+=\overline{\neg\varphi}^+\vee\overline{\neg\psi}^+$;

(9) 若 $\phi=\neg(\varphi\supset\psi)$, 则 $\overline{\phi}^+=\overline{\varphi}^+\wedge\overline{\neg\psi}^+$.

记 $\overline{\Sigma}^+=\{\overline{\phi}^+\mid\phi\in\Sigma\}$. 注意, 实质蕴涵词由否定词与析取词定义, 因此对实质蕴涵词的变换隐含在对否定词与析取词的变换之中.

例 1.

(1) $p,\neg p\vee\neg q,q$ 变换为 $p^+,p^-\vee q^-,q^+$;

(2) $p\supset q$ 变换为 $\neg p^+\vee q^+$;

(3) $p\rightarrow q$ 变换为 $p^-\vee q^+$.

由例 1 可知, 变换对实质蕴涵词和内在蕴涵词作了不同的处理, 从而能在变换到的目标公式中体现出这两种不同蕴涵词之间的区别.

公式变换保证了把可能存在矛盾的公式集变换成为经典协调的公式集.

命题 3. 对任一公式集 W, $\overline{W}^+$ 是(经典)协调的.

定义 8[10]. 若对 L 中的任意原子 p, 公式集 E 包含 p 或 $\neg p$, 则称 E 是完全的.

定义 9. 设 E^+ 是 $\overline{L}^+$ 上的一个经典协调的公式集, 称 L 上的四值映射 v_{E^+} 是伴随 E^+ 的四值映射, 若 v_{E^+} 满足以下条件:

$$v_{E^+}(\phi)=\begin{cases}(1,1), & \overline{\phi}^+\in E^+,\overline{\neg\phi}^+\in E^+\\(1,0), & \overline{\phi}^+\in E^+,\neg\overline{\neg\phi}^+\in E^+\\(0,1), & \neg\overline{\phi}^+\in E^+,\overline{\neg\phi}^+\in E^+\\(0,0), & \neg\overline{\phi}^+\in E^+,\neg\overline{\neg\phi}^+\in E^+\end{cases}.$$

显然, 由 E^+ 的协调性保证了 v_{E^+} 的确是 $L\mapsto FOUR$ 的函数. 由 v_{E^+} 的定义形式可看出在这个变换下, $\overline{\phi}^+$ 是保留了 ϕ 是否成真的信息, ϕ 是否为假的信息则由 $\overline{\neg\phi}^+$ 保留.

定理 6. 若 $\overline{L}^+$ 中的理论 E^+ 是经典协调且完全的(经典)演绎闭包, 则伴随 E^+ 的四值映射 v_{E^+} 是 L 上的一个四值赋值, 即 v_{E^+} 满足对逻辑词的映射关系:

(1) $v_{E^+}(\neg\phi)=\neg v_{E^+}(\phi)$;

(2) $v_{E^+}(\phi\vee\psi)=v_{E^+}(\phi)\vee v_{E^+}(\psi)$;

(3) $v_{E^+}(\phi\wedge\psi)=v_{E^+}(\phi)\wedge v_{E^+}(\psi)$;

(4) $v_{E^+}(\phi\supset\psi)=v_{E^+}(\phi)\supset v_{E^+}(\psi)$.

定义 10. 令 v 是 L 上的四值赋值, 称 $\overline{L}^+$ 上的理论 E_v^+ 是伴随 v 的, 若

$$\begin{aligned}E_v^+=Th(&\{p^+\mid M(p)\in\{\mathrm{t},\top\}\}\cup\\&\{p^-\mid M(p)\in\{\mathrm{f},\top\}\}\cup\\&\{\neg p^+\mid M(p)\in\{\mathrm{f},\bot\}\}\cup\\&\{\neg p^-\mid M(p)\in\{\mathrm{t},\bot\}\}).\end{aligned}$$

命题 4. 若 $\overline{L}^+$ 中的公式集 E_v^+ 是伴随 v 的理论, 其中 v 是 L 上的四值赋值, 则 E_v^+ 是协调的演绎闭包.

定理 7. 设 E_v^+ 是伴随四值赋值 v 的理论, 则

(1) 若 $v(\phi)\in\{\mathrm{t},\top\}$, 则 $\overline{\phi}^+\in E_v^+$;

(2) 若 $v(\phi)\in\{\mathrm{f},\top\}$, 则 $\overline{\neg\phi}^+\in E_v^+$;

(3) 若 $v(\phi)\in\{\mathrm{f},\bot\}$, 则 $\neg\overline{\phi}^+\in E_v^+$;

(4) 若 $v(\phi)\in\{\mathrm{t},\bot\}$, 则 $\neg\overline{\neg\phi}^+\in E_v^+$.

于是可得 $\overline{L}^+$ 上的协调且完全的演绎闭包与 L 上的四值赋值之间的一一对应关系.

推论 1. 设 v 是 L 上的四值赋值, E^+ 是 $\overline{L}^+$ 中的完全理论, 则 v 是伴随 E^+ 的四值赋值当且仅当 E^+ 是伴随 v 的完全理论.

4.2 处理矛盾

缺省规则 $(\alpha:\beta/\gamma)$ 可表述为: 当我们有 α 成立的信息而缺乏 β 为假的信息时, 我们可缺省地引入 γ 成立的信息. 回顾前小节, $\overline{\phi}^+$ 与 $\overline{\neg\phi}^+$ 分别表示我们具有 ϕ 为真和 ϕ 为假的信息, 而 $\neg\overline{\phi}^+$ 和 $\neg\overline{\neg\phi}^+$ 则分别表明我们缺乏相应的信息. 由此可得缺省规则的变换.

定义 11. 基本缺省变换: $\mathcal{T}(D)=\{\overline{\alpha}^+:\neg\overline{\neg\beta}^+/$

$\overline{\gamma}^{+} \mid \alpha:\beta/\gamma\in D\}$.

由定义可以看出$\mathcal{T}(D)$的变换从形式上对前提与验证作了不同的变换，从而在形式上区分开了两种不同的信念，这与双缺省逻辑使用交叉验证的方式在双扩张求解过程中区分两种不同信念的方式不同[3].

从获取信息的角度，W 声明了已经获得的确定的信息，而缺省规则提供了从已有信息获得新信息的手段. 缺省扩张仅仅包含 W 声明的和由 W 出发使用 D 中缺省规则获得的那些信息，由 Γ 算子的最小性要求其余信息不应包括在扩张之中. 我们用缺省规则引入$\neg\overline{\phi}^{+}$（或$\neg\overline{\neg\phi}^{+}$）显式地声明我们缺乏 ϕ 为真（或 ϕ 为假）的信息，尽量使得扩张中所包含的信息极小化.

定义 12. $D^{k}=\left\{\dfrac{:\neg p^{+}}{\neg p^{+}},\dfrac{:\neg p^{-}}{\neg p^{-}}\,\middle|\, p\in A(L)\right\}$.

定义 13. 令 $T=(W,D)$是一个缺省理论，定义 $\mathcal{T}^{k}(T)=(\overline{W}^{+},\mathcal{T}(D)\cup D^{k})$.

事实上我们在推理中只关心缺省理论中出现过的命题，而这通常是有限的. 若取消 L 有限的限制对出现无限多个原子命题的（无限）缺省理论进行变换，则得到的 D^{k} 也无限，此时依然可以用求解无限缺省理论扩张的方法进行推理，因而这样的限制是非本质的.

$\mathcal{T}^{k}(T)$的缺省扩张中包含的公式保留了 L 中公式的信息，因此，若扩张包括公式$\overline{\phi}^{+}$，则我们认为该扩张使得 ϕ 为真. 注意到一个扩张可同时包括$\overline{\phi}^{+}$与$\overline{\neg\phi}^{+}$，即可包含矛盾的信息.

例 2. 设$W=\{\neg p,p\}$，$D=\{p:q/r\}$，$T=(W,D)$有唯一缺省扩张：$E=Th(p,\neg p)$. 对应地，$\overline{W}^{+}=\{p^{-},p^{+}\}$，$\mathcal{T}(D)\cup D^{k}=\{(p^{+}:\neg q^{-}/r^{+}),(:\neg p^{+}/\neg p^{+}),(:\neg p^{-}/\neg p^{-}),(:\neg q^{+}/\neg q^{+}),(:\neg q^{-}/\neg q^{-}),(:\neg r^{+}/\neg r^{+}),(:\neg r^{-}/\neg r^{-})\}$. $\mathcal{T}^{k}(T)$有唯一扩张：$E^{+}=Th(\{p^{+},p^{-},\neg q^{+},\neg q^{-},r^{+},\neg r^{-}\})$，此扩张使得 p 矛盾，r 为经典真，而 q 在此扩张下未知.

在缺省逻辑中，由缺省规则导致的某些矛盾也可以获得解决.

例 3. 设 $W=\varnothing$，$D=\{:p/q,:p/\neg q\}$，$T=(W,D)$没有缺省扩张. 对应地，$\overline{W}^{+}=\varnothing$，$T^{k}(D)\cup D^{k}=\{(:\neg p^{-}/q^{+}),(:\neg p^{-}/q^{-}),(:\neg p^{+}/\neg p^{+}),(:\neg p^{-}/\neg p^{-}),(:\neg q^{+}/\neg q^{+}),(:\neg q^{-}/\neg q^{-})\}$. $T^{k}(T)$有唯一缺省扩张：$E^{+}=\{\neg p^{+},\neg p^{-},q^{+},q^{-}\}$，此扩张下 q 矛盾，而 p 未知.

命题 5. $T^{k}(T)$的所有扩张都是$\overline{L}^{+}$协调且完全的.

证明. 假设 E^{+}不完全. 不妨设$p^{+},\neg p^{+}\notin E^{+}$，而$:\neg p^{+}/\neg p^{+}\in D^{k}$，由 Γ 算子定义应有$\neg p^{+}\in E^{+}$，矛盾. 证毕.

4.3 $\leq_{k}$-极小语义

缺省逻辑通过计算缺省扩张进行推理，而缺省扩张是一个在命题演算下封闭的演绎闭包，无法在同一扩张中既包含矛盾而又不包含所有命题，不能处理矛盾. 在本小节我们将给出缺省逻辑的$\leq_{k}$-极小语义，用“信息”极小四值模型表示缺省理论所表达的信念. 利用四值模型我们可以超协调地处理经典意义下的矛盾，使得四值缺省逻辑成为非单调超协调的逻辑系统.

根据缺省规则，我们在相信前提为真并且相信验证不假时将缺省地推导出结论成立. 经典二值模型所有公式均赋予经典真值，把 ϕ 为真与它不假都赋予相同的真值 t，这两种不同的情形无法区分，因此经典模型不适于表达信念. 因而，缺省逻辑通常采用一个模型类来表示信念[8]. 与经典模型不同，四值模型有非经典真值，可以对 ϕ 赋予真值$\top$，表明即使出现矛盾我们仍然相信 ϕ 成立；而对 ϕ 赋予真值$\bot$，则表明尽管我们不能肯定 ϕ 是否成立，但我们相信 ϕ 并非必然为假. 这样，四值模型能区分缺省规则的前提与验证所表达的不同信念.

回顾缺省扩张的定义，Γ 算子要求缺省扩张中所包含的公式在满足缺省理论的前提下尽可能地少，说明缺省理论表达的信念具有极小性，这就要求我们在对缺省理论表达的信念进行表示时应采用包含“信息”极小的四值模型. 在第 3 节已经定义了四值模型之间包含“信息”多少的偏序关系$\leq_{k}$，我们据此给出缺省逻辑的$\leq_{k}$-极小语义.

定义 14. 令 $T=(W,D)$是一个缺省理论. 设 M 是一个 L 上的四值赋值，M'是一个满足如下条件的$\leq_{k}$-极小四值赋值：

(1)M'是 W 的四值模型；

(2)对任意缺省规则 $\delta=(\alpha:\beta/\gamma)\in D$，若 $M'(\alpha)\in\{\mathrm{t},\top\}$且 $M(\beta)\in\{\mathrm{t},\bot\}$，则 $M'(\gamma)\in\{\mathrm{t},\top\}$.

称 M 是一个 T 的$\leq_{k}$-极小模型当且仅当对所有原子 $p\in A(L)$都有 $M'(p)=M(p)$.

注意到条件(2)中 $M(\beta)\in\{\mathrm{t},\bot\}$表明：若我们相信 β 为真自然认为 β 与我们的信念 M 协调，若我们不知道 β 的真假情况我们也认为 β 与我们的信念不矛盾. 在所有满足条件(1)，(2)的四值赋值中选择

$\leq_k$-极小元 M' 作为在缺省理论 T 信念 M 下的模型,若 M' 恰好与 M 相同则 M' 即为缺省理论 T 的 $\leq_k$-极小模型.

命题 6.　命题变元有限的语言 L 上只有有限多个四值赋值.

由于 L 上的四值赋值只有有穷多个,因此满足定义 14 中条件(1),(2)的 $\leq_k$-极小四值赋值必然存在.

定义 15.　令 T 是 L 上的缺省理论,ϕ 是 L 中的公式. 定义 $T\models^k\phi$,若所有 T 的 $\leq_k$-极小模型都是 ϕ 的模型.

定理 8.　设 $T=(W,\varnothing)$ 是 L 上的缺省理论,M 是 L 上的四值赋值,则 M 是 T 的 $\leq_k$-极小模型当且仅当 M 是 W 的 k-极小模型.

证明.　由缺省理论的 $\leq_k$-极小模型的定义直接可得.

推论 2.　$(W,\varnothing)\models^k\phi$ 当且仅当 $W\models^k\phi$.

在四值语义下缺省逻辑可以处理矛盾.

例 4.　$W=\varnothing$,$D=\{:p/r,:p/\neg r\}$,T 没有缺省扩张但 T 有一个唯一的 $\leq_k$-极小模型:$M(p)=\bot$,$M(r)=\top$. 即 $T\models^k r$,$T\models^k\neg r$,$T\not\models^k p$.

例 5(Tweety dilemma).　文献[6]中给出了对此问题采用四值逻辑的知识表示如下:

$$W_0=\begin{cases}bird\_Tweety\rightarrow fly\_Tweety\\ penguin\_Tweety\supset bird\_Tweety\\ penguin\_Tweety\supset\neg fly\_Tweety\end{cases}.$$

令 $W=W_0\cup\{bird\_Tweety\}$,$W'=W_0\cup\{penguin\_Tweety\}$. 表 1 给出了 W 和 W' 的 k-极小模型(见定义 5).

表 1　W 和 W' 的 k-极小模型

	W		W'	
	M_1	M_2	M_3	M_4
$bird\_Tweety$	t	$\top$	$\top$	t
fly_Tweety	t	$\bot$	f	$\top$
$penguin\_Tweety$	$\bot$	$\bot$	t	t

基于四值逻辑的 k-极小推理,当我们仅仅知道 Tweety 是鸟时,我们不能得出 Tweety 会飞的合理推断. 当我们知道 Tweety 是企鹅时,我们却对 Tweety 是不是鸟产生了疑问(在 M_3 中,$bird\_Tweety$ 被赋值为矛盾).

我们可以采用缺省理论对此问题重新表示,其中 $(p\wedge\neg p)$ 代表可能出现的任意矛盾:

$$T_0=\begin{cases}p\wedge\neg p,\\ penguin\_Tweety\supset bird\_Tweety,\\ penguin\_Tweety\supset\neg fly\_Tweety,\\ bird\_Tweety:fly\_Tweety/fly\_Tweety.\end{cases}$$

记 $T_0=(W_0,D)$,$T=(W,D)$,$W=W_0\cup\{bird\_Tweety\}$,$W'=W\cup\{penguin\_Tweety\}$,$T'=(W',D)$. T 与 T' 具有 $\leq_k$-极小模型,如表 2 所示.

表 2　T 与 T' 的 $\leq_k$-极小模型

	T	T'
	M_1	M_2
$bird\_Tweety$	t	t
fly_Tweety	t	f
$penguin\_Tweety$	$\bot$	t
p	$\top$	$\top$

在缺省逻辑的四值语义中,我们可以获得预期的结果:当我们仅仅知道 Tweety 是鸟时,可以推断出它会飞;当我们知道 Tweety 其实是企鹅时,修正以前的推理得到 Tweety 不会飞的结论,而不会对它是不是鸟产生怀疑.

在前面的例子中可以看到,四值缺省逻辑具有与缺省逻辑相当的推理能力,并能有效地做到矛盾的局部化,使矛盾 $p\wedge\neg p$ 的存在不影响关于 Tweety 的推理.

4.4　计算 $\leq_k$-极小模型

由命题 1 知道,通过变换我们可以得到在 $\overline{L}^+$ 中完全的协调演绎闭包,再由 4.1 节,$\overline{L}^+$ 中的完全且协调的演绎闭包与 L 上的四值模型之间具有一一对应的关系. 这样,我们可通过采用变换技术在 $\overline{L}^+$ 中计算扩张的方法来求解 L 上的缺省理论的四值模型.

定理 9.　设 $T=(W,D)$ 是 L 上的缺省理论,E^+ 是 $T^k(T)$ 的扩张,则伴随 E^+ 的四值赋值 M 是 T 的 $\leq_k$-极小模型.

证明.　假设 $M'<_k M$ 且满足:

(1) M' 是 W 的四值模型;

(2) 对任意 D 中规则 $(\alpha:\beta/\gamma)$,若 $M'(\alpha)\in\{t,\top\}$ 且 $M(\beta)\in\{t,\bot\}$,则 $M'(\gamma)\in\{t,\top\}$.

则伴随 M' 的 E'^+ 满足:

(D1) $E'^+=Th(E'^+)$;

(D2) $\overline{W}^+\subseteq E'^+$;

(D3) 对所有 $\delta\in T(D)\cup D^k$,若 $Pre(\delta)\in E'^+$ 且 $\neg Jus(\delta)\notin E^+$,则 $Cons(\delta)\in E'^+$.

我们只需证(D3),对 $T(D)$ 中缺省规则由 E'^+ 的定义直接可得;对 D^k 中缺省规则,若 $\neg p^+\in E^+$,则 $M(p)\in\{f,\bot\}$,由 $M'<_k M$ 有 $M'(p)\in\{f,\bot\}$,因此 $\neg p^+\in E'^+$. 同理可得若 $\neg p^-\in E^+$ 则 $\neg p^-\in E^-$.

由 Γ 算子的极小性有 $\Gamma(E^+)\subseteq E'^+$,而 $E^+=\Gamma(E^+)$,因此 $E^+\subseteq E'^+$. 注意到 E^+ 和 E'^+ 都是完全

的，所以必有 $E^+=E'^+$，即有 $M=M'$，与假设矛盾.

由 M' 选取的任意性，对所有满足条件(1)(2)的 M' 都有 $M'\not<_k M$，由定义 14 立知 M 是 T 的 $\le_k$-极小模型. 证毕.

定理 10. 若 M 是 $T=(W,D)$ 的 $\le_k$-极小模型，则伴随 M 的完全理论 E^+ 是 $T^k(T)$ 的扩张，其中 D 是前提为空的缺省规则集.

证明.

由 M 是 W 的四值模型有 $\overline{W}^+\subseteq E^+$(定理 7). 若 $M(\beta)\in\{t,\bot\}$，则 $M(\neg\beta)\notin\{t,\top\}$，$\overline{\neg\beta}^+\notin E^+$. 若 $M(\gamma)\in\{t,\top\}$，则 $\overline{\gamma}^+\in E^+$. 由 E^+ 的完全性有若 $p^+\notin E^+$ 则 $\neg p^+\in E^+$. 于是，E^+ 满足(注意 D 中缺省规则前提为空)：

(1) $E^+=Th(E^+)$；

(2) $\overline{W}^+\subseteq E^+$；

(3) 若对所有 $\delta\in T(D)\cup D^k$ 都有 $\neg Jus(\delta)\notin E^+$，则 $Cons(\delta)\in E^+$.

因此 $\Gamma(E^+)\subseteq E^+$. 记 $\Gamma(E^+)=E_0^+$，即 E_0^+ 是满足下列条件的最小公式集：

(1) $E_0^+=Th(E_0^+)$；

(2) $\overline{W}^+\subseteq E_0^+$；

(3) 若对所有 $\delta\in T(D)\cup D^k$ 都有 $\neg Jus(\delta)\notin E^+$，则 $Cons(\delta)\in E_0^+$.

若 $\neg p^+\in E^+$，由 $:\neg p^+/\neg p^+\in D^k$ 有 $\neg p^+\in E_0^+$(类似可得 p^- 情形). 于是：若 $E'^+\subset E^+$ 则必有某 $p^+\in E^+$($p^-\in E^+$)，但 $p^+\notin E'^+$($p^-\notin E'^+$). 若 $p^+\in E^+$，$p^+\notin E_0^+$，由 $E'^+\subset E^+$ 知 $\neg p^+\notin E'^+$. 即有 p^+，$\neg p^+\notin E'^+$. 若 $p^-\in E^+$，$p^-\notin E_0^+$，由 $E'^+\subset E^+$ 知 $\neg p^-\notin E'^+$. 即有 p^-，$\neg p^-\notin E'^+$.

如下定义集合序列：

(i) $F_0^+=E_0^+$

(ii) 若存在 p^+，$\neg p^+\notin F_i^+$($p^-\in E^+$，$\neg p^-\notin F_i^+$)，则令 $F_{i+1}^+=Th(F_i^+\cup\{\neg p^+\})$($F_{i+1}^+=Th(F_i^+\cup\{\neg p^-\})$)

(iii) 否则 $F_{i+1}^+=F_i^+$.

记 $E'^+=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}F_i^+$.

由构造过程知对所有 i 都有 F_i 协调，于是 E'^+ 是协调的演绎闭包：

(D1) $E'^+=Th(E'^+)$；

(D2) $\overline{W}^+\subseteq F_0^+\subseteq E'^+$；

(D3) 对所有 $\delta\in T(D)\cup D^k$，都有若 $\neg Jus(\delta)\notin E^+$，则 $Cons(\delta)\in E_0^+\subseteq E'^+$.

由 E'^+ 构造的四值模型 M' 显然是 W 的模型且满足对 D 中任意规则($:\beta/\gamma$)都有：若 $M(\beta)\in\{t,\bot\}$，则 $M'(\gamma)\in\{t,\top\}$.

由 E'^+ 的构造方式易知，若 $E'^+\neq E^+$ 则 $M'<_k M$，这与题设 M 的 $\le_k$-极小性相矛盾，所以 $E'^+=E^+$. 即 E^+ 是 T^k 的缺省扩张. 证毕.

要求缺省规则前提为空虽然削弱了表达能力，但仍然强于限制逻辑，与自认知逻辑相当[11,12].

4.5 弱 $\le_k$-极小推理

缺省扩张的存在性是缺省逻辑中的一个重要问题，对于四值缺省逻辑则是缺省理论的四值模型的存在性问题.

例 6. $T=(\varnothing,D)$，其中 $D=\{(:p\wedge\neg q/\neg q),(:q\wedge\neg r/\neg r),(:r\wedge\neg p/\neg p)\}$. T 既没有缺省扩张也没有 $\le_k$-极小模型.

为了保证缺省扩张的存在，我们将给出一种缺省理论的弱变换，保证在此变换下所有缺省理论都有扩张.

定义 16. 弱缺省变换

$$T_w(D)=\left\{\frac{\overline{\alpha}^+:\neg\overline{\neg\beta}^+\wedge\overline{\gamma}^+}{\neg\overline{\neg\beta}^+\wedge\overline{\gamma}^+}\,\middle|\,\frac{\alpha:\beta}{\gamma}\in D\right\}.$$

定义 17. $T_w^k(T)=(\overline{W}^+,T_w(D)\cup D^k)$.

可见，弱缺省变换把所有缺省理论都变换成正规缺省理论，因此在此变换下所有缺省理论都有扩张. Lukaszewicz 曾经把缺省规则($\alpha:\beta/\gamma$)转换成缺省规则($\alpha:\beta\wedge\gamma/\beta\wedge\gamma$)[8]，据此，$T(\alpha:\beta\wedge\gamma/\beta\wedge\gamma)=(\overline{\alpha}^+:\neg\overline{\neg\beta}^+\wedge\neg\overline{\neg\gamma}^+/\overline{\beta}^+\wedge\overline{\gamma}^+)$. 注意到，直接在变换之前进行这样的转换混淆了验证和结论，破坏了验证与结论在缺省规则中的不同作用. 由变换之后再作这样的转换则能够从形式上区分开验证与结论，并把我们缺乏验证不能成立的信息显式地在缺省扩张中加以声明.

定义 18. 设 M 是 L 上的四值赋值，M' 是 L 上满足以下条件的 $\le_k$-极小赋值：

(1) M' 是 W 的四值模型；

(2) 对 D 中任意缺省规则($\alpha:\beta/\gamma$)都有：若 $M'(\alpha)\in\{t,\top\}$，$M(\beta)\notin\{f,\top\}$ 且 $M(\gamma)\in\{t,\top\}$，则 $M'(\gamma)\in\{t,\top\}$，$M'(\beta)\in\{t,\bot\}$.

称 M' 是一个 T 的弱 $\le_k$-极小模型当且仅当对所有原子 $p\in A(L)$ 都有 $M'(p)=M(p)$.

定义 19. 令 T 是 L 上的缺省理论，ϕ 是 L 中的公式. 定义 $T\models_w^k\phi$，若对所有 T 的弱 $\le_k$-极小模型都是 ϕ 的模型.

定理 11. M 是 $(W,\varnothing)$ 的弱 $\le_k$-极小模型，当且仅当 M 是 W 的 k-极小模型.

定理 12. $(W,\varnothing)\models_w^k\phi$，当且仅当 $W\models^k\phi$.

定理 13. 令 T 是前提为空的缺省理论，则 T 的所有 $\leq_k$-极小模型都是 T 的弱 $\leq_k$-极小模型.

定理 13 是定理 10、定理 16 及定理 14 的推论.

定理 14. 设 T 是 L 上的缺省理论，若 E^+ 是 $T_w^k(T)$ 的扩张，则伴随 E^+ 的四值赋值 M 是 T 的弱 $\leq_k$-极小模型.

证明. 仿定理 9 可证.

定理 15. 若 M 是 T 的弱 $\leq_k$-极小模型，则伴随 M 的完全理论 E^+ 是 $T_w^k(T)$ 的缺省扩张，其中 D 是前提为空的缺省规则集.

证明. 仿定理 10 可证.

定理 14、定理 15 表明前提为空的缺省逻辑的弱 $\leq_k$-极小四值模型与缺省扩张具有一一对应关系，由此缺省逻辑的弱 $\leq_k$-极小四值模型也必然存在.

定理 16. $T^k(T)$ 的缺省扩张也是 $T_w^k(T)$ 的缺省扩张.

证明. 设 $T=(W,D)$，E^+ 是 $T^k(T)$ 的缺省扩张，则有

(1) $E^+=Th(E^+)$；

(2) $\overline{W}^+\subseteq E^+$；

(3) 对所有 $\delta\in T(D)\cup D^k$ 都有：若 $Preq(\delta)\in E^+$ 且 $\neg Jus(\delta)\notin E^+$，则 $Cons(\delta)\in E^+$.

若 $\overline{\neg\beta}^+\vee\neg\overline{\gamma}^+\notin E^+$，则由 E^+ 是完备的演绎闭包有：$\overline{\neg\beta}^+$，$\neg\overline{\gamma}^+\notin E^+$，由此 $\neg\overline{\neg\beta}^+$，$\overline{\gamma}^+\in E^+$，再次使用完备演绎闭包的性质有：$\neg\overline{\neg\beta}^+\wedge\overline{\gamma}^+\in E^+$. 于是：

(D1) $E^+=Th(E^+)$；

(D2) $\overline{W}^+\subseteq E^+$；

(D3) 对所有 $\alpha:\beta/\gamma\in D$ 都有：若 $\overline{\alpha}^+\in E^+$ 且 $\overline{\neg\beta}^+\vee\neg\overline{\gamma}^+\notin E^+$，则 $\neg\overline{\neg\beta}^+\wedge\overline{\gamma}^+\in E^+$；

(D4) 对所有 $\delta\in D^k$ 都有：若 $\neg Jus(\delta)\notin E^+$，则 $Cons(\delta)\in E^+$.

因此 $\Gamma(E^+)\subseteq E^+$.

由于 D^k 的存在，仿定理 9 证明过程可得 $\Gamma(E^+)=E^+$，即 E^+ 是 $T_w^k(T)$ 的缺省扩张. 证毕.

5 为四值模型增加约束

在第 4.3 节中，我们定义了缺省理论的 $\leq_k$-极小模型表达信念，并证明了这样的 $\leq_k$-极小四值模型可以由变换技术通过计算缺省理论的扩张得到.

四值模型代表的信念允许不协调性的存在，事实上，由于使用真值 $\top$ 和 $\bot$，使得这样的信念具有不协调非经典的信念性质. 在本节中，我们将为缺省逻辑可能有的信念加以约束以表达不协调信念的非经典性，提出缺省逻辑的其它四值语义. 同样地，我们对缺省理论进行新的变换并建立了扩张与这些四值模型之间的对应关系.

5.1 $\leq_k$-极小最协调(最经典)模型

为缺省理论的 $\leq_k$-极小模型增加协调性与经典性的约束时也必须保持获得信息的极小性，若 $M=_{I_1(I_2)}M'$（即 $M\leq_{I_1(I_2)}M'$ 且 $M'\leq_{I_1(I_2)}M$），则称 M 与 M' 协调性(经典性)相同，$\leq_k$ 优先关系被约束在协调性(经典性)相同的赋值内比较.

定义 20. 称四值赋值 $M\leq_{kI_1}M'$ ($M\leq_{kI_2}M'$)，若：

(1) $M\leq_{I_1(I_2)}M'$ 且 $M'\not\leq_{I_1(I_2)}M$（即 $M<_{I_1(I_2)}M'$），或

(2) $M=_{I_1(I_2)}M'$ 且 $M\leq_k M'$

显然 $\leq_{kI_1}$ 和 $\leq_{kI_2}$ 都是定义在四值赋值中的偏序关系. 若 M 是 Mod 中关于偏序关系 $\leq_{kI_1}$ ($\leq_{kI_2}$) 的极小元，则称四值赋值 M 是 Mod 中的 $\leq_k$-极小最协调(最经典)赋值.

定义 21. 若 M 是 L 上的四值赋值，设 M' 是 L 上满足以下条件的 $\leq_k$-极小最协调(经典)四值赋值：

(1) M' 是 W 的四值模型；

(2) 对 D 中任意缺省规则 $(\alpha:\beta/\gamma)$ 都有：若 $M'(\alpha)\in\{t,\top\}$ 且 $M(\beta)\in\{t,\bot\}$，则 $M'(\gamma)\in\{t,\top\}$.

称 M' 是 T 的 $\leq_k$-极小最协调(最经典)模型当且仅当 $\forall p\in A(L)$ 都有 $M'(p)=M(p)$.

定义 21 说明我们在所有满足条件 (1)，(2) 的四值赋值中选择关于偏序关系 $\leq_{kI_1}$ ($\leq_{kI_2}$) 的极小元作为缺省理论 T 在信念 M 下的 $\leq_k$-极小最协调(最经典)模型，若 M' 恰好与 M 相同则称为 T 的 $\leq_k$-极小最协调(最经典)模型.

定理 17. $(W,\varnothing)$ 的所有 $\leq_k$-极小最协调(最经典)模型都是 W 的最协调(最经典)模型.

证明. 由定义 20，定义 21 及定义 5 直接可得. 证毕.

例 6(续). Tweety 问题在四值逻辑表示下的最协调四值模型如表 3 所示(参见文献[6])，运用四值缺省逻辑求得的 $\leq_k$-极小最协调模型如表 4 所示.

表 3 Tweety 问题四值逻辑表示下的最协调四值模型

	W		W'	
	M_1	M_2	M_3	M_4
bird_Tweety	t	t	$\top$	t
fly_Tweety	t	t	f	$\top$
penguin_Tweety	f	$\bot$	t	t

表 4　运用四位缺省逻辑求得的$\leq_k$-极小最协调模型

	T	T'
	M_1	M_2
$bird\_Tweety$	t	t
fly_Tweety	t	f
$penguin\_Tweety$	$\bot$	t
p	$\top$	$\top$

在上述例子中采用缺省理论进行知识表示可获得比四值逻辑的最协调、最经典模型更少的四值模型. 同时，运用四值缺省逻辑可获得与运用缺省逻辑在 W 中不包含矛盾 $p\wedge\neg p$ 时得到相同的结论①.

5.2　优先缺省扩张

有序缺省理论是在缺省理论的基础之上增加缺省规则之间的优先偏序关系$\prec$，把缺省扩张扩展成为三元组：$T=(W,D,\prec)$，偏序关系决定缺省规则应用的优先顺序，缺省规则应用的顺序由良基列举表达.

定义 22[13]. 设 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$ 是 $GD(E,T)$ 的一个列举，若对所有的 i 都满足：

$$W\cup Cons(\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{i-1}\})\vdash(\delta_i),$$

则称这个列举是 $GD(E,T)$ 的良基列举.

有序缺省理论的优先扩张是指保持缺省规则偏序关系的那一部分扩张.

定义 23[13]. 设 (W,D) 是一个缺省理论，$\prec\subseteq D\times D$ 是 D 上的严格偏序关系. (W,D) 的缺省扩张 E 称为保$\prec$的，如果存在 $GD(E,T)$ 的一个良基排列 $\langle\delta_i\rangle_{i\in I}$ 满足对所有的 $i,j\in I$ 和 $\delta\in D\backslash GD(E,T)$，都有：

(1) 如果 $\delta_i\prec\delta_j$，则 $j<i$，并且

(2) 如果 $\delta_i\prec\delta$，则 $pre(\delta)\notin E$ 或 $W\cup Cons(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_{i-1})\vdash\neg Jus(\delta)$.

可以把有序缺省理论有效地变换成普通的缺省理论直接计算得出满足优先级约束的缺省扩张[13]：首先，将一阶语言 L 中的有序缺省理论 T 转换至一阶语言 L' 的普通缺省理论 T'，计算其缺省扩张 E'，再将 E' 中不是 L 中公式的部分去掉就得到 T 的保$\prec$缺省扩张 E.

定理 18[13]. 设 (W,D) 是一个缺省理论，$\prec\subseteq D\times D$ 是 D 上的严格偏序关系，则 E 是 (W,D) 的保$\prec$扩张当且仅当 $E=E'\cap L$，其中 E' 是 (W',D') 的缺省扩张.

推论 3[13]. 设 $(W,D,\prec)$ 是一个有序缺省理论，若 E' 是 T' 的缺省扩张，则 $E'\cap L$ 是 (W,D) 的缺省扩张.

5.3　计算$\leq_k$-极小最协调(最经典)模型

在文献[13]中，L' 是一阶语言，T' 是包括唯一名假设和域封闭假设的缺省理论. 为简便起见，本文忽略 L' 中的计算，仍然只在命题语言内讨论. 注意到 $(W,D,\prec)$ 的保$\prec$的缺省扩张必是 (W,D) 的缺省扩张(推论 3).

我们可以在 D^k 中增加优先级更高的确定命题是否为协调(经典)真值的缺省规则来实现最协调(最经典)四值缺省推理.

定义 24.

$$D^{I_1}=\left\{\frac{:\neg p^+\vee\neg p^-}{\neg p^+\vee\neg p^-},\frac{:\neg p^+}{\neg p^+},\frac{:\neg p^-}{\neg p^-}\,\middle|\,p\in A(L)\right\}.$$

定义 25.

$$D^{I_2}=\left\{\frac{:p^+\leftrightarrow\neg p^-}{p^+\leftrightarrow\neg p^-},\frac{:\neg p^+}{\neg p^+},\frac{:\neg p^-}{\neg p^-}\,\middle|\,p\in A(L)\right\}.$$

定义 26. $T^d=(\overline{W}^+,T(D)\cup D^d,\prec_d)$，其中 $d=I_1,I_2$：

$$\prec_{I_1}=\{\delta_k\prec\delta_c\mid\delta_k\in D^k,\delta_c\in D_c\},$$

$$D_c=\left\{\frac{:\neg p^+\vee\neg p^-}{\neg p^+\vee\neg p^-}\,\middle|\,p\in\overline{L}^+\right\}.$$

$$\prec_{I_2}=\{\delta_k\prec\delta_e\mid\delta_k\in D^k,\delta_e\in D_e\},$$

$$D_e=\left\{\frac{:p^+\leftrightarrow\neg p^-}{p^+\leftrightarrow\neg p^-}\,\middle|\,p\in\overline{L}^+\right\}.$$

例 7. $W=\{\neg p,p\}$，$D=\{p:/q\}$. $T^{I_1}(T)$ 有唯一扩张：$E^+=Th(\{p^+,p^-,q^+,\neg q^-\})$. $T^{I_2}(T)$ 有唯一扩张：$E^+=Th(\{p^+,p^-,q^+,\neg q^-\})$.

例 8. 设有缺省理论 $T=(W,D)$，其中 $W=\varnothing$，$D=\{:p/q,:p/\neg q\}$. $T^{I_1}(T)$ 有唯一缺省扩张：$E^+=\{\neg p^+,\neg p^-,q^+,q^-\}$. $T^{I_2}(T)$ 有扩张：

$$E_1^+=\{p^+,\neg p^-,q^+,q^-\},$$

$$E_2^+=\{\neg p^+,p^-,q^+,\neg q^-\},$$

$$E_3^+=\{\neg p^+,p^-,\neg q^+,q^-\}.$$

定理 19. $T^{I_1(I_2)}(T)$ 的保$\prec$缺省扩张是 $\overline{L}^+$ 协调且完全的.

证明. 设 $T^{I_1(I_2)}(T)$ 有不完全缺省扩张 E^+. 不妨设 $p^+,\neg p^+\notin E^+$，而 $:\neg p^+/\neg p^+\in D^k$，由 Γ 算子定义应有 $\neg p^+\in E^+$，矛盾. 证毕.

引理 1. 设 $T=(W,D)$ 是 L 上前提为空的缺省理论，E^+ 是 $T^{I_1(I_2)}(T)$ 的保$\prec$缺省扩张，则必有良基缺省规则序列 $\delta_1,\cdots,\delta_l,\delta_{l+1},\cdots,\delta_m,\delta_{m+1}\cdots,\delta_n$ 满足优先性约束：

(1) 如果 $\delta_i\prec\delta_j$，则 $j<i$，并且

(2) 如果 $\delta_i\prec\delta$，则 $pre(\delta)\notin E^+$ 或 $W\cup Cons(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_{i-1})\vdash\neg Jus(\delta)$.

① 注意连接词$\supset$，在运用缺省逻辑进行推理时，实际上是把$\supset$符号全部替换为$\rightarrow$之后再求扩张.

其中，$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l\in T(D)$，$\delta_{l+1},\cdots,\delta_m\in D_c(D_e)$，$\delta_{m+1}\cdots,\delta_n\in D^k$.

证明. 记 $D_c(D_e)$为 D_p.

由 E^+是 $T^{I_1(I_2)}(T)$的保$\prec$缺省扩张，必有缺省规则序列：$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$满足优先条件：

(1)如果 $\delta_i\prec\delta_j$，则 $j<i$，并且

(2)如果 $\delta_i\prec\delta$，则 $pre(\delta)\notin E^+$ 或 $W\cup Cons(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_{i-1})\vdash\neg Jus(\delta)$.

若 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$不具题设形式，则必有 δ_i与 δ_j满足$(i<j)$且

①$\delta_i\in D_p,\delta_j\in T(D)$或

②$\delta_i\in D_k,\delta_j\in T(D)$.

将 δ_j移至δ_i前所得序列记为 S. 由于 δ_i与 δ_j不具比较关系，S 仍然满足优先条件(1). 此时都只需对 S 中 δ_i之后的缺省规则判断是否满足优先条件(2). 由 S 的构造过程，编号小于 i 的缺省规则不受影响，不存在比 δ_j优先级更高的δ，对于 $\delta_i,\cdots,\delta_n$，$\vdash$左端公式数目增加，由命题逻辑的单调性立即有 S 也满足优先条件(2).

如此不断地对序列调整必然在有限步内构造出符合题设条件的良基缺省规则序列. 证毕.

定理 20. 设 $T=(W,D)$是 L 上的前提为空的缺省理论，E^+是 $T^{I_1(I_2)}(T)$的保$\prec$缺省扩张，则伴随 E^+的四值模型 M 是 T 的$\le_k$-极小最协调(最经典)模型.

证明. 任意的满足优先条件(1)(2)基缺省规则序列：$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$都可构造出

$$\delta'_1,\delta'_2,\cdots,\delta'_l,\delta'_{l+1},\cdots,\delta'_m,\delta'_{m+1},\cdots,\delta'_n,$$

其中 $\delta'_1,\ \delta'_2,\ \cdots,\ \delta'_l\in T_1(D)$，$\delta'_{l+1},\ \cdots,\ \delta'_m\in\left\{\dfrac{:\neg p^+\vee\neg p^-}{\neg p^+\vee\neg p^-}\,\middle|\,p\in A(L)\right\}\left(\,\Bigg|\left\{\dfrac{:p^+\leftrightarrow\neg p^-}{p^+\leftrightarrow\neg p^-}\,\middle|\,p\in A(L)\right\}\right)$(为简单起见，$D_c,D_e$部分规则统一记作 D_p)，$\delta'_{m+1},\cdots,\delta'_n\in D^k$.

用反证法，设存在 $M'<_{I_1(I_2)}M$，且满足：

(1)M'是 W 的四值模型；

(2)对 D 中任意缺省规则$(:\beta/\gamma)$都有：若 $M(\beta)\notin\{\mathrm{f},\top\}$则 $M'(\gamma)\in\{\mathrm{t},\top\}$.

设 E'^+是伴随 M'的完全理论，则：$\delta'_1,\delta'_2,\cdots,\delta'_l,\delta'_{l+1},\cdots,\delta'_m\in GD(E^+,T^k)$. 由 $M'<_{I_1(I_2)}M$，必有 D_p中缺省规则 δ 满足：$Cons(\delta)\in E'^+$且$\neg Jus(\delta)\in E^+$. 由此 $\delta\notin GD(E^+,T^{I_1(I_2)}(T))$.

显然 $\delta_{m+1}\prec\delta$，由此 $\delta'_1,\delta'_2,\cdots,\delta'_l,\delta'_{l+1},\cdots,\delta'_m,\delta'_{m+1},\cdots,\delta'_n$不是 $T^k(T)$的满足优先条件的基缺省规则序列，因此 E^+不是保$\prec$缺省扩张，矛盾，因此 $M'\not<_{I_1(I_2)}M$.

仿定理 9 可证$\le_k$-极小性，即 $M'\not<_kM$.

由 M',M''选取的任意性可得 M 是 T 的$\le_k$-极小最协调(最经典)模型. 证毕.

定理 21. 设 M 是 $T=(W,D)$的$\le_k$-极小最协调(最经典)模型，则伴随 M 的完全理论 E^+是 $T^{I_1(I_2)}$的保$\prec$缺省扩张，其中 T 是前提为空的缺省理论，即 D 是前提为空的缺省规则集.

证明. 仿定理 10 可证 E^+是 $T^{I_1(I_2)}$不考虑优先级时的扩张. 因此只需证 E^+保持优先级$\prec$：

设伴随 M 的E^+不符合优先级，则对任意形如：$\delta'_1,\delta'_2,\cdots,\delta'_l,\delta'_{l+1},\cdots,\delta'_m,\delta'_{m+1},\cdots,\delta'_n$的缺省规则序列都不满足优先条件，其中 $\delta'_1,\delta'_2,\cdots,\delta'_l\in T(D)$，$\delta'_{l+1},\cdots,\delta'_m\in D_p,\delta'_{m+1},\cdots,\delta'_n\in D^k$. 由所有缺省规则前提均为空知，必然存在不在 $GD(E^+,T^{I_1(I_2)})$中的 $\delta''\in D_p$ 满足 $\delta'_{m+1}\prec\delta''$且$W\cup Cons(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_m)\nvdash\neg Jus(\delta)$.

记 $F'=\overline{W}^+\cup Cons(\delta'_1,\delta'_2,\cdots,\delta'_l,\delta'_{l+1},\cdots,\delta'_m)$，显然 F 协调且 $F'\nvdash\neg Jus(\delta'')$，而 δ''是正规缺省规则，所以 $F''=F'\cup Cons(\delta'')$也协调.

设 E''^+是规范缺省理论(F'',D^k)的缺省扩张，显然 E''^+协调且完全，伴随 E''^+的四值赋值 M''是满足以下条件的$\le_k$-极小四值赋值：

(1)M''是 W 的四值模型；

(2)对任意 D 中规则$(:\beta/\gamma)$，若 $M(\beta)\notin\{\mathrm{f},\top\}$，则 $M''(\gamma)\in\{\mathrm{t},\top\}$.

由 F''和 M''的构造有 $M'<_{I_1(I_2)}M$ 与题设矛盾. 因此 E^+是 $T^{I_1(I_2)}$的保$\prec$缺省扩张. 证毕.

6 相关工作

符号系统[2]实际上是作为一种超协调推理提出的，虽然也使用缺省逻辑对矛盾进行处理，但符号系统中的缺省规则的作用是将目标语言$\overline{L}^+$中的原子在保证协调性的前提下再反向变换至 L 中的原子，以尽量恢复原来的理论，而不能用于知识表示. 与符号系统不同，四值缺省逻辑是一个非单调超协调推理系统，采用缺省理论进行知识表示并具有四值语义.

双缺省逻辑[3]将缺省理论分别通过正、负变换转换至双缺省理论，采用交叉验证的方式计算双扩张. 双缺省逻辑的一个重要结果是当缺省理论协调时所有的缺省扩张都可简单转换成相应双缺省理论的双扩张. 这样双缺省逻辑就是缺省逻辑的一个超

协调扩展.而本文提出的方法则是将 L 上的缺省理论变换至$\overline{L}^+$上,再计算缺省扩张并最终对应到缺省理论的四值模型,在计算过程中并未改变缺省扩张的定义形式.我们的变换保证了从$\overline{L}^+$中的缺省扩张到 L 上的四值模型之间的一一对应关系.缺省逻辑的四值模型可以利用现有缺省逻辑推理机进行计算.另一方面,由于双缺省扩张可能不完备且包含由正、负变换带来的冗余信息,这样的映射可能出现违反四值逻辑连接词的语义解释,实际上不是一个四值赋值函数,例如,这样的映射可能会出现将 ϕ 与 ψ 均映射为$\top$,$(\phi\wedge\psi)$却被映射为 f 的情况.与双缺省逻辑不同,我们为缺省理论定义了各种四值模型,使得我们的四值缺省逻辑具有四值语义.这样,我们可以采用通常的手段求解扩张,却能按四值语义处理矛盾.

Arieli 等人提出的用限制逻辑计算各种四值优先模型的方法[7]表明四值优先推理仅相当于限制逻辑的表达能力.而限制逻辑的表达能力是比较弱的,甚至弱于前提为空的缺省逻辑,只与缺省逻辑中前提为空的正规缺省逻辑的表达能力相当[11,12],四值缺省逻辑可用缺省逻辑计算四值模型,扩展了四值逻辑的推理能力,我们证明了四值逻辑的各种优先推理模式只与四值缺省逻辑缺省规则为空的片断的推理能力相当.在文献[7]中并未对限制公式进行变换,而我们则把变换技术扩展到对缺省规则按照其直观解释进行变换,使得四值缺省逻辑仍然采用缺省理论作其知识表示.

在文献[2,7,9]中都仅仅提供了对经典理论的变换而没有对缺省规则或限制表达式等非单调知识表示进行处理,因而本质上仍然是超协调推理方法.双缺省逻辑[3]作为缺省逻辑的一个能处理矛盾的变种未能建立与四值逻辑等超协调推理系统之间的比较关系.四值缺省逻辑则既保留了缺省逻辑对不完全知识的直观表示和强大推理能力,其拥有的四值语义又是四值逻辑(各种优先推理模式)的扩展.

7　结　论

由于常识难于被精确地描述,我们往往只能获得不完全的知识表示,使得常识推理具有非单调特征;另一方面,知识之间可能发生冲突,在需要对不同来源的海量知识进行推理的场合,冲突几乎无法避免.然而,大多数非单调逻辑基于经典逻辑不能处理矛盾.本文提出的方法赋予缺省逻辑处理矛盾的能力并具有四值语义.

本文首先使用公式变换技术,使得$\overline{\phi}^+$与$\overline{\neg\phi}^+$分别保留 ϕ 为真和为假的信息,而$\neg\overline{\phi}^+$与$\neg\overline{\neg\phi}^+$则相应地声明缺乏这些信息.基于这种对信息保留的解释,我们把缺省规则的前提与验证作不同的变换,使得两种不同的信念在形式上得以区分,从而将公式变换扩展至对缺省理论的变换.在这样的变换之下,所有缺省理论的扩张均不平凡,使得缺省逻辑可以处理含矛盾的知识.运用公式变换技术,甚至某些由缺省规则引入的矛盾也能够被合理的处理而具有缺省扩张.

本文为缺省理论定义了四值语义,给出一种四值缺省逻辑.四值缺省逻辑仍然使用缺省理论来对不完全、不协调的知识进行表示,保持了缺省逻辑通过缺省规则的验证与信念的协调性来判断由前提导出结论的非单调推理过程,并以四值逻辑的观点对信念中的矛盾进行处理.在缺省逻辑的四值语义下,四值逻辑的各种优先推理模式相当于四值缺省逻辑在不含缺省规则时的一个特殊情形.对应于缺省逻辑的扩张存在性问题,四值缺省逻辑所有的缺省理论都有弱$\leq_k$-极小模型.

对公式的变换保证了 L 上的四值赋值与$\overline{L}^+$中的完全且协调的演绎闭包之间的一一对应关系,而对缺省理论的变换则保证了缺省理论的各种四值模型等价于对缺省理论作不同的变换之后得到的缺省扩张.于是缺省理论的四值模型可以在现有的缺省逻辑推理机(如 DeReS[14],DLV①,SMODEL②等)中得以实现,并能容易地扩展至逻辑程序设计.

在进一步的工作中,我们将继续研究四值缺省逻辑的性质,并考虑如何将本文结果推广到一阶语言情形.

参　考　文　献

1　Reiter R.. A logic for default reasoning. Artificial Intelligence, 1980, 13(1~2): 81~132

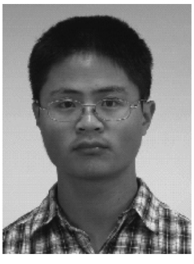
2　Besnard P., Schaub T.. Signed systems for paraconsistent reasoning. Journal of Automated Reasoning, 1998, 20(1): 191~213

3　Han Q., Lin Z.. Paraconsistent default reasoning. In: Proceedings of the 10th International Workshop on Non-Monotonic Reasoning, Whistler BC, Canada, 2004, 197~203

4　Belnap N. D. A.. A useful four-valued logic. In: Dunn J. M.,

① http://www.dbai.tuwien.ac.at/proj/dlv/
② http://www.tcs.hut.fi/Software/smodels/

Epstein G. eds.. Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Dordrecht: Reidel, 1977, 8~37
5 Belnap N. D. A.. How a computer should think. In: Ryle G. ed.. Contemporary Aspects of Philosophy. Stocksfield: Oriel Press, 1977, 30~56
6 Arieli O., Avron A.. The value of the four values. Artificial Intelligence, 1998, 102(1): 97~141
7 Arieli O., Denecker M.. Modeling paraconsistent reasoning by classical logic. In: Proceedings of the 2nd International Symposium on Foundations of Information and Knowledge Systems, Salzau, Spain, 2002, 1~14
8 Lukaszewicz W.. Non-Monotonic Reasoning: Formalization of Commonsense Reasoning. New York: Ellis Horwood, 1990
9 Arieli O.. Paraconsistent preferential reasoning by signed quantified boolean formulae. In: Proceedings of the ECAI, Valencia, Spain, 2004, 773~777
10 Marek V. W., Treur J., Truszczynski M.. Representation theory for default logic. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 1997, 21(2~4): 343~358
11 Delgrande J. P., Schaub T.. On the relation between Reiter's default logic and its (major) variants. In: Proceedings of the Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty, Aalborg, Denmark, 2003, 452~463
12 Imielinski T.. Results on translating defaults to circumscription. Artificial Intelligence, 1987, 32(1): 131~146
13 Delgrande J. P., Schaub T.. Expressing preferences in default logic. Artificial Intelligence, 2000, 123(1~2): 41~87
14 Cholewinski P. *et al.*. Computing with default logic. Artificial Intelligence, 1999, 112(1~2): 105~146



YUE An-Bu, born in 1978, Ph. D. candidate. His research interests include nonmonotonic reasoning and paraconsistent logics.

LIN Zuo-Quan, born in 1963, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His research interests include computer science and artificial intelligence.

Background

Although classical logic has gained great success in computer science, it also confronts challenges in AI. Classical logic is monotonic, that is, we can infer exactly more conclusions when we gain more knowledge. But it is not the case in the field of human commonsense reasoning: conclusions drown from certain premise may not be inferred if certain other sentences were included in the premise. For example, if I told you that I have a bird, you may think that it can fly. While when you know more that my bird is a penguin, you will revise your conclusion. In order to characterize such kind of reasoning problem, a formal method called nonmonotonic logic was introduced, and default logic is an important nonmonotonic logic.

In another hand, a consistent knowledge representation is hard to achieve, because knowledge about commonsense may have many exceptions and is not easy to be expressed precisely in most cases. And more, consistency checking is very hard, especially when the knowledge base is a huge one. Therefore, we may have to bear the contradictions when we reasoning upon a knowledge base. Paraconsistent logics were proposed in the context, in particular, multi-valued logics.

The original nonmonotonic logics are based on classical logic, thus they are not paraconsistent. Many researchers have tried to proposed nonmonotonic paraconsistent logics based on paraconsistent logic, such as IDL (Inconsistent Default Logic). In recent years, some others have tried to bridge the two kinds of apparently different method, and tried to achieve nonmonotonic paraconsistent reasoning by extend classical logics, such as the bi-default logic. The method proposed in this paper also belongs to this category.